

التمرين الأول

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما أن : $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

- أدرك ذغش أخ لذلح g ممشرك م جدول ذغش لآ.
- احسب $g(1)$ وشم لنتج بشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما أن : $f(x) = \frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تنبئ هالبيل ف المينوي للنفس وبلى للمفهم للتعادم وللمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- بب أن لافجى (C_f) قبل المينق (Δ) ذالامعالية $y = -2x + 2e$ و بلمالى الله عدد $+\infty$.
- ج - حدد وضع لافجى (C_f) بالنسبة لى المينق (Δ) .

2. أب أن له من أجل كل عدد حقيقى x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

- ب - لنتج لمتجامتغ لالدالة f ممشرك ل جدول ذغشك ه.
- أستند أ ل عانج $f(x) = 0$ ذقبل حلا وحادا x_0 ل جال $]0, 4; 0, 5[$.
- ب - أنشئ (Δ) و (C_f) .

الحل

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما أن : $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

1. دزلى متغى أخ لذلح g ممشرك م خد كمتغىك أ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x^2 + 2 = 2 \text{ ألن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-2x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

الدالة g تنبئ الشقاق على $]0; +\infty[$: $g'(x) = -4x - \frac{1}{x}$ (لننأ)

من أجل كل عدد حقيقى x من المجال $]0; +\infty[$ ، $-4x < 0$ و $-\frac{1}{x} < 0$ عى ذ $g'(x) < 0$ و لنتال لالدالة g

تنافص قمارن على المجال $]0; +\infty[$.

جول تغرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2. احسب $g(1)$ وشم لنتج بشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

$$g(1) = 2(1)^2 + 2 - \ln 1 = 0$$



من أجل $g(x) < 0, x \in]1; +\infty[$

و (C_f) تتخذ هذا الشكل F لا يتوي للنفس وب الى لام فيم النقع امد والنقع انا س $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$$

ب. نتبَّن أن لنحصى (C_f) قبل المبتقّم (Δ) ذالم عادلة $y = -2x + 2e$ مقارباً لحوال له عند $+\infty$.

$y = -2x + 2e$ قریب لای الہ $+\infty$.

ج- تحدد وضعة الامحنى (C_f) التي تسبب إلى الموت تقم (Δ) .

ندرس بنی اراق فرق $f(x) - y$.

$f(x) - y = \frac{-1 + \ln x}{x}$ لئن $x > 0$ وفيه إشارة $f(x) - y$ ونفس إشارة $-1 + \ln x$.

$x = e$ أي $\ln x = 1$ فكافئ $-1 + \ln x = 0$ فكافئ $(x) - y = 0$

$f(x) - y > 0$ كفاي $-1 + \ln x > 0$ كفاي $\ln x > 1$ أي $x > e$.

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ) (C_f) قطع (Δ) ف النقطة $B(e;0)$	

2. أتبّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (-1 + \ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - لتتحتاج كجامتغُر لدلة f .

بُئْاارة $f'(x)$ هْنَفْس بُئْاارة $g(x)$.

من أجل $f'(x) > 0$ ، $x \in]-\infty; 1[$ ؛ ومن أجل $f'(x) < 0$ ، $x \in]1; +\infty[$.

إذن الدالة f متزايدة تمام f هي $]-\infty; 1[$ تنقص تمام f هي $]1; +\infty[$.



ب - لقطب مع الية (Δ) .

ج- ب'ن أن لا يجرى (C_r) قطع حامل محور لول ف نَقَطُ فِصلِها α ح'ث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

د- اثنى لاهت قمن (Δ) و (D) ولاضحي (C_f) .

٥- نطلب أن نجيب ق م العدد m ، عدد حلول المعادلة : $mx - 2\ln(x) = 0$.

ال حل ☺

I. لتكن الدالة العددية g المعطاة على المجال $]0; +\infty[$ كما في : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات لدلة g وحسب $g(1)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 - 2 \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \ln x = -\infty$ لهذا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$x^2 - 1$ من نفس البنية $g'(x)$ وحيث $x > 0$ لنأخذ $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	-	0	+

$$\overline{g(1)} = 1 + 2 + 2 \ln 1 = 3$$

جول تغرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$
		3	

2. $g(x) > 0$ ، $]0; +\infty[$ من أجل كل x .

بما أن $3 \leq h$ حدة صغرى للدالة g على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ،

$g(x) \geq 3$ و $g(x) > 0$.

II - f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما أن $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$

و (C_f) تتخذ هذا البطل ف لا هي توي اللفس وب الى الامم فم للتع امد والتمج ان س $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- جواب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2 \ln x}{x} = +\infty \quad \text{لأننا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \quad \text{ولذلك} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{x} = -\infty$$

ب. نتب أن لافنجي (C_f) قبل المبتقم (Δ) ذال معادلة $y = x$ مقاربا لحوال له عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

إذن لافنجي (C_f) له مبتقم قارب لحوال (Δ) مع الته $y = x$ ف جوار $+\infty$.

ج. تحدد وضع لافنجي (C_f) بالنسبة إلى المبتقم (Δ) .

$$\text{لنأ } f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x} \text{ ؛ إشارة } f(x) - x \text{ ه منفس إشارة } \ln x.$$

$$f(x) - x = 0 \text{ فكأفئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - x > 0 \text{ فكأفئ } \ln x > 0 \text{ أي } x > 1$$

$$f(x) - x < 0 \text{ فكأفئ } \ln x < 0 \text{ أي } 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	+
الوضع لافنجي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) قطع (Δ)	
		ف اللقطة $A(1;1)$	

2. أ. نتب أن لافنجي من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + 2 \left[\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \right] = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب. لافنجي حاجت لافنجي لافنجي f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$ و $x^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ ف لافنجي لافنجي f متزايدة

تماما فنجي $]0; +\infty[$.

ج. جدولتغرات لافنجي f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. أ. نتب أن لافنجي وجد ماس وح (T) لافنجي (C_f) ، موازل لمبتقم (Δ) .

$$(T) \text{ وازي } (\Delta) \text{ فنجي } f'(x_0) = 1$$

$$f'(x_0) = 1 \text{ فكأفئ } \frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1 \text{ فكأفئ } x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = x_0^2 \text{ فكأفئ } \ln x_0 = 1 \text{ أي } x_0 = e$$

إذن لافنجي (C_f) قبل ماس وح (T) موازل لافنجي (Δ) ف اللقطة لافنجي $(e; e + \frac{2}{e})$.



ب كستبة معادلة (Δ) .

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \text{ وفيه } y = x + \frac{2}{e} \text{ أي } y = (x - e) + e + \frac{2}{e}$$

ج- نتب أن لنحنى (C_f) قطع حامل محوّل فواصل فنقطة فصلتها α حث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ لأن الدالة f متمرة ففى لالمجال $[0; +\infty[$ وبلان خصوص ففى لالمجال $[0, 5; 1]$ و $f(0,5) \approx -2,27$ ، $f(1) = 1$ أي $f(0,5) \times f(1) < 0$ وفيحسب مبرقة لالممتوسطة وجد عدد حث α من لالمجال $[0, 5; 1]$ بحث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزادتمام ففى $[0; +\infty[$ فإن α وحث أي (C_f) قطع حامل محوّل فنقط فصلتها α حث $0,5 < \alpha < 1$ د- رساليمستق من (Δ) و (T) وللمحنى (C_f) .هـ- لنؤش قبل، من سبق لمعدده لحيق m ،عدد حلول المعادلة: $mx - 2\ln(x) = 0$.

$$mx = 2\ln(x) \text{ فافى } mx = 2\ln(x)$$

$$\text{فافى } m = \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$f(x) = x + m \text{ أي } x + m = x + \frac{2\ln(x)}{x}$$

ومنه لمحوّل المعالية فووصل لالقط لقمتركب

$$(C_f) \text{ وللمحنى ذي المعالية } y = x + m$$

بقراءة بانه:

إذا كان $m \leq 0$ فإن المعالى تقبل حال واحدا.إذا كان $0 < m < \frac{2}{e}$ فإن المعالى تقبل حلين.إذا كان $m = \frac{2}{e}$ فإن المعالى تقبل حالمضاعف.إذا كان $m > \frac{2}{e}$ فإن المعالية القتبيل لحوال.حذار: ق m العالقلها بمجموع قعر فالدالة f .

للمن الثلث

I- دالة معوة ففى $]-1; +\infty[$: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$.2. ب ن ل، من أجل x من $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ممشكل جدولتغرات h .3. احسب $h(0)$ ولنتج لباراة $h(x)$ حسب ق x .

$$\text{II- } f \text{ دالة معرفة على }]-1; +\infty[\text{ كما أن } f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

نسم (C_f) تنمّل هالبل فّ لمتوي للنسوب إلى ي عي يوعليد ومتجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ. اح عة $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسّر النتجة بآن.

ب. بليت خدام النتجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ بر من أن: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

ج. - لنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

د. - احبب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و لنتج وجود متقّم قارب طلال لني جي (C_f) .

هـ. - ادرس وضع لاني جي (C_f) بالنسبة إلى لمتقّم لاقارب لال طلال.

2. يبّن لّ ه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثمّ شكّل جدولتغّرات f .

3. يبّن أن لاني جي (C_f) قطع لال متقّم ذوال معالة $y = 2$ عن قطف لاني هـ م ضرورة بّن 3,3 و 3,4.

4. ارس م (C_f) .

ال حل

I- h دالة معرفة على $]-1; +\infty[$:- $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1. احبب $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$ ألّ $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ ألّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x = +\infty$

2. يبّن لّ ه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$:- $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

$$h'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $h'(x) > 0$ ، وغيّ ه لالة h متزايدة تمام على $]-1; +\infty[$.

جدولتغّرات h .

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	+
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. احبب $h(0)$.

$$h(0) = 0^2 + 2(0) + \ln(0+1) = 0$$



النتيجة إشارة $h(x)$ حسب x .

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$		-	+

II- f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كمال $\therefore f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسم (C_f) تمثيلها البياني. لمتوي للمنسوب إلى y عي يوعليد ومتجا ط $(O; i, j)$.

1. أ- حسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ فسنتج قبل.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} x+1 = 0^+$$

$$\text{وفي} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

$$\text{ببباسب خدامل نتجة} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \quad \text{ببر هن أن:} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

نضع $u = e^t$ عي هن $t = \ln u$ إذا كان t ئول إلى $+\infty$ فإن u ئول إلى $+\infty$.

$$\text{وفي} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln u} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

ج- النتيجة $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty \quad \text{وفي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

د- حسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ونتيجة ماستقم مقارب لمتجني (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{؛ إذن وجد ميقم مقارب لمتجني} \quad (C_f) \quad \text{مع أنه} \quad y = x - 1$$

ه- درسة وضعة للمجني (C_f) الينسبة إلى اليميقم لمقارب لم ائل.

ندرس ثبارق فارق $f(x) - y$.

$$\text{لئنا} \quad f(x) - y = \frac{-\ln(x+1)}{x+1} \quad \text{؛ من أجل كل عدد حقيقي} \quad x \quad \text{من المجال} \quad]-1; +\infty[\quad \text{،} \quad x+1 > 0 \quad \text{وفي ثبارة}$$

$$f(x) - y \quad \text{من نفس ثبارة} \quad -\ln(x+1)$$

$$f(x) - y = 0 \quad \text{كأفئ} \quad -\ln(x+1) = 0 \quad \text{كأفئ} \quad \ln(x+1) = 0 \quad \text{كأفئ} \quad x+1 = 1 \quad \text{أي} \quad x = 0$$

$$f(x) - y > 0 \quad \text{كأفئ} \quad -\ln(x+1) > 0 \quad \text{كأفئ} \quad \ln(x+1) < 0 \quad \text{كأفئ} \quad 0 < x+1 < 1 \quad \text{أي} \quad -1 < x < 0$$

$$f(x) - y < 0 \quad \text{كأفئ} \quad -\ln(x+1) < 0 \quad \text{كأفئ} \quad \ln(x+1) > 0 \quad \text{كأفئ} \quad x+1 > 1 \quad \text{أي} \quad x > 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع للثبوت	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) قطع (Δ) ف النقطة $A(0; -1)$	(C_f) تحت (Δ)

2. يتبين أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

ثمارة $f'(x)$ ه من نفس ثمارة $h(x)$.

جدول تغيرات f .

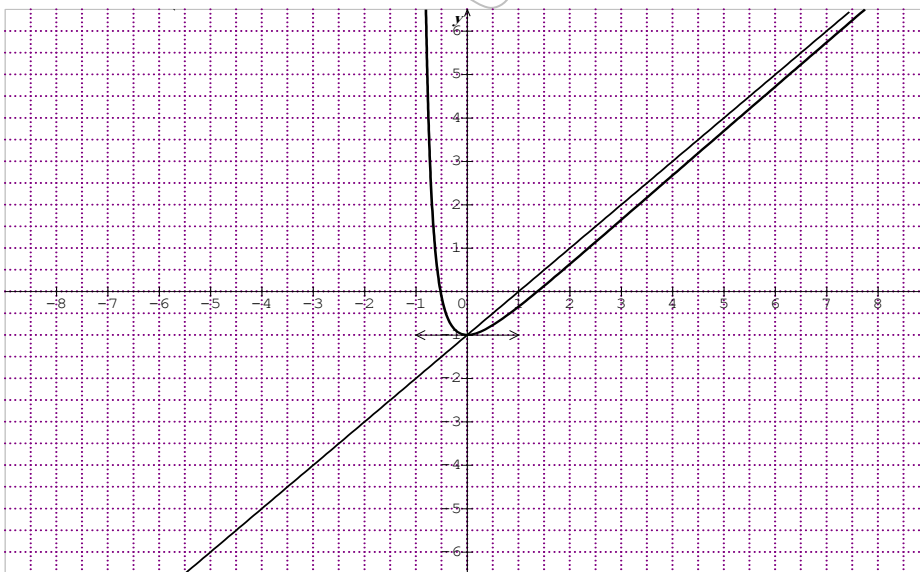
x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

3. يتبين أن لـ f في (C_f) قطعاً مستقيماً ذوال ميل عدلية $y = 2$ عن نقطة فصلتها من صورة بن 3,3 و 3,4.

لذلك f متزايدة في $[0; +\infty[$ وبالتالي ه متزايدة في $[3,3; 3,4]$ ولذا $f(3,3) \approx 1,96$ و $f(3,4) \approx 2,06$ أي $f(3,3) < 2 < f(3,4)$ وفي حساب مبرفة القاطعة متوسطة وجد عدد حقيقي α من $[3,3; 3,4]$ بحيث $f(\alpha) = 2$ أي (C_f) قطعاً مستقيماً ذوال ميل عدلية $y = 2$ عن نقطة فصلتها من صورة بن α .

3,3 و 3,4.

4. رسم (C_f) .



لتمرين الرابع

I- g هـ الدالة المعطاة في المجال $]0; +\infty[$ كما لـ : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. ادرستغرات الدالة g بمشكلك جدولتغرتها.
2. ألهن أن الدالة $g(x) = 0$ وتقبل في المجال $]0; +\infty[$ حال وحدا α حث $1,5 < \alpha < 2$.
(ب) ملقت بشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$.

II- f الدالة المعطاة في المجال $]0; +\infty[$ كما لـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

(C_f) تمثلها البيلف لاسيتوي للنسوب الى عي يوعليد ومتجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فسنتكاي ج قدسأ.

(ب) عتر عن $f'(x)$ بدالة $g(x)$ ولتج تخرات الدالة f بمشكلك جدولتغرتها.

2. بـ أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ولتج حصر اللعد $f(\alpha)$.

3. لكتب معالي الداماس (Δ) اللفي جى (C_f) عدلاقطة ذاتل ططولة 1.

4. ارسم (Δ) و (C_f) .

5. نلش بـ أن احسب قـم لوسط لالقيق m ، عدد لول الدامعالي: $f(x) = \frac{1}{2}x + m$.

III- h هـ الدالة المعطاة في المجال $]0; +\infty[$ كما لـ : $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2 + 1}$

شرح كـفـمـن رسم (C_h) في جى الدالة h اعمادا في (C_f) ثم ارسم (C_h) .

الحل

I- g هـ الدالة المعطاة في المجال $]0; +\infty[$ كما لـ : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. درلستغرات الدالة g بمشكلك جدولتغرتها.

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ ألن $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \ln x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) = -\infty$

$g'(x) = 2x - 2 \left(2x \ln x + \frac{1}{x} x^2 \right) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$

من أجل كل عدد قيق x من المجال $]0; +\infty[$ ، $-4x < 0$ وفيه بشارة $g'(x)$ هـ عكس بشارة $\ln x$.

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $\ln x < 0$ وفيه $g'(x) > 0$

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $\ln x > 0$ وفيه $g'(x) < 0$

لذلك الدالة g متزايدة قداما في المجال $]0; 1[$ وتناقصة قداما في المجال $]1; +\infty[$

جدولتغرات لذلّة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

2. ألبّن أن لمعادلة $(x) = 0$ (تقرب على المجال $]0; +\infty[$ حال وحداً α حث $1,5 < \alpha < 2$.

لئذا الدلالة g متمرة زائد تمام لغى للمجال $]0; 1[$ وتأخذ قوماً ف للمجال $]1; 2[$ و $]2; +\infty[$ إن لغى للمجال $]0; 1[$ ، $g(x) \neq 0$.

لئذا الدلالة g متمرة بتفاد قص تمام لغى للمجال $]1; +\infty[$ وتأخذ قوماً ف للمجال $]2; +\infty[$ و $]0; 2[$ إن $0 \in]-\infty; 2[$ لمعادلة $(x) = 0$ (تقرب على حال وحداً α ف للمجال $]1; +\infty[$ ؛ وما أن $g(1,5) \approx 1,42$ و $g(2) \approx -0,55$ أي $(1,5) \times g(2) < 0$ فإن $1,5 < \alpha < 2$.

(ب) لتتبع إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

II- لئذا الدلالة للمعادلة لغى للمجال $]0; +\infty[$ كما أن $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$.

(C_f) تتخذ الابل ف لا متوي للنسوب إلى ي عي عي د ومتجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

تفسر الابل عن س.

لئذا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ إن (C_f) قبل متق قارب معالته $x = 0$ (محور الترتيب)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إن (C_f) قبل متق قارب معالته $y = 0$ (محور الترتيب) جوار $+\infty$.

(ب) لتعبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{g(x)}{x(x^2 + 1)^2}$$

وليتتبع تغرات الدلالة f

لئذا من أجل كل عدد حقيق x من المجال $]0; +\infty[$ ، $x(x^2 + 1)^2 > 0$ وفيه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

لئذا الدلالة f متمرة زائد تمام لغى للمجال $]0; \alpha[$ بتفاد قص تمام لغى للمجال $[\alpha; +\infty[$.

جول تغرات الدالة f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$f(\alpha)$	0

$$2 \text{ يتب أن } f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\text{لئنا } g(\alpha) = 0 \text{ ككافئ } 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0 \text{ أي } \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2 + 1} = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2(\alpha^2 + 1)} = \frac{1}{2\alpha^2} \text{ إذن}$$

لستحتاج حساب لال عدد $f(\alpha)$.

$$\text{لئنا } 1,5 < \alpha < 2 \text{ عناه } 2,25 < \alpha^2 < 4 \text{ ككافئ } 4,5 < 2\alpha^2 < 8 \text{ ككافئ } \frac{1}{8} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{4,5} \text{ أي}$$

$$0,12 < f(\alpha) < 0,23$$

3 كتلبة معادلة ال مماس (Δ) لمحن (C_f) على نقطة ذاتل فطرلة 1.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ وفيه } y = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2} \text{ أي } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

4. رسم (Δ) و (C_f) .

5. النفاشة بلن، حسب قالم الوسطل حقق

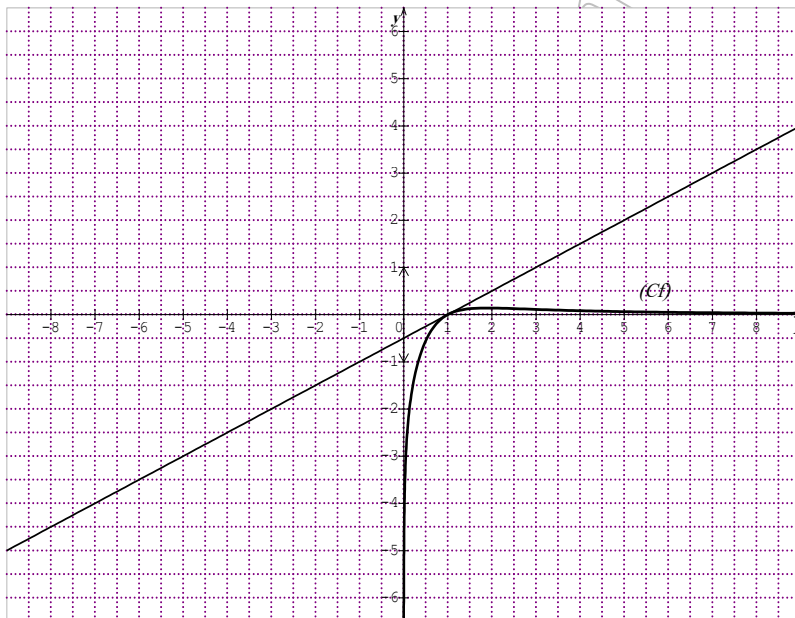
$$m \text{ عدد حلول المعادلة: } f(x) = \frac{1}{2}x + m$$

إذا كان $m < -\frac{1}{2}$ فإن لا معالي قتبيل حلن.

إذا كان $m = -\frac{1}{2}$ فإن لا معالي قتبيل حال واحد

مضاعفا.

إذا كان $m > -\frac{1}{2}$ فإن لا معالي لسلها لحوول.



$$\text{III- } h \text{ لادلة المعقوة غي لال } [0; +\infty[\text{ كمال } : h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2 + 1}$$

شرح ك فمكن رسم (C_h) مرجنى الدالة h اعتماداعلى (C_f) ،

$$\text{لذن} \begin{cases} h(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}; \ln x \geq 0 \\ h(x) = -\frac{\ln x}{x^2 + 1}; \ln x \leq 0 \end{cases} \text{ وفيه } \begin{cases} h(x) = f(x); x \in [1; +\infty[\\ h(x) = -f(x); x \in]0; 1] \end{cases}$$

إذن ف لامجال $[1; +\infty[$ تكون (C_h) منطبق على (C_f)
وف لامجال $]0; 1]$ ، (C_h) ناظر (C_f) بالنسبة لمحور التوصل.

لتمرين الخامس

f الدالة المعرّفة على لامجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسم (C) لافىجى لاجمئل الدالة f لامتوي

للنفس وبلى عى يوعليد ومتجا ط $(O; i, j)$ وحن ط ل $2cm$

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر التنتجتن بلان.

ب بئن له من أجل كل عدد حقيقى من لامجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

ج- ادرسات جامتغّر الدالة f وشكل جدولتغّرثها.

2. أ بئن أن لافىجى (C) قبلنقطة لعطاف E طبتع ن إحثها.

ب- لقتب معالاة الاماس (D) لافىجى (C) لاذي شمل لالمدا O .

3. ارسم (Δ) ، (D) و (C) .

4. نقتش بلان لحسب ق م لوسط لاجقق لامجبت مام m ، عدد لجول لامجالاة $m^x = x$.

الحل

f الدالة المعرّفة على لامجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسم (C) لافىجى لاجمئل الدالة f لامتوي

للنفس وبلى عى يوعليد ومتجا ط $(O; i, j)$ وحن ط ل $2cm$

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$$

تفسرلن نتجتن بلان.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن (C) قبل ميق م قارب معالته $y = 0$ (محور التوصل)

و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ وفيه (C) قبل ميق م قارب معالته $x = 0$ (محور الترتب)



ببتب أن ه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ج- دراسة متغير دلالة f

لمارة $f'(x)$ ه نفس لمارة $1 - \ln x$.

$f'(x) = 0$ عناه $1 - \ln x = 0$ لكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f'(x) > 0$ عناه $1 - \ln x > 0$ لكافئ $\ln x < 1$ أي $0 < x < e$.

$f'(x) < 0$ عناه $1 - \ln x < 0$ لكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

إن دلالة f متزايدة تمام على $]0; e]$ ونقصان تمام على $[e; +\infty[$.

جدول تغيرات دلالة f .

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			

2. أكتب أن لنحى (نقطة) E لطت عن إحداثها.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $x^3 > 0$ وفي لمارة $f''(x)$ ه نفس لمارة $-3 + 2\ln x$.

$f''(x) = 0$ عناه $-3 + 2\ln x = 0$ لكافئ $\ln x = \frac{3}{2}$ أي $x = \sqrt{e^3}$.

$f''(x) > 0$ عناه $-3 + 2\ln x > 0$ ولكافئ $\ln x > \frac{3}{2}$ أي $x > \sqrt{e^3}$.

x	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	0 +

$f''(x)$ فتقيد عد دل عدد $\sqrt{e^3}$ وتغر من لمارات ملجوار $\sqrt{e^3}$ وفيه لاقطة $E(\sqrt{e^3}; f(\sqrt{e^3}))$ ه نقطة لمعطاف

للحى (C) .

ج- كتلبة معادلة المماس (D) لمحنى (C) الذي ش مل لمبدأ O .

معادلة المماس من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$O \in (D) \text{ عناه } 0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ لكافئ } -x_0 \left(\frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \right) + \frac{\ln x_0}{x_0} = 0 \text{ لكافئ } -1 + 2\ln x_0 = 0$$



$$x_0 = \sqrt{e} \text{ أي } \ln x_0 = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2e}x \text{ أي } y = f'(\sqrt{e})x$$

3. رسم (D) و (C).

4. التماقشة بآن أحسب قم الوس طل ح قق ال موجب

تاما m عدد حلول ال معادلة $m^x = x$.

$$m^x = x \text{ فكافئ } \ln m^x = \ln x \text{ فكافئ } x \ln m = \ln x$$

$$\ln m = \frac{\ln x}{x} \text{ أي } f(x) = \ln m$$

إذا كان $0 < m \leq 1$ فإن $\ln m \leq 0$ ولتال ال مع الى متقبل حال و ح دأ.

إذا كان $m < e^{\frac{1}{e}}$ فإن $0 < \ln m < \frac{1}{e}$ ولتال ال مع الى

متقبل حلن تمام زن

إذا كان $m = e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m = \frac{1}{e}$ ولتال ال مع الى متقبل

ح المضاعفا.

إذا كان $m > e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m > \frac{1}{e}$ ولتال ال مع الى لسل ها لول.

التمرين الـ ايس

I (ال دال ح ل عدد ح g يعق ح ع $[0; +\infty[$:- $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$).

1. ادرض ل دج ا ذغتن ل دال ح g .

2. اح عة (1) و حئى اظ ر ج شع ان مئ x لئ ا ن ج $g(x)$.

II (ال دال ح ل عدد ح f يعق ح ع $[0; +\infty[$:- $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$).

1. أ - اح عة $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب - اح عة $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ متقو عئ ل ر ج ن ظ أ.

2. أ ت أ آ ي أ ج م ك م x ي $[0; +\infty[$:- $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ فئى اظ ر ج ل دج ا ذغتن ل دال ح f .

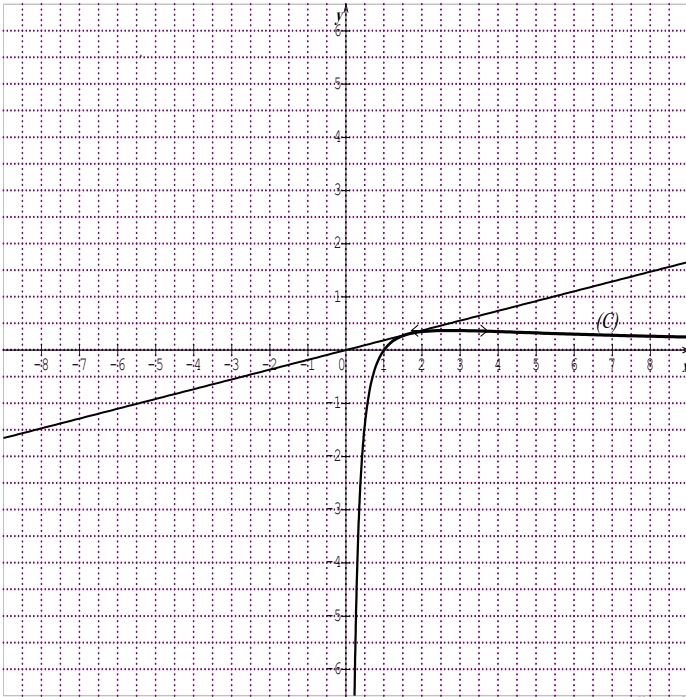
ب ش ك م ج د ل ذغتن ا خ ل دال ح f .

3. أ ت أ آ ل ع مئ (D) ان ر ع ا ه $y = x - 1$ يم ا ز ب ي طئ مئ ح (C_f) .

ب - ادرض وض ع ح (C_f) تل ع ح ل (D).

4. أ ت أ آ ل ع مئ (Δ) ذال ع ا ن ج $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ ط ل ح ح ف م ط ح A ط ه ذع ا ح ل ر أ.

5. از طئ (Δ)، (D) و (C_f) .



ان حم

I) (الدالة لعدد ح g يفتح ع $[0; +\infty[$: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. دز لبحك دي تغير الدالة g .

الدالة g حتم اللولم اق ع $[0; +\infty[$ فد : $g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$

ي أجم كم x ي ل جال $[0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$ ولول الدالة g يد الصبح ذلي ع $[0; +\infty[$.

2. حساب $g(1)$ لتتبع ش عن قم x اش ازج $g(x)$.

$$g(1) = 1 - 1^2 - \ln 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II) (الدالة لعدد ح f يفتح ع $[0; +\infty[$: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{وي} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

تفسر سن اوت دح ي س ا .

(C_f) نيم مي ع م ي م از بي ع اند $x = 0$ ي ح . نراس ذة .

2. أبت ه و ه أجم كم x م ه $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} \right] = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

لناز $f'(x)$ ع طين ازج $g(x)$

ي أجم $x \in]0; 1[$ ، $g(x) > 0$ وي $f'(x) < 0$.

وي أجم $x \in]1; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ وي $f'(x) > 0$.

إذ ل دالة f يد الصبح ذلي ع $[0; 1]$ و متزايح ذلي ع $[1; +\infty[$.

ب - خد لتغير اخ الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



3. أثبت ه أن لمتق م (D) انري مع انت $y = x - 1$ مقابهاهم لمجى (C_f).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

ب - دزله ح ض ع ح (C_f) لمتق ح نى (D).

$$\text{ند ٣} \quad f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln x}{x} \quad \text{وي لئانج} \quad f(x) - (x - 1) \quad \text{في طئانج} \quad \ln x$$

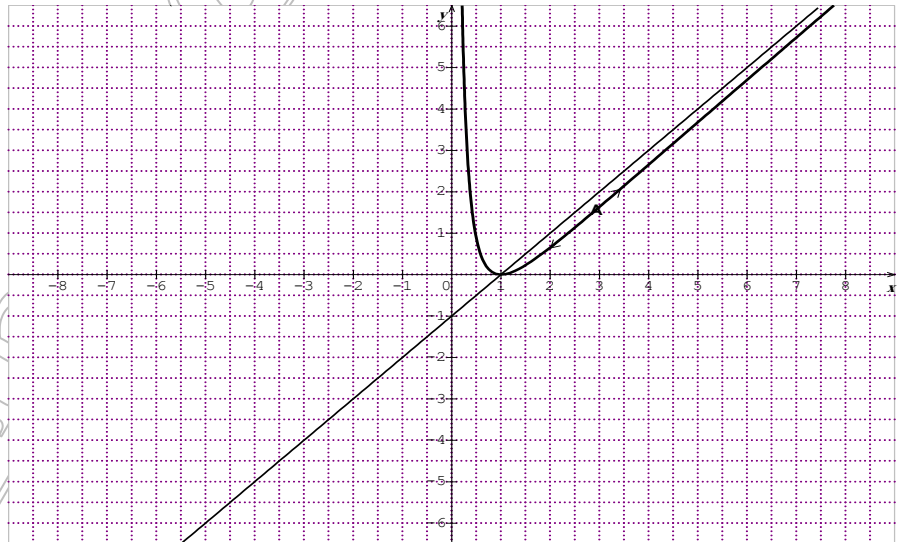
x	0	1	+\infty
f(x) - y		+	0
الوضع للانب	(C _f) فوق (D)	(C _f) قطع (Δ)	(C _f) تحت (D)
		ف اللقطة A(1;0)	

4. أثبت ه أن لمتق م (Δ) ذانم من ح $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ مس ل هجى (C_f) ف وقطح A طة تع ه احدث تيا.

$$f'(x_0) = 1 \quad \text{ذع} \quad \frac{-g(x)}{x^2} = 1 - \quad \text{كافى} \quad x^2 - 1 + \ln x = x^2 \quad \text{كافى} \quad \ln x = 1 \quad x = e$$

$$\text{ند ٣} \quad f(e) = e - 1 - \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad y = e - 1 - \frac{1}{e} \quad \text{إذل عوى} \quad (\Delta) \quad \text{ط ل ح} \quad (C_f) \quad \text{ف ل مطح} \quad A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$$

5. نس م (Δ)، (C_f)، (D).



التمرين الرابع

تعتبر الدالة العددية f لامعقة ففى لامجال $[0; +\infty[$ كما ل : $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تتمثل ه البئل ف

لامتوي لنفسوب لى يى يري ع لى د و متجا ط (O; i, j).

(1) أ احب (x) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فس نك اى ج ف دس.

ب) ادرسات ج امتغ ر الدالة f ففى لامجال $[0; +\infty[$ ثم شك ل جدولتغ ر ه.

- (2) أ) ادرس وضعة الفجوى (C_f) بالنسبة الى المتيقّم (Δ) الذي معالته: $y = 1$.
 ب) كتب معاليه الممماس (T) للفجوى (C_f) ف اللقطة ذات الصلطة 1.
 ج- بـن أن المعاليه $f(x) = 0$ تفكف للمجال $]0; 1[$ حال وحداً α ، حث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.
 3) لشئ (T) و (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة فـ $\mathbb{R} - \{0\}$ كما ل: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$.

- لكن (C_h) تتحلل ه البيل فنفس الممماس ابق.
 أ) بن لّه من أجل كل عدد حقي x عر معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذتنتج؟
 ب) لشئ الفجوى (C_h) إصم ادا فـ الفجوى (C_f) .
 ج- نقش بان أجسب قـم لوسط الحقي m ، عدد لحوول المعاليه: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الحل ٢

نعتبر الدالة العددية f المعرفة فـ المجال $]0; +\infty[$ كما ل: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تتحلل ه البيل فـ
 الممتوي النفس وب الى ي عي يوحلي و متجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty$ وفيه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

لئنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = 1$ وفيه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

تفسر النتائج هنساً.

لئنا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) قبل متيقّم قارب معالته $x = 0$ (محول الترتيب).

لئنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ إذن (C_f) قبل متيقّم قارب معالته $y = 1$ بـ جوار $+\infty$.

ب) درس نكج امتغر لدلة f على المجال $]0; +\infty[$.

$f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$

لئنا من أجل كل عدد حقي $x > 0$ ، وفيه إشارة $f'(x)$ ه نفس إشارة $1 - \ln x$.

$f'(x) = 0$ فتع $1 - \ln x = 0$ إكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f'(x) > 0$ فتع $1 - \ln x > 0$ إكافئ $\ln x < 1$ أي $0 < x < e$.

$f'(x) < 0$ فتع $1 - \ln x < 0$ إكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

إذن لدلة f متزايدة قداما فـ $[0; e]$ وتناقص قداما فـ $[e; +\infty[$.



x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$1 + \frac{2}{e}$	1

(2) أدريسة وضعة للمرجنى (C_f) الفسبة إلى المتيقّم (Δ) الذي معالته: $y = 1$.

$$\text{لذّن } f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$f(x) - 1 = 0 \text{ عناه } \frac{2 \ln x}{x} = 0 \text{ كافي } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - 1 > 0 \text{ عناه } \frac{2 \ln x}{x} > 0 \text{ كافي } \ln x > 0 \text{ أي } x > 1$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ عناه } \frac{2 \ln x}{x} < 0 \text{ كافي } \ln x < 0 \text{ أي } 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - 1$		-	0 +
الوضع للتيبة	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	
		(C_f) قطع (Δ)	
		ف اللقطة $A(1;1)$	

بالمثلبة معادلة المماس (T) للمرجنى (C_f) ف لللقطة ذاتلفصلة 1.

$$(T): y = 2x - 1 \text{ أي } y = 2(x - 1) + 1 \text{ وفيه } y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

جيب ن أن لمعالية $(x) = 0$ فف للمجال $]0; 1[$ حال وحدا α ، حث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

الدلة f ميمرة في للمجال $]0; 1[$ فيه ميمرة في للمجال $[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$ لذّن $f(e^{-0.4}) \approx -0,19$ ،

$f(e^{-0.3}) \approx 0,19$ أي $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ وفيحسب مبرفة للالمبتوسطة وجد عدد ققي α من للمجال

$[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$ بحث $f(\alpha) = 0$ وما أن الدلة f متزادتمام في $]0; 1[$ فإن α وحّد.

$$4) \text{ لتكن الدلة } h \text{ المعرفة في } \mathbb{R} - \{0\} \text{ كما ل: } h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$$

ليكن (C_h) تمثيلها البيئي فنفس للمفصل ابق.

أنتب ن أنه من أجل كل عدد حقي x غر معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. المفسنتج ؟

لكن x عددا حقيّا غر معدوم:

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln |-x|}{|-x|} = \frac{2 \ln |x|}{|x|} - \frac{2 \ln |x|}{|x|} = 0$$

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لذّن $-x \in \mathbb{R}^*$



ب) الرسم

$$m = \frac{\ln x^2}{|x|} + 1 \quad \ln x^2 = (m-1)|x|$$

$$h(x) = m \quad m = \frac{2 \ln |x|}{|x|} + 1$$

إِذَاكَ $m \leq 1$ فإِنَّ لِعَنْاحِ نَفْمِ حَهٗ .

إِذَاكَ أ $1 + \frac{2}{e} < m < 1$ لَعَانِجْ هُنَّ مَ أَرْجَحْ حَ ل.

إِذَاكَ $m = 1 + \frac{2}{e}$ لِأَنَّ عَاقِبَةَ هَذِهِ هِيَ $\hat{m} = 1 + \frac{2}{e}$.

$$m > 1 + \frac{2}{e}.$$

لتمرّن الثامن ☹

تعبّر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما أنّ : $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1 + e^{-x})$.

(C_f) تتخذ البُنى فـ لا تتوي النفس وب الى عى ير ع ل د و متجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

١ بـ ن ل ه م كن لتعبلة $f(x)$ ، في الشكل : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x)$

2. برهن أن لكل f زوج g .

3. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. ادرسات جاعتغُر لالدلة f مَمَّشَكَل جدولتغُر لدا.

5. بُبَيِّنَ أَنَّ لَهَا جَرَى (C_f) قَبْلَ مَيِّتٍ قَرِيبٍ حُلْدُنِ (Δ) وَ (Δ') طُبِيعَتُهُنْ مَعَالَتْ هُمَا.

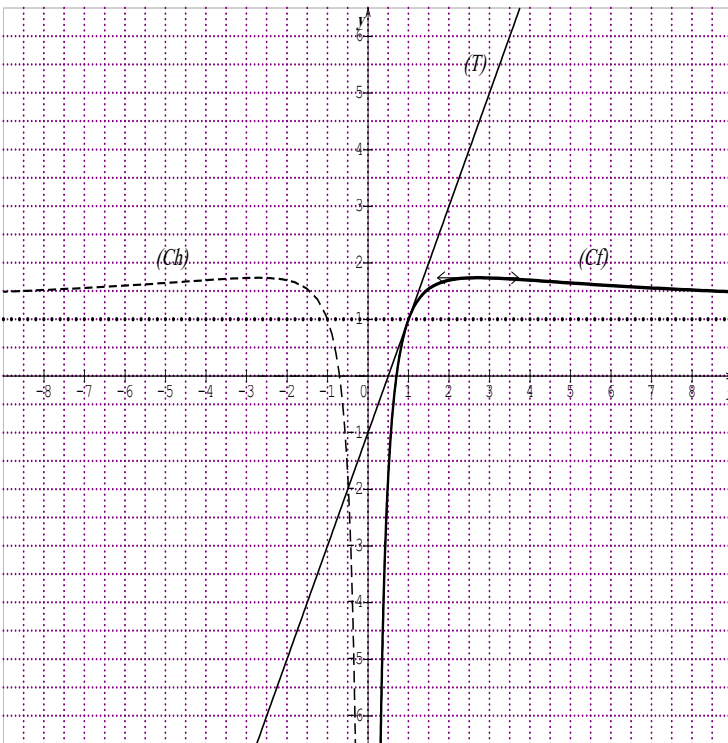
6. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

7. تعبر الدالة g المعرّفة على $[1; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أثبتوا أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، $g(x) = f(\ln x)$.

- بلنت جت جات غر ل دلة q .

ب شركل جدولتغرات الالة g .



الحل

تعتبر الدالة العددية f لامتعة في $\mathbb{R}$ كما ل : $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x})$.

(C_f) تستعمل ه البائل ف ال متوي للنسوب الى عي عي عي د ومتجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين انه من المتبلة $f(x)$ ، على الشكل : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x)$.

$$\text{لئنا } f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x}) = f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \ln e^{-x} + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x - x + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \ln(e^x + 1)$$

2. بثبات ان لدلة f زوجة.

من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولئنا $f(-x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = f(x)$ وفيه الدلة f زوجة.

3. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0 \text{ ألن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$$

4. درلة نكج اختغر لدلة f .

$$f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-1-e^x+2e^x}{2(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{2(e^x+1)}$$

من أجل لكل عدد حقيقي x ، $2(e^x+1) > 0$ وفيه بئارة $f'(x)$ من نفس بئارة e^x-1 .

$$f'(x) = 0 \text{ فتعني } e^x - 1 = 0 \text{ لئافئ } e^x = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ فتعني } e^x - 1 > 0 \text{ لئافئ } e^x > 1 \text{ أي } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ فتعني } e^x - 1 < 0 \text{ لئافئ } e^x < 1 \text{ أي } x < 0$$

إذن لدلة f فتقاص قدام في لامجال $]-\infty; 0]$ و متزا قدام في لامجال $[0; +\infty[$.

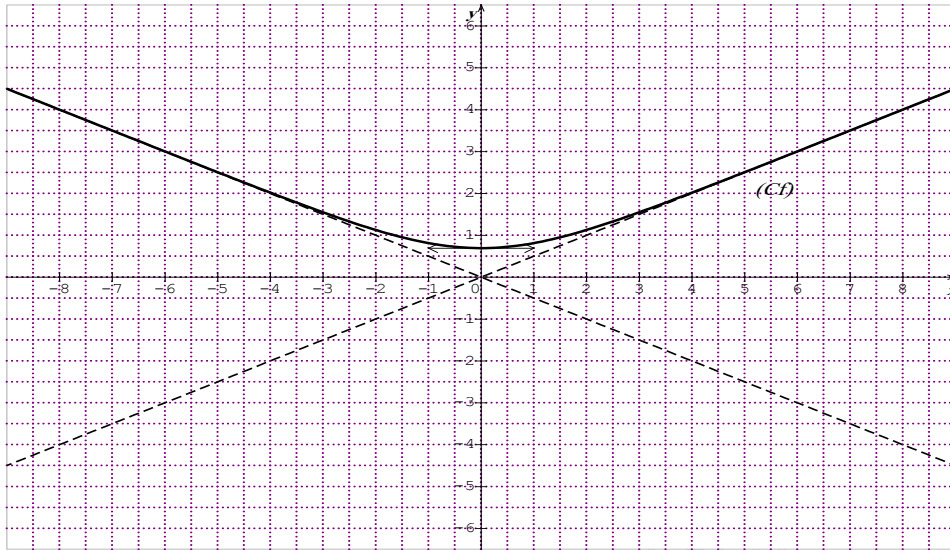
جدولتغرات لدلة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

5. بثبات أن لفيجي (C_f) فليهمس تق نهمقارب ن ليلن (Δ) و (Δ') طبتعن مدلتهم.

لئنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$ إذن لفيجي (C_f) متق قارب ليل (Δ) معاته $y = \frac{1}{2}x$ بجوار $+\infty$.

لئنا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0$ إذن لفيجي (C_f) متق قارب ليل (Δ') معاته $y = -\frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$.



6. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

7. نعبّر للدالة g لامتعة فلي لامجال $[1; +\infty[$:- $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - لفيجي لئه من أجل كل عدد حقيقي x من المجلال $[1; +\infty[$ ، $g(x) = f(\ln x)$.

لئنا $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln x = -\frac{1}{2}\ln x + \ln(e^{\ln x} + 1) = f(\ln x)$

- لمتتاجك امتغر لئلة g .

نل حظ أن لئلة g مركبة لئلة $\ln$ متبعو قبل لئلة f ($g = f \circ \ln$)

لئنا لئلة اللوغاريتم لئبيرة $\ln$ متزاد قداما فلي لامجال $[1; +\infty[$ ولتأخ ق هاف لامجال $[0; +\infty[$ ولئلة f متزاد قداما فلي لامجال $[0; +\infty[$ إذن لئلة g متزاد قداما فلي لامجال $[1; +\infty[$ ولتأخ ق هاف لامجال $[0; +\infty[$ ولتأخ ق هاف لامجال $[0; +\infty[$ ولتأخ ق هاف لامجال $[0; +\infty[$

$[1; +\infty[$ أي لئلة g متزاد قداما فلي لامجال $[1; +\infty[$.

ب - جدول تغرات لئلة g .

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

لئمرن التبع

I - لئلة لامتعة فلي لامجال $[1; +\infty[$:- $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغرات لئلة g متشكّل جدول تغراتها.

(2) ليتحقق أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

-II الف الدالة لامعومة غوى للمجال $]-1; +\infty[$:- $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تستغلها البيل ف المبتوي للنسوب الى المقيم للتعامد ولتعمجان س $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحضان ط ل 2cm)

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ فسّر النتيجة بـ أن.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أبـ أن أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هـ شقيقة الدالة f .

ب) ادرسات اجتاعر الدالة f غوى للمجال $]-1; +\infty[$ مثم شكل جدول تغريته.

ج- بـ أن الدالة الى $(x) = 0$ تقبل حال وجدا α ف للمجال $]-1; +\infty[$ مثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ) بـ أن الدالة (Δ) ذا الدالة الى $y = x$ قارب طلال في حى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضع الدالة في حى (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

4) ليتبين أن الدالة (T) ذا الدالة الى: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس الدالة في حى (C_f) ف نقطة طفرتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) أرسم الدالة (T) في حى (C_f) وللمماس.

ج- عـ أن بـ أن قـم لوسط لخرق m مـح شقيل الدالة الى $f(x) = x + m$ لـحـن نـقام اـزـن.

الحل

-I الف الدالة لامعومة غوى للمجال $]-1; +\infty[$:- $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) دريس قعرات لدالة g .

و $\lim_{x \rightarrow -1} 2\ln(x+1) = -\infty$ ألـ $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + 4 = 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$

لـدـلة وقـتـبـل الشـقـاق غـوى $]-1; +\infty[$ لـدـن: $g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 + 4x}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $x+1 > 0$ و $x+2 > 0$ وفيه إشارة $g'(x)$ هـ نفس إشارة x .

إذن الدالة متناقصة قدام غوى للمجال $]-1; 0[$ و متزايدة قدام غوى للمجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات لـ g .

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

(2) ليقتاج نـه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

نال حظ من جدول تغيرات نـه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ ، ولبـلـl

$$\text{II-} f \text{ الدالة لامعوبة غيى للمجال }]-1; +\infty[\text{ :-} f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$$

و (C_f) تنمّل هـ البـلـl

$$(1) \text{ أ) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ وفيه } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

تفسر لنتجة بلـنـا.

$$\text{لـنـا } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ إذن } (C_f) \text{ قبل ميّقم قارب مع الـهـ } x = -1.$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ ألـنـ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

$$(2) \text{ أ) } \text{تـبـنـنـه، من أجل كل } x \text{ من المجال }]-1; +\infty[\text{، } f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2} \text{، حـثـ } f' \text{ همـشـتـقـة الـدـلـة } f.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{-2}{x+1}(x+1) - 1 + 2\ln(x+1) \\ = 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) درلـة تـكـامـتـغـر لـدـة f عـلـى الـمـجـال $]-1; +\infty[$.

لـنـا من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ و $(x+1)^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ فـولـبـلـl

تـمـاـم غـيـى $]-1; +\infty[$



جدول تغیرات لدلة f .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ج- تبين أن لمعادلة $(x) = 0$ يحقق حل واحدًا α فالمجال $]-1; +\infty[$ يتم التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

للدالة f متمرق متزاد قدم اى فى الم جال $]-1; +\infty[$ وت اخلق μ ف $\mathbb{R}$ اذن من اجل كل عدد حقيقى k لام على الة

$(x) = k$ قابل حال وحائف لامجال $]-\infty; +1[$ وبالأخص لامعالية $(x) = 0$ قابل حال وحائف لامجال

وَمَا أَنَّ $f(0) \times f(0,5) < 0$ فَإِنَّ $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أجبَّ ن أن لم يتقَّ م (Δ) ذاللم عدالة $y = x$ مقارب اهل لم جنى (C_f) عند $+\infty$.

لئنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ ونهال متقّم (Δ) قارب حلقى
 للـ (C_f) عند $+\infty$.

(ب) درپلے وضعۂ لامحزی (C_f) الہی سببہ الی (Δ) .

لنأخذ $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$ ونرى ان $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$ هي نفس الدالة $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

$f(x) - x = 0$ عن $2\ln(x+1) - 1 = 0$ إضافة $\ln(x+1) = \frac{1}{2}$ أي $x = \sqrt{e} - 1$

$f(x) - x > 0$ عن $2\ln(x+1) - 1 > 0$ وأي $\ln(x+1) > \frac{1}{2}$ أي $x > \sqrt{e} - 1$

x	-1	$\sqrt{e}-1$	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
الوضع	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) قطع (Δ) ف القطة لك إحداثاها $(\sqrt{e}-1; \sqrt{e}-1)$.

4. يُدعى أن لا متقارب (T) ذالامع الية: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مم اسلاف جى (C_f) ف ن ق ظ ف ط ر ت هـ x_0 .

(أ) x_0 میں اب

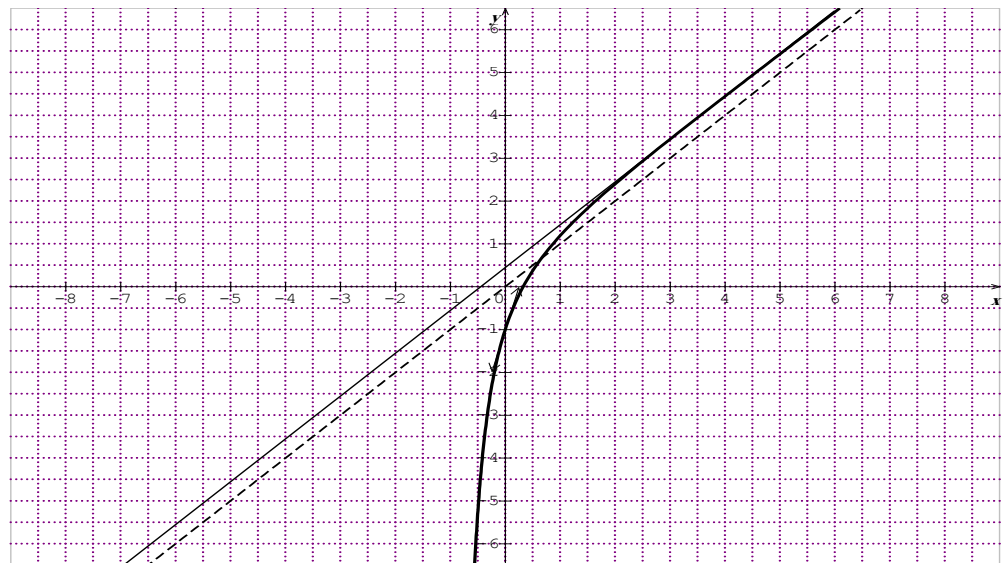
لاستقيم (T) حلة تساوي 1 وفيه $f'(x_0) = 1$.

$$\ln(x_0+1) = \frac{3}{2} \quad \text{فاضل} \quad x_0^2 + 2x_0 + 4 - 2\ln(x_0+1) = x_0^2 + 2x_0 + 1 \quad \text{فاضل} \quad \frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2} = 1 \quad \text{فاضل} \quad f'(x_0) = 1$$

$$x_0 = e^{\frac{3}{2}} - 1 \text{ أي}$$



(ب) رسالهم ستق مرق اربن وال ماس (T) ثم لفي جي (C_f).



جاء نبن اق م لوس ط لفي جي m ، بشق ثق بل الم عدلة $f(x) = x + m$ حنن مازن.

المعالية $f(x) = x + m$ يقبل حنن مازن من اقلق م m من الم جال $\left[0; \frac{2}{\sqrt{e^3}}\right]$.

لتمرن لا عنبر

I لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما ل: $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة وشمك كل جدولتغريها.

2. ملنتج بئارة $g(x)$ على الم جال $]0; +\infty[$.

3. بتحق أن $g(1) = 1$ و أن الم عالية $(x) = 1$ يقبل حال آخر α حث $0,1 < \alpha < 0,3$.

II برك لئلاج f ل عتج عه ك اة: $f(x) = x^2 - x \ln x$ و $f(0) = 0$.

(C_f) تنمّل ه البل ف الم يتوي للنس وب الى عي عي ولي و متجا ط $(0; i, j)$.

1. أ- احبب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ وفسر اللتجة ف دس.

ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أب ن لله، من أجل كل عدد حقي x من الم جال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

ب- ملنتج بئامتغري الدالة f شمك كل جدولتغريها.

ج- ب ن أن لفي جي (C_f) قبالقطة لعطاف w طبتع ن ه.

د- ع ن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر اللتجة بئان.

3. أ طبت أن $f(x) = x[g(x) - x + 1]$ ثم احبب $f(\alpha)$.

ب- أعط حصرال- $f(\alpha)$.

4. ببت أن لفي جي (C_f) قبال ماسن (T) و (T') ماماس اوي 1، طبتتلة معالي ككل في ه.

5. ارسم (T) ، (T') ولا فنج (C_f) .

الحل

I لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما ل : $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

1. دريس قترات لدلة g

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 1 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

لدلج g هنتم الإلشراق ع $]0; +\infty[$ نذ : $g'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}$

نلناج $g'(x)$ ق طلناج $2x - 1$ أل $x > 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	

لدلج g يوالصح ذلي ع $]0; \frac{1}{2}[$ و متزناج ذلي ع $[\frac{1}{2}; +\infty[$ أل جال

جدولت قترات لدلة g .

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

2. لنتناج إشارة $g(x)$ على المجلال $]0; +\infty[$.

لدن الدلة يتقل قمة حدصة غري وه $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقي x من المجلال $]0; +\infty[$ $g(x) \geq \ln 2$ ولتلك $g(x) > 0$.

3. لبحق أن $g(1) = 1$

$$g(1) = 2(1) - 1 - \ln 1 = 1$$

نتب أن لبعالة $x = 1$ يتق بل حال آخر α حث $0,1 < \alpha < 0,3$.

لدلة g متمرة متواقص تمام على المجلال $]0; \frac{1}{2}[$ وبلخص ووص على المجلال $[0,1; 0,3]$ نلنا $g(0,1) \approx 1,5$ ،

$g(0,3) \approx 0,8$ أي $g(0,3) < 1 < g(0,1)$ ونجسب مبرقة القالم متوسطة وجد عدد حقي α من المجلال $]0,1; 0,3[$ بحت $g(\alpha) = 1$.

II نذك لدلج f لبحق ع $]0; +\infty[$ كالة : $f(x) = x^2 - x \ln x$ و $f(0) = 0$

(C_f) تنمهل ه البئل ف لمتوي للنسوب إلى عي يوعلي د ومتجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1. أ - جواب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة f القابلة للتفاضل في 0 ومن هنا لا لبس (C_f) ل نصف ماس موز لم حول لترتّب

ب - جواب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ تبين أنّ f ، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 2x - \left[\ln x + \frac{1}{x} \cdot x \right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب - لتبين أنّ f متزايدة لـ f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$ وفيه $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تمام في $]0; +\infty[$.

ج - جدولت f لـ f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

ج - بّ أن f هي قابلة للتفاضل في 0 طبت عندها.

لنأ $f''(x) = g'(x)$ وفيه $f''(x) = f''(x)$ من فسر $f''(x)$ $g'(x)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$f''(x)$ متغير من أجل $\frac{1}{2}$ وتغير من ثباتها وفيه النقطة $\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 0 نقطة انعطاف لـ f في (C_f) .

د - تبين دون جواب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ فسر لـ f جّ قبل α .

الدالة f القابلة للتفاضل في α من المجال $]0; +\infty[$: f بالخص α طبت:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$$

في (C_f) f قابلة للتفاضل في α فسر ذلك وجود ماس لـ f في α فسر ذلك فسر ذلك α

طبت α او 1 .

3. أ - تبين أنّ $f(x) = x[g(x) - x + 1]$

$$f(x) = x^2 - x \ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x[g(x) - x + 1]$$



جواب $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \alpha[g(\alpha) - \alpha + 1] = \alpha(1 - \alpha + 1) = \alpha(2 - \alpha)$$

ب- حساب $f(\alpha)$.

$$0,1 < \alpha < 0,3 \text{ عن } -0,1 < -\alpha < 0,3 \text{ لكافئ } 1,7 < 2 - \alpha < 1,9$$

$$\text{وفي } 1,7 \times 0,1 < \alpha(2 - \alpha) < 1,9 \times 0,3 \text{ أي } 0,17 < f(\alpha) < 0,57$$

4. بفات أن لحن (C_f) قبل مماسن (T) و (T') مالماس اوي 1.

$$f'(x_0) = 1 \text{ لكافئ } g(x_0) = 1 \text{ وفي } x_0 = 1 \text{ أو } x_0 = \alpha$$

إذن (C_f) قبل مماسن (T) و (T') مالماس اوي 1 عدل قطن التفت فطرت مالم 1 و α .

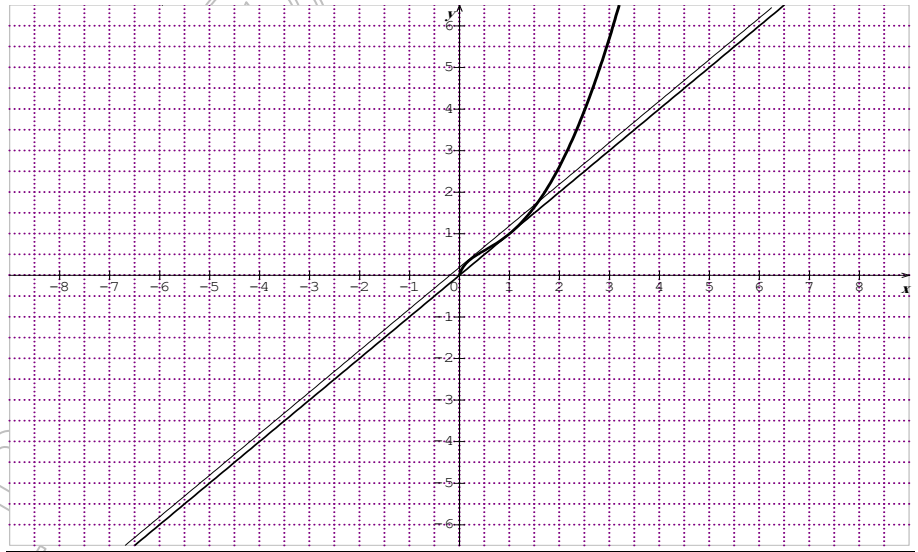
كثبة معادلة لكل من مالم.

معادلة مالماس (T) عدل قطة ذاتل فطلة 1.

$$(T): y = x \text{ أي } y = (x - 1) + 1 \text{ وفي } y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

معادلة مالماس (T') عدل قطة ذاتل فطلة α .

$$(T'): y = x - \alpha^2 + \alpha \text{ أي } y = (x - \alpha) + \alpha(2 - \alpha) \text{ وفي } y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

5. رسم (T) ، (T') والممنحن (C_f) .

لتمرن الاحادي عشر

$$f \text{ لتكن الدالة العددية المعقبة على } \mathbb{R}^* \text{ بالعبارة: } f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$$

$$(C_f) \text{ تستغلها البلف لاسيتوي للنفس وبالي عي يوعلي ومنتجا } (0; \vec{i}, \vec{j})$$

1. ادض ذغت اخ ل داح f .2. بفثد أ ل ح (C_f) م طعل ع مئ $y = 1$ (Δ) ف م ط ط مة ذع إح دك ذّا.3. اح عة $f(-x) + f(x)$ ، اذا ذع ر ج ؟

بجاء أن $f(x) = 0$ نقبل حلاً وحداً $\alpha \in]-0,71; -0,70[$ حيث $\alpha \in]-0,71; -0,70[$
 5. ثبت أن لا في جزي (C_f) قبل ماسا (T) شمل القطة $A(0;1)$ ومسن لا في جزي (C_f) ف نقتن
 طرب حساب إحداثيات كل في هم، لقتب مع الى فل ماس (T) .

6. أرسم لام ماس (T) ولا في جزي (C_f) .

7. نلقش بأن، جيب ق م لوس ط لا في جزي m عدد لحوول لام مع الى: $f(x) = mx + 1$

8. لادلح لعدد حنه رغن ل م م x ح ن: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$.

أب ن أن h دلالة زوجة.

ب) دون درلستغ رات h ، أرسم (C_h) ، فذل ذلك.

الحل ☺

لتكن f الدالة لعدد ل م معية فوي $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تنمّل ه الابل ف ل م م توي لنفس وب الى ي عي يوعلي د ومتجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. دزلس ح تغياخ لادلح f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2 \ln -x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{إذ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty \quad \text{وي} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = +\infty \quad \text{إذ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{وي} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^2 = -\infty$$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

لبن انج $f'(x)$ في ط بن انج $\ln x^2 - 2$.

$$f'(x) = 0 \quad \text{في} \quad \ln x^2 - 2 = 0 \quad \text{ل كافي} \quad \ln x^2 = 2 \quad \text{أو} \quad x = -e \quad \text{أو} \quad x = e$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{في} \quad \ln x^2 - 2 > 0 \quad \text{ل كافي} \quad \ln x^2 > 2 \quad \text{أو} \quad x > e \quad \text{أو} \quad x < -e$$

لبن انج $f'(x)$.

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+

لادلح يبرص انج ع ك م ي $[-\infty; -e]$ و $[e; +\infty[$ ويبرص انج ع ك م ي $[-e; 0[$ و $]0; e]$.

خذ لتغيرا خ لفلح f .

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1	$\frac{e+2}{e}$	$+\infty$	$\frac{e-2}{e}$	1

2. بقاء أن لفلح (C_f) ققطعان من قمر $y=1$: (Δ) ف وقطه هطة تع ه إحداثيات.

$$f(x) = 1 \text{ في } x = 1 \text{ أو } x = -1 \text{ أي } \ln x^2 = 0 \text{ يكافئ } -\frac{\ln x^2}{x} = 1$$

$$\text{إذ } (C_f) \cap (\Delta) = \{A(1;1), B(-1;1)\}$$

3. من باب $f(-x) + f(x)$.

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2 + \frac{\ln x^2}{x} - \frac{\ln x^2}{x} = 2$$

ي أجم $x \in \mathbb{R}^*$ فند $x \in \mathbb{R}^*$ فند $f(-x) + f(x) = 2$ وعلا لملطح $\omega(0;1)$ ي لقص نطرسنه ح' (C_f) 4. بقاء ه أن لفلح $(x) = 0$ فبقم حل حدا α على المجل $]-0,71; -0,70[$

للكلة f من مة نة فاقص قمارا فلى المجل $]-0,71; -0,70[$ فذنا $f(-0,71) \approx 0,04$ ، $f(-0,70) \approx -0,02$ أي $f(-0,70) < 0$ و $f(-0,71) > 0$ فبحسب مبرفة القلم نوسطة وجد عدد حقي و ح' α فلامجل $]-0,71; -0,70[$ ف $f(\alpha) = 0$.

5. بقاء أن لفلح (C_f) فبل مامسا (T) شمل اللقطة $A(0;1)$ و مس لفلح (C_f) ف نطقن.لذنا مع الة لمامسا (T) من الشك: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$A(0;1) \in (T) \text{ عناه } 1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ يكافئ } 1 = -x_0 \left(\frac{\ln x_0^2 - 2}{x_0^2} \right) + 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0}$$

$$\text{يكافئ } \left(\frac{-\ln x_0^2 + 2}{x_0} \right) - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 0 \text{ يكافئ } \frac{-2\ln x_0^2 + 2}{x_0} = 0 \text{ يكافئ } \ln x_0^2 = 1 \text{ وفيه } x_0^2 = e$$

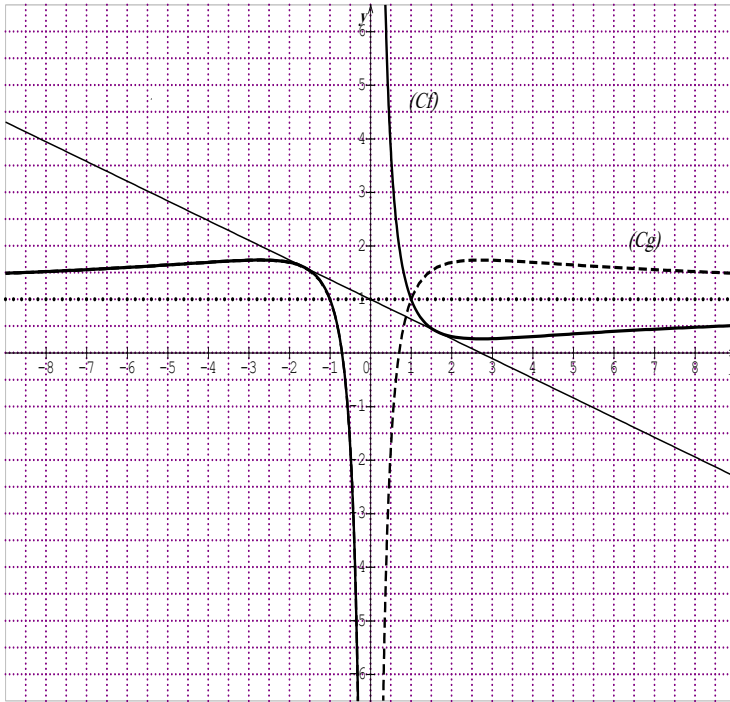
أي $x_0 = \sqrt{e}$ أو $x_0 = -\sqrt{e}$. إذن (C_f) قبل مامسن شمل اللقطة $A(0;1)$ عد لطقن اللقطة فطرت ه ما $\sqrt{e}$ و

$$-\sqrt{e} \text{ فذنا } f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{e} \text{ و } f'(-\sqrt{e}) = -\frac{1}{e} \text{ إذن لمامسا من متوازلا و لعل ه ما نطابق أن أن لفلح } (C_f)$$

قبل مامسا (T) شمل اللقطة $A(0;1)$ و مس لفلح (C_f) ف لطقن اللقطة إحداثيات ه ما $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$.

لكتابة معادل لمامسا (T) .

$$y = \frac{-1}{e}x + 1 \text{ وفيه } y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$



6. رسم ال مماس (T) وللمحنى (C_f) .

للمنطقة ب' أن، وحسب قيم الوس طلق حقيق m

$$f(x) = mx + 1$$

لحلول المعادلة: فوصل لنقطة طاق (C_f) وللمنطق

$$y = mx + 1$$

إذا كان $m < -\frac{1}{e}$ فإن للمعادلة لسل ها لحول.

إذا كان $m = -\frac{1}{e}$ فإن للمعادلة قبل حلن ضا عن.

إذا كان $-\frac{1}{e} < m < 0$ فإن للمعادلة قبل أربعة لحول.

إذا كان $m \geq 0$ فإن للمعادلة قبل حلن.

$$h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} \quad x \neq 0$$

أثبت أن h دالة زوجة.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$.

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x)$$

$$\begin{cases} h(x) = f(-x); x > 0 \\ h(x) = f(x); x < 0 \end{cases} \quad \text{وفي} \quad \begin{cases} h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x}; x > 0 \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{-x}; x < 0 \end{cases}$$

إذن (C_h) تطبق على (C_f) ف h زوجة فإن (C_h) نلاحظ بالانوية الى حامل محور لتراتب.

لتمرر لنن غير

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \quad x > 0$$

(C) تتخذها البيل ف للمفهم للتعامد وللمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ وفسر النتائج.

2. ادرس لتجانس الدالة f وشكل جدولتها.

3. لفتب معادلة المماس (T) للحنى (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.

4. ب' أن للحنى (C) قبانقطة لعطاف ω طبتع ن إحداثها.

5. ببن أن لافجى (C) "قطع لافجى" (d) ذال مع الة $\frac{1}{2}$ ف نطق فطنتاهما α و β حث: $0,4 < \alpha < 0,5$ و $5,3 < \beta < 5,4$.

6. ارس مكال من (T) و (C).

نعبّر لالدلة g لامعقة فوى $\mathbb{R}^*$ كم ال: $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$. فكن (γ) فحناه الابل ف لافجى ابق. ابن أن الدلة f فردة.

2. ببن أن $g(x) = f(x)$ فوى مج ال طبت حدده.

3. دون درلة الدلة g شكل جدولتغ ركه.

4. اعصم ادا فوى لافجى (C) شرح لفة رسم لافجى (γ) ثم ارسه.

ال حل

I (الدلة لامعقة فوى لامجال $]0; +\infty[$ كم ال: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(C) تنمط ه الابل ف لافجى لامعق امد ولتمجان س $(O; i, j)$.

1. حساب نه آة الدلة f عند 0 وعند $+\infty$.

لذنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln x = -\infty$ وفيه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty$

لذنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ وفيه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$

تفسر لنتجتن هن س

لذنا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ إذن قبل متق قارب معالته $x = 0$ حامل محول لتركب

لذنا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن قبل متق قارب معالته $y = 0$ حامل محول لوسطل

2. درلة شكامتغ ر لدلة f.

للدلة قبل الشقاق فوى $]0; +\infty[$ لذنا: $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

لشارة $f'(x)$ ه عكس لشارة $\ln x$.

من أجل $x \in]0; 1[$ و $\ln x < 0$ وفيه $f'(x) > 0$

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ و $\ln x > 0$ وفيه $f'(x) < 0$ و $f'(1) = 0$.

إذن الدلة f امتزاد قدام $]0; 1[$ فوى نواقص قدام $]1; +\infty[$.

جدول لتغ رات.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

$x_0 = e^{-1}$ أي $1 + \ln x_0 = 0$ كافى $\frac{1 + \ln x_0}{x_0} = 0$ عن $f(x_0) = 0$

4. اَتَّبِعْ مَنْ اَنَّ لِيْ فِيْهِ (مَنْ يُّبَلِّغُكَ نِقْمَةَ عَظَافٍ) @ لُطِّتْ عَنِّ اِحْلَتْ اِءَا.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -1 + 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

5. بتبني أن لنجزي (C) قطع الميتقّم (d) ذالام دلة $\frac{1}{2}$ يف نطق فصلت ادم α و β حث:

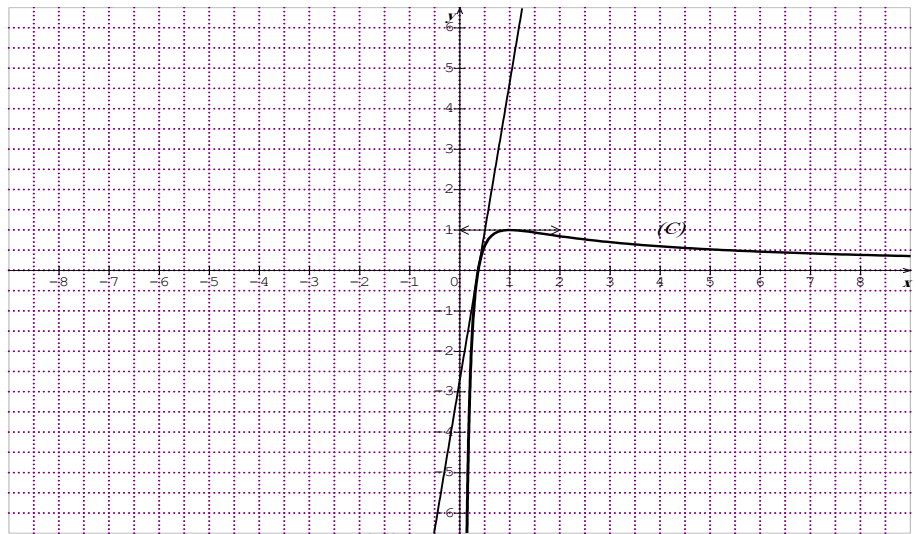
الدالة f متزايدة متصلة على $[0, 1]$ (بالخصوص على $[0, 4; 0, 5]$ و $[0, 4; 0, 20]$)، $g(0, 4) \approx 0, 20$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \text{ لامجال }]0, 4; 0, 5[\text{ بحث}$$

$g(5,3) \approx 0,503$ ، $g(5,4) \approx 0,497$ إذن $f(5,4) < \frac{1}{2} < f(5,3)$ وفي ح س ب مبرقة القالم متوسطة ووجد عدد

$$\frac{1}{2} = \text{يف نَقْطَنُ فُلُوسَاتَامَا } \alpha \text{ و } \beta \text{ حُتْ: } 0,4 < \alpha < 0,5 \text{ و } 5,3 < \beta < 5,4.$$

6 رسم كمال من (T) و (C).



نعبّر الالة g لامعومة فحي $\mathbb{R}^*$ كمال : $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$. ليكن (γ) فيجناه الابل ف لامعوم ابق.

ايبن أن لالة g فردة.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لئنا $-x \in \mathbb{R}^*$

ليئنا من أجل كل عدد حقيقي x معوم :

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \frac{\ln(-x)^2}{-2x} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}\right) = -g(x)$$

2. ايبن أن $g(x) = f(x)$ على مجال طلب تحده.

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1+\ln x}{x}; x > 0 \\ g(x) = \frac{1+\ln(-x)}{x}; x < 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{2x}; x > 0 \\ g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln(-x)}{2x}; x < 0 \end{cases} \quad \text{لئنا} \quad g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln|x|}{2x} \quad \text{وفي}$$

إذن من أجل $x \in]0; +\infty[$: $g(x) = f(x)$

3. جدول تغرات لالة g .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0		0	
$g(x)$	0	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0

4. شرح كفاءة رسم لامرجن (γ)

(نطبق فحي (C_f) ف لامجال $]0; +\infty[$ وما أن فردة فإن (γ) نلاحظ بالانابة الى O بعدا المقيم.

لتمرن الثالث غير:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ف لالة لامعومة فحي لامجال $]0; +\infty[$ كمال :}$$

(C) تتخذ هالبئة ف لامتوي للنسوب لى عى يوعليد ومتجا ط (O; i, j). ان حج 5cm

I- لالدلة لامعوبة لى لامج ال [0; +∞[: $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$

1. ب. أ. ي. أج كم x ي [0; +∞[: $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$

2. ادرس لباراة (x) 'g حسب ق م x.

3. لشكل جدولتغرات الدلة g.

4. بر من أن لامةالة (x) = 0 وتقبل حال وح دا α ح ت : 0,5 < α < 0,6.

5. حدد لباراة g(x).

II- 1. أ. بين أنه، من أجل عدد حقيقي x من المجال [0; +∞[: f'(x) = g(x)

ب. استنتج إتجاه تغيّر الدالة f على المجال [0; +∞[.

2. أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ ؛ يمكن وضع $t = \frac{1}{x^2}$

ب. استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أب ن له كلكستلة f(x) لى لشكل $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ج. ادرس قبليّة تيقاق لادلة f عند 0.

4. ن لى جدولتغرات لادلة f ثم ارس م (C). ن أخذ f(α) = 0,8.

الحل ☺

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) تتخذ هالبئة ف لامتوي للنسوب لى عى يوعليد ومتجا ط (O; i, j). ان حج 5cm

I- لالدلة لامعوبة لى لامج ال [0; +∞[: $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$

ب. أ. ي. أج كم x م ه [0; +∞[: $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2x}{x^4} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2}{x(x^2 + 1)} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$



$$= \frac{-2(x^2+1)}{x(x^2+1)^2} + \frac{4x^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$

2. دراسة إشارة $g'(x)$ حسب قيم x .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، وفيه إشارة $x(x^2+1)^2 > 0$ ، ونفس إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $x^2 - 1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

3. جدول تغيرات لدالة g .

x	0	α	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$\ln 2 - 1$	0

4. يتبين أن لعمالة $(x) = 0$ يتحقق بل حل وحداً α حيث: $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. بتحدد إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

II-1. أثبتين أنه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{\frac{-2x}{x^4}}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot x$$

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{x^2+1} \cdot x = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; \alpha[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

نضع $t = \frac{1}{x^2}$ إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإن t يؤول إلى 0.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \text{ ومنه } .$$

ب. استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 1 \text{ لدينا } .$$

3. أتب أن أنه مك كستبة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = x (\ln(x^2 + 1) - \ln x^2) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$$

ب. حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ لئنا } .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x = 0 \text{ إذن } .$$

ج. دسلة قاب التشتق الالة f عند 0.

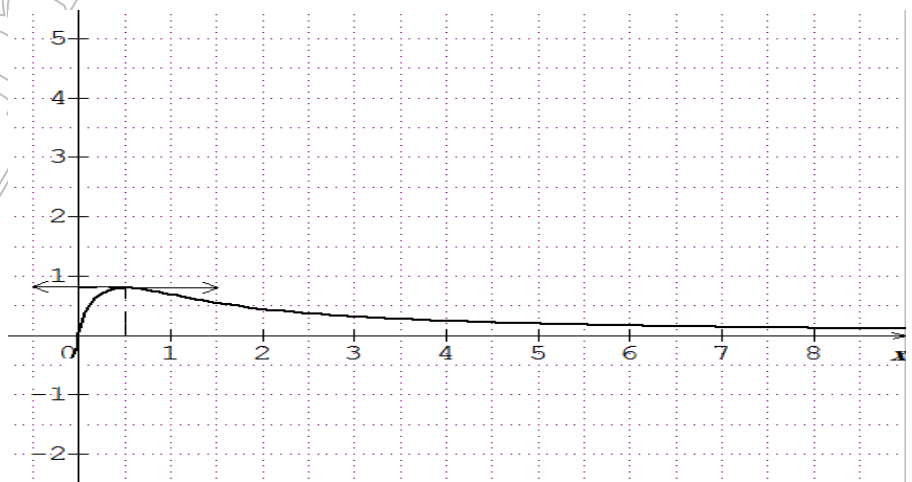
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

إذن لالة f قابل التشتق الالة 0.

4. جدول تغرات لدلة f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

رسم (C).



$$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

بشارة $g'(x)$ هـ من نفس بشارة $2x+1$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	3
$g'(x)$	-	0	+

ننتج لهذا أن الدالة g متناقصة تمام على المجال $]-1; -\frac{1}{2}]$ و متزايدة تمام على المجال $]-\frac{1}{2}; 3]$.

جدول تغيرات لدالة g .

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$		$-2\ln 2 + 1$	$4\ln 2 - \frac{3}{4}$	

42. نأني لمدالية: $(x)=0$ يتقبل حلن أحد دما معدوم والآخر α حقق $-0,8 < \alpha < -0,7$.

لدالة g متدرة متناقصة تمام على المجال $]-1; -\frac{1}{2}]$ و متأخذ قما ف المجال $[-2\ln 2 + 1; +\infty[$ و

$0 \in [-2\ln 2 + 1; +\infty[$ إذن لمدالية $(x)=0$ يتقبل حال وحدا β ف المجال $]-1; -\frac{1}{2}]$ وكلئ كلئنا الدالة g

متدرة متزايدة تمام على المجال $]-\frac{1}{2}; 3]$ و تأخذ قما ف المجال $[-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}]$ و

$0 \in [-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}]$ إذن لمدالية $(x)=0$ يتقبل حال وحدا β ف المجال $]-\frac{1}{2}; 3]$. و دما أن

$$g(0) = 2\ln(0+1) - \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{فإن } \beta = 0 \text{ ليئنا } g(-0,8) \approx 0,8 \text{ و } g(-0,7) \approx -0,8 \text{ أي}$$

$$-0,8 < \alpha < -0,7 \text{ و في } g(-0,8) \times g(-0,7) < 0$$

43. ن، من بقاء x إشارة $g(x)$.

x	-1	α	0	3
$g(x)$	+	0	-	+

4. h هـ لدالة لمدعية على المجال $]-1; 3]$:- $h(x) = [g(x)]^2$.

أ) من باب $h'(x)$ بالادلة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

$$h'(x) = 2g'(x) \times g(x)$$



باعتن إشارة $h'(x)$.

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g(x)$	+	-	0	0	+
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$h'(x)$	-	+	0	-	+

الدالة h متزايدة قداما في كل من $[\alpha; -\frac{1}{2}]$ و $[0; 3]$ وناقصة قداما في كل من $]-1; \alpha]$ و $]-\frac{1}{2}; 0]$.

جدول تغيرات لدالة h .

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$	0	$(-2\ln 2 + 1)^2$	0	$h(3)$

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}, x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

(C_f) تمثل هالبين فلاميتوي للنسوب الى عي يوعلي و متجا ط $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

اثبت ه أن لدلح يتق بالشتقاق عالصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{ألن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = 1$$

إذن لدالة f تتقبل الاشتقاق ععد 0.

كتلبة معادلة ل- (T) مماس (C_f) ف لائق ط ذاتلفطلة 0.

$$(T): y = x \quad \text{و} \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$$

من أجل $x \in]-1; 0[\cup]0; 3]$ ، لدن:

$$f'(x) = \frac{2x \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \cdot x^2}{(\ln(x+1))^2} = \frac{x \left[2 \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right]}{(\ln(x+1))^2} = \frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

x	-1	α	0	3
$g(x)$	$+$	0	$-$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$

ب) تب ن آن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha + 1)$

$$f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1) \text{ يـ } \frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha} = 2\alpha(\alpha+1) \text{ وـ}$$

$-0,8 < \alpha < -0,7$ عن اه $-1,6 < 2\alpha < -1,4$ وقافى (1) $1,4 < -2\alpha < 1,6$

إن $0,28 < -2\alpha(\alpha+1) < 0,48$ وفيه $-0,48 < 2\alpha(\alpha+1) < -0,28$ أي $-0,48 < f(\alpha) < -0,28$.

$$f(3) = \frac{3^2}{\ln(3+1)} = \frac{9}{\ln 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \quad \text{أذن} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\ln(x+1)} = 0$$

x	-1	α	3
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$\frac{9}{\ln 4}$

$u(x) = x - \ln(x+1)$ نضع

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;3[$ لدينا : $u'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

بثيرة $u'(x)$ هَنَفْس بثيرة x .

من أجل $]-1;0[$ ، $u'(x) < 0$ ومن أجل $]0;3[$ ، $u'(x) > 0$



إذن الدالة بتفصاقص قمارن لغوى لالمجال $[-1; 0]$ ومترادق قمارن لغوى لالمجال $[0; 3]$ لها قمة حدية صغرى لغوى لالمجال $[-1; 3]$ وه $u(0) = 0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; 3]$ ، $u(x) \geq 0$ أي $x - \ln(x+1) \geq 0$.
 ب) دزليح ضعج (C_f) قسثحن ان مماس (T) .

$$f(x) - x = \frac{x^2}{\ln(x+1)} - x = \frac{x^2 - x \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \frac{x(x - \ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$$x > 0 \text{ أي } x+1 > 1 \text{ فكافئ } \ln(x+1) > 0$$

$$-1 < x < 0 \text{ أي } 0 < x+1 < 1 \text{ فكافئ } \ln(x+1) < 0$$

x	-1	0	3
x	-	0	+
$u(x)$	+	0	+
$\ln(x+1)$	-	0	+
$f(x) - x$	+	0	+
لضعج	(C_f) ق (T) (T) ممس (C_f) ف اللقطة O		

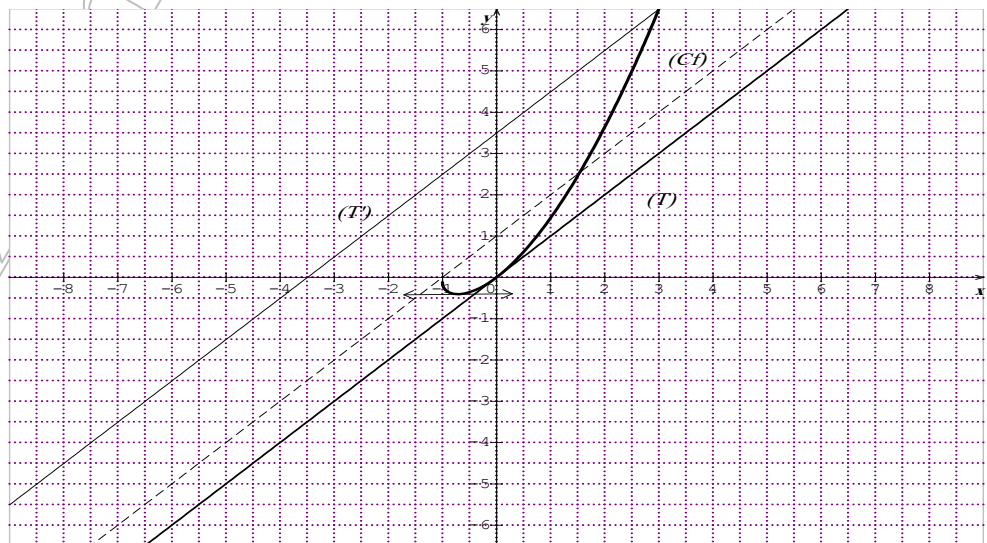
4ت ع ه مهن حن همتقم (T') انماش ن- (T) ان ريتق اطع مع (C_f) فنطوطح ذاخن لصلح 3.

يعانح لعمى (T') يلكم $y = x + b$ و اأ زم اطع مع (C_f) لوطح ذاخن لصلح 3 فش م لموطح

$$A\left(3; \frac{9}{\ln 4}\right) \text{ إذ } \frac{9}{\ln 4} = 3 + b \text{ وي } b = \frac{9}{\ln 4} - 3$$

$$\text{وعه يعانح لعمى } (T') \text{ } y = x + \frac{9}{2\ln 2} - 3$$

5- نس (T) ، (T') ، (C_f) .



6- مل مقيس ح و ا، من قى م ل س ط ل ق ق m ، عدد حه ل أن م ل ح : $f(x) = x + m$.
لحول ل المعالية إن و ج د ت ه فوصل ل ل ق ط ل ل ش ت ر ك ب ن (C_f) و ل م ي ق م ذ ي ل م ع ال ية $y = x + m$.

إذا كان $m < 0$ أو $m > \frac{9}{2\ln 2} - 3$ فإن ل المعالية ل ق ت ب ل ح ال.

إذا كان $m = 0$ فإن ل المعالية ل ه ح ال و ا ح م ط ض ا ع ف ا.

إذا كان $0 < m < 1$ فإن ل المعالية ل ه ح ال ن م ط ب ا ن.

إذا كان $m \leq \frac{9}{2\ln 2} - 3$ فإن ل المعالية ل ه ح ال و ح د.

ل ت م ر ن ال خ ا م س ع ن ر

f دلالة م ع و ق ب: $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ و (C) ل ت م ث ل ه ال ب ل ل ف م ل م ن ب ع ا م و م ت ج ل س.

1. أ ب ن ل ه م ن أ ج ل ك ل x م ن $\mathbb{R}$ ك $x + e^{-x} \geq 1$.

ب - ل ي ت ب ج أن f م ع و ق ل ع ل $\mathbb{R}$.

2. أ - ذ م ك ي ص ح ل ع ي ا خ ل ل ح :

- ي أ ج م ك م x ي $\mathbb{R}$ ن د $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$.

- ي أ ج م ك م $x > 0$ ن د $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$.

ب - ع ن ن ه ا ت ل دلالة f ع د $+\infty$ و $-\infty$.

ج - ل ي ت ب ج م ن ل س و ل ل س ي ل ق أن ل م ي ق م (d) ذ ال م ع ال ية $y = -x$ ق ا ر ب ل ل ل - (C) و ج و ا ر $-\infty$.

3. م ا ه ن ه ا ة $[f(x) - \ln x]$ ع د $+\infty$ ؛ م ا ذ ل ت ب ج ؟

4. ا د ر س ت ع ر ا ت ل دلالة f و ش ر ك ل ج د و ل ت ع ر ك ه ا.

5. ا ر س م (d) ، (C) و (Γ) ح ت (Γ) ل ت م ث ل ل ب ل ل ل دلالة $x \mapsto \ln x$.

ال حل:

f دلالة م ع و ق ب: $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ و (C) ل ت م ث ل ه ال ب ل ل ف م ل م ن ب ع ا م و م ت ج ل س.

1. أ ب ن ل ه م ن أ ج ل ك ل x م ن $\mathbb{R}$ ك $x + e^{-x} \geq 1$.

ن ص ع $g(x) = x + e^{-x}$

ل دلالة و ق ت ب ل ا ل ش ي ق ل ع ل $\mathbb{R}$ ل ن ا : $g'(x) = 1 - e^{-x}$.

$g'(x) = 0$ ي غ ا $1 - e^{-x} = 0$ ل ف ا ف ي $e^{-x} = 1$ أ $x = 0$

$g'(x) > 0$ ي غ ا $1 - e^{-x} > 0$ ل ف ا ف ي $e^{-x} < 1$ ل ف ا ف ي $-x < 0$ أ $x > 0$

$g'(x) < 0$ ي غ ا $1 - e^{-x} < 0$ ل ف ا ف ي $e^{-x} > 1$ ل ف ا ف ي $-x > 0$ أ $x < 0$.

إ ذ ل د ل ح g ي و ا ل ص ح ذ ي ا ع ل ج ا ل $[-\infty; 0]$ و م ت ر ا ج ذ ي ا ع ل ج ا ل $[0; +\infty[$ ف ال ح ج د خ ص غ س و °

$g(0) = 1$ و ع ا ي أ ج م ك م ع د ح م م x^- $g(x) \geq 1$ أ $x + e^{-x} \geq 1$.

ب - ل ي ت ب ج أن f م ع و ق ل ع ل $\mathbb{R}$.

ن د x^- ي أ ج م ك م ع د ح م م x^- $x + e^{-x} \geq 1$ و ي $x + e^{-x} > 0$ إ ذ ل د ل ح f م ع و ق ل ع ل $\mathbb{R}$.



2. أ- لتحقق م صرح لمدع م داخ لتتحل :

- ي أج مك م x ي $\mathbb{R}$ ند $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$.

$$f(x) = \ln(x + e^{-x}) = \ln e^{-x} (xe^x + 1) = \ln e^{-x} + \ln(xe^x + 1) = -x + \ln(xe^x + 1)$$

- ي أج مك م $x > 0$ ند $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$.

$$f(x) - \ln x = \ln(x + e^{-x}) - \ln x = \ln\left(\frac{x + e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

بتع ن نه أات الدالة f عدد $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ ألن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \ln(xe^x + 1) = +\infty$$

ج- ليتتاج من لسؤال ليليق أن لمتيق م (d) ذالام عدلة $y = -x$ مقارب اهل ل- (C) بجوار $-\infty$.

$$\text{لئنا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x + 1) = 0 \text{ وفيه لمتيق م (d) قارب طلل- (C) بجوار } -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = 1 \text{ ألن } 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$$

4. درلستغرات لدلة f .

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}; \text{ لئنا من أجل كل عدد حقي } x, x + e^{-x} > 0 \text{ وفيه تبارة دنفس تبارة } 1 - e^{-x}.$$

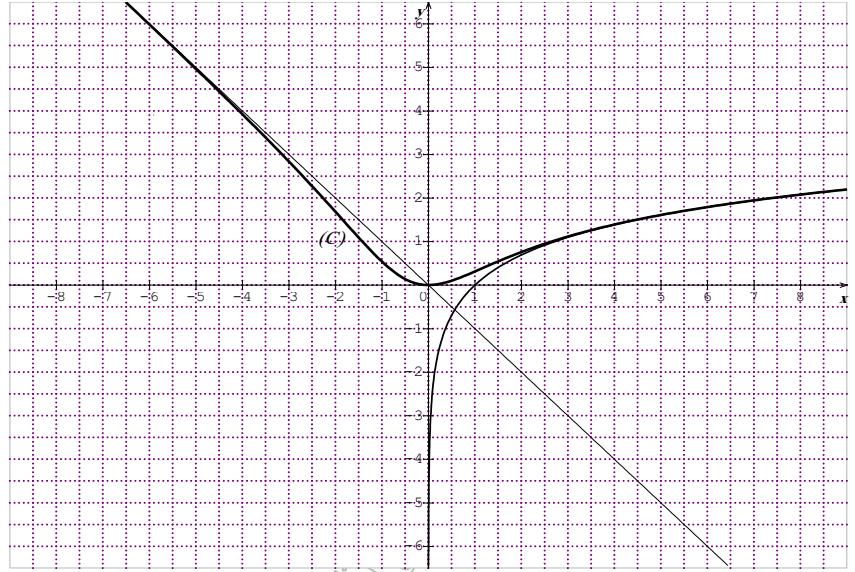
$$x > 0 \text{ فكافئ } f'(x) > 0$$

$$x < 0 \text{ فكافئ } f'(x) < 0$$

إذلحلح f عدا الصرح ذلي ع ك جال $]-\infty; 0]$ و متزانج ذلي ع ك جال $[0; +\infty[$.جدولتغرات لدلة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

5. رسم (d)، (C) و (Γ) حث (Γ) التمثيل البان لدلة $x \mapsto \ln x$.



التمرين السادس عشر

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ (بالعارة): $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1- ادرسات جامتغر الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

2- مبّن أنّ لدمعالية $x=0$ وقبيل حال وحّدّا α حث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.

3- ملنت ججسب قّم x لئارة $g(x)$.

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ (بالعارة): $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) فيجى f لمتوي للنفس وبلى لدمعالم النعاجم لئان س $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احجب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2- نثبت لّه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

3- ادرسات جامتغر الدالة f مثشلك جدولتغر رثها.

4- مبّن أنّ: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$ مثم ملنت ججسب لئان س $f(\alpha)$.

5- نّال لفيجى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III- (Γ) لفيجى لدمعالم للدالة h لدمعالية على المجال $]-1; +\infty[$ (بالعارة): $h(x) = \ln(x+1)$.

A للقطة ذات الإحداثيتن $(-1; 2)$ و M لبقطة من (Γ) فطرتها x .

1- نثبت أنّ لئارة AM تعطى بالعارة $AM = \sqrt{f(x)}$.

2- لالدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ (بالعارة): $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أبّن أنّ للدلتن k و f نفس لئارة لئارة على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- عّن إحداثيتن للقطة B من (Γ) مبحثتكون لئارة AM لئان س ما لئان.

ج- مبّن أنّ: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

الحل

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ [بالعبارة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1- دراسة متغير للدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

الدالة g تقبل على الشئاق على $]-1; +\infty[$ ولذا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $x+1 > 0$ و $\frac{1}{x+1} > 0$ وفيه $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تمام على $]-1; +\infty[$.

2- تبين أن لمعادلة $g(x) = 0$ يتحقق بل حل وحيد α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.

الدالة g متزايدة على $]-1; +\infty[$ [التي تقبل الشئاق على $]-1; +\infty[$ وه متزايدة تمام على هذا المجال و خاصة على المجال $[0,31; 0,32]$ ولذا $g(0,31) \approx -0,01$ ، $g(0,32) \approx 0,02$ أي $g(0,32) \times g(0,31) < 0$ ومنه يجب مبرقة القاطعة وسطية وجد عدد حقيقي α من المجال $]0,31; 0,32[$ [بحيث $g(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \text{ عناه } \ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2 \text{ أي } (\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0$$

3- استنتاج، حسب م x إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-1; \alpha[$ لدينا $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$

ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ لدينا $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = 0$

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ [بالعبارة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) في جزي f لا يتوي للنفس وبلى للمجموع المتعامد للتمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty \text{ وفيه } \lim_{x \rightarrow -1} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

2- حسبات f' ، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

الدالة f' تقبل الشئاق على $]-1; +\infty[$ ولذا:

$$f'(x) = 2(x+1) + 2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2 - \ln(x+1)) = 2(x+1) - \frac{2(2 - \ln(x+1))}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 - 2(2 - \ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$



3- درسة نتج امتغر لدلة f .

من أجل كل x من المجلال $]-1; +\infty[$ ، $\frac{2}{x+1} > 0$ وفيه بئارة $f'(x)$ ه منفس بئارة $g(x)$.

أي f' سالبة غي $]-1; \alpha[$ وموجبة غي $[\alpha; +\infty[$

نتنتج لكذا أن لدلة f فتقصر قداما غي $]-1; \alpha[$ ومتزاد قداما غي $[\alpha; +\infty[$.

جدولتغرات لدلة f .

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

متبَّن أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$

لئنا $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (2 - \ln(\alpha+1))^2 = (\alpha+1)^2 + (2 - (2 - (\alpha+1)^2))^2$

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)^4 = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$$

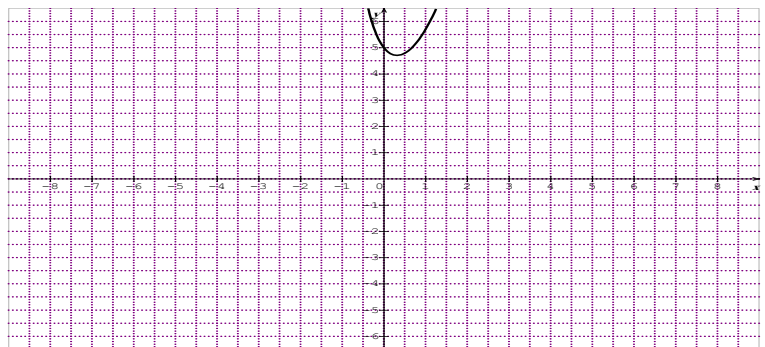
استنتج نتج حص رلال عدد $f(\alpha)$.

$0,31 < \alpha < 0,32$ عن ه $1,31 < \alpha+1 < 1,32$ ، كافي $1,7424 < (\alpha+1)^2 < 1,7161$ كافي

$2,7161 < 1 + (\alpha+1)^2 < 2,7424$ وفيه $1,7424 \times 2,7424 < (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2) < 1,7161 \times 2,7161$ أي

$$4,6611 < f(\alpha) < 4,7789$$

كتمثل للمحن (C_f) على المجلال $]-1; 2]$.



III- (Γ) لافحنى لامثيل للدلة h لامعرة غي المجلال $]-1; +\infty[$ بلاءارة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A للقطعة ذات الإحداثيتن $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فطريته ه x .

1- احبابات أن لمرفدة AM تعطى بلاءارة $AM = \sqrt{f(x)}$.

لئنا $M(x; \ln(x+1))$ وفيه

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (\ln(x+1) - 2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$$

www.dzexams.com

الحل:

I- ندرس لدلح g لثي يفتح ع $\mathbb{R}^+$ تلغ انج: $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = +\infty \text{ وفيه } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ وفيه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$$

2- دريس نكج استغور لدلة g

لدلة وقبيل الاشتقاق في $\mathbb{R}$ لي دن من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1-e^x+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{(1+e^x)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ ، ولذل لدلة وتناقص قتمام في $\mathbb{R}$.

جدولتغرات لدلة g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	0

3- لس تنبع إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

نالحظ من جدول تغرات لدلة g أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

II- ندرس لدلح f لثي يفتح ع $\mathbb{R}^+$ تلغ انج: $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

نضع $t = \frac{1}{e^x}$ في هذا $e^x = \frac{1}{t}$ إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإن t يؤول إلى 0 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

$$f(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) = e^x \ln(e^{-x}(e^x+1)) = e^x [-x + \ln(e^x+1)] = -xe^x + e^x \ln(e^x+1)$$

- لننتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x + e^x \ln(e^x+1) = 0 \text{ وفيه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x+1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = 0$$

3- دريس نكج استغور لدلة f .

$$f'(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) - \left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)e^x = e^x \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}} = g(x)$$

لذنا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$ وفيه $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة ماما على $\mathbb{R}$.
جدولت غرات الدالة f .

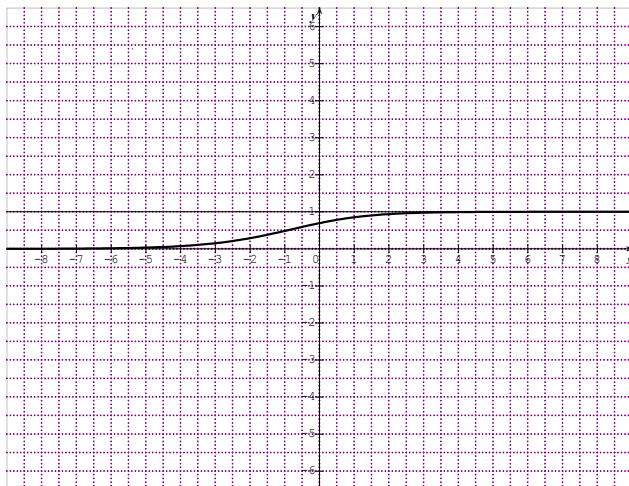
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	0	1

استنتج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بولسطة الدالة f .

لدلح f في عسج وفتح ذلي ع $\mathbb{R}$ ند $1; 2[$ $f(]-\infty; +\infty[) =]1; 2[$

استب أن ل معادلة: $(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حل وحدا α .

لدالة f متزادة متزايدة ماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها ف $1; 2[$ ل مع $\frac{1}{2} \in]1; 2[$ إذن ل مع $(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حل وحدا α .



5- رسم (C_f)

6- لفتش قبل أن، حسب بق لموسط لحقق m عدد حلول ل معادلة: $e^x \ln(1 + e^{-x}) - m = 0$.

$$e^x \ln(1 + e^{-x}) = m \quad \text{طغافئ} \quad x \ln(1 + e^{-x}) - m = 0$$

$$f(x) = m$$

إذاك $m \leq 0$ أو $m \geq 1$ فإل عانج ال فتم أ ح م.

إذاك $0 < m < 1$ فإل عانج حتم حل واحد.

نقدمس دانيشام دسجس

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}; & x \in]0; e[\cup]e; +\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

ع (C_f) ل ح ل ت من دلح f ل ع. ل ع ب ل ل ع ل ر ع ل و ان ر ج ا ط $(0, i, j)$
1) أت $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ لك وضع $t = \ln x$ (شئ أدرض اطوس ازخ لدلح f ع 0 ي ا ن.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \text{طغافئ عس ل ر ج} \quad \text{د ظا.}$$

$$2) \text{ أت } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \quad \text{طغافئ عس ل ر ج} \quad \text{د ظا.}$$



ب) اظہر جاذبہ ذغس لادلاح f وشك م جدول تغیر اذ آ .

اعطاف ط ه ذع

أ) تـ^٤ أ^٤ لـ^٤ لـ^٤ حـ^٤ g زوج حـ^٤.

ان حم 

www.dzexams.com

(3) لنثبت هـ أو مـ أخم كم عدد حقي قـ x حـث ، $f'(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^2} : x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x) + \frac{1}{x} \ln x}{(1-\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x + \ln x)}{(1-\ln x)^2} = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

بالنسبة لتأثيرات غس الخ حـ f

ي أج م كم $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ كـ $f'(x) > 0$ ونلاحظ أن $f'(x) > 0$ في $]0; e[$ و $]e; +\infty[$

خـلـت غـس الخ حـ f

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

4) كـشـتـح مـن حـن مـم اس (T) ثم حـي يـ (C_f) عـنـطـقـطـح ذـا خـن فـصـلـح 1.

$y = x - 1$ أي $y = 1(x - 1)$ ويـ $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

5) لنثبت هـ أو مـ أخم كم عدد حقي قـ x حـث ، $f''(x) = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3} : x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ثم لنبحث أن $f''(x) > 0$ في $]0; e[$ و $]e; +\infty[$

اوعط اف ط هـ قـت عـيـا .

تركيب: $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$

ي أج م $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ند :¹

$$f''(x) = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 + 2x \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-(1-\ln x)(1-\ln x - 2)}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

لنأخذ $f''(x) > 0$ فـ طـيـنـا جـ $1+\ln x > 0$ أو $x^2(1-\ln x)^3 > 0$ ي أج م كم $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$

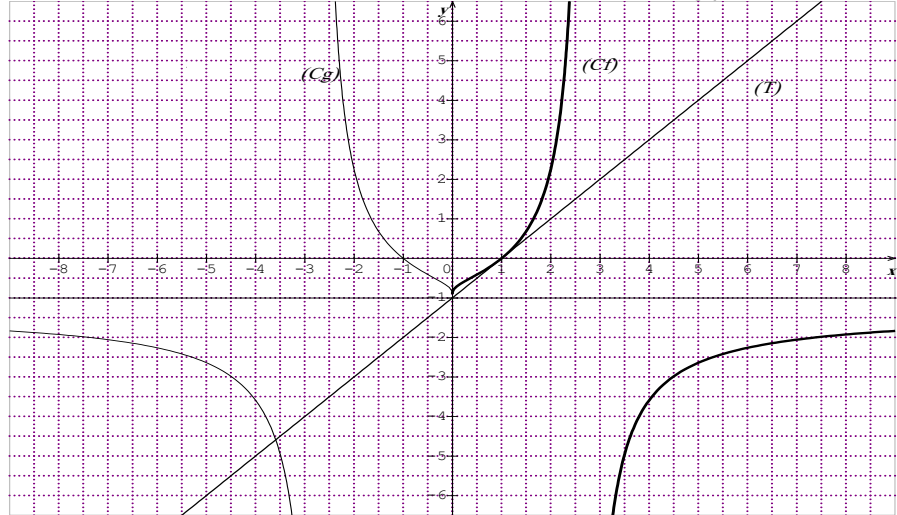
$f''(x) = 0$ دـعـ $1+\ln x = 0$ ونفـا فـي $\ln x = -1$ أي $x = \frac{1}{e}$

$f''(x) > 0$ دـعـ $1+\ln x > 0$ ونفـا فـي $\ln x > -1$ أي $x > \frac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$ دُعو عُدل عدد $\frac{1}{e}$ وتغير يئس ازداوي لُمطح ذاخ الإل حث $\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{2}\right)$ مطح إعطافنه ح (C_f) .

(6) حساب $f''(4)$ ثم ائسم $(C_f)'(T)$.



(7) رُغس لُدلح لعدد ح g هُئس فح عه $\mathbb{R} - \{-e; e\}$: $g(x) = f(|x|)$.

لُت ه أن لُدلح g ش خ.

ند D_g يُلُطس تُلُصحن 0

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

ت (شس ذكف بن حص لُعهى (C_g) او طلق ام ه (C_f) ثم ائسم (C_g) .

$$\begin{cases} g(x) = f(x); x \in [0; e[\cup]e; +\infty[\\ g(x) = f(-x); x \in]-\infty; -e[\cup]-e; 0] \end{cases}$$

ن $x \in [0; e[\cup]e; +\infty[$ ك (C_g) يُلُطس عه (C_f) ت لُدلح g زوج ف (C_g) ك يُلُطس

تُلُصحن نَح نراس ذة

ن تدمس دارتعل عشرين:

1- g دلالة معوّة لُغى لامجال $[1; +\infty[$ كم ائ $g(x) = 2x + \ln x$.

أ - ائس بن هالة لالدلة g عئدم اُول x لى $+\infty$.

ب - ادرسات جافتغُر لالدلة g .

ج - ب ن لّه، من أئل كل عدد حَق x من لامجال $[1; +\infty[$ ف ائ $g(x) \neq 0$

2- لئكن f دلالة معوّة لُغى لامجال $[1; +\infty[$ كم ائ $f(x) = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x}$

أ ب ن لّه لُكن لفتللة $f(x)$ لُغى لئلكل $f(x) = \frac{6 \ln x}{2 + \frac{\ln x}{x}}$ من أئل $x \in [1; +\infty[$.

ب - ائس ب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ماذلئنت ج ؟

ج- ادرسات جامتغز الدالة f .

د شكل جدول تغزرات الدالة f ، ماه ق م ل عدد لا غزق k بح شقيل ل مع الى $f(x) = k$ لحن نقام زن.

ه- جد مع الى ذلك ماس (Δ_1) لك فحن (C_f) غزق طه لك فطرته ها 1.

ح ث (C_f) رمز الى لتغزل البيل ل الدالة f ف ل لم فهم لتبع امد ولتبع ان س $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3- تبعر الدالة h ل مع غة غي ل م جال $[1; +\infty]$ بال معارة: $h(x) = f(e^x)$

و (C_h) لتغزل ها البيل ف ل لم فهم لابق

أ شكل جدول تغزرات الدالة h .

ب - جد مع الى ذلك ماس (Δ_2) لك فحن (C_h) غزق طه لك فطرته ها 1.

ج- ارس مكال من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) .

ان حم:

1- g دالة مع غة غي ل م جال $[1; +\infty]$ كم ال: $g(x) = 2x + \ln x$.

أ - جراب نه أة الدالة g عن دم اول x الى $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln x = +\infty$$

ب - درسة تك جامتغز لدلة g .

الدالة تقبل الشقاق غي $[1; +\infty]$ لذن $g'(x) = 2 + \frac{1}{x}$

من أجل كل x من ل م جال $[1; +\infty]$ ، $g'(x) > 0$ و لبتل ل الدالة g متزا دقت مام غي $[1; +\infty]$.

ج- تب زن ل ه، من أجل كل عدد حقق x من ل م جال $[1; +\infty]$ فن $g(x) \neq 0$

من أجل $x > 1$ لذن $g(x) > g(1)$ أي $g(x) > 2$ وفيه $g(x) \neq 0$

2- لتكن f دالة مع غة غي ل م جال $[1; +\infty]$ كم ال: $f(x) = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x}$

أ تب زن ل ه "مكن لتبلة $f(x)$ غي لشكل $f(x) = \frac{6 \frac{\ln x}{x}}{2 + \frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x \in [1; +\infty]$.

$$f(x) = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x} = \frac{x \left(\frac{6 \ln x}{x} \right)}{x \left(2 + \frac{\ln x}{x} \right)} = \frac{6 \frac{\ln x}{x}}{2 + \frac{\ln x}{x}}$$

ب - جراب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \frac{\ln x}{x}}{2 + \frac{\ln x}{x}} = 0 \text{ وفيه } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\ln x}{x} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ج- درسة تك جامتغز لدلة f .

الدالة تقبل الشقاق غي $[1; +\infty]$ لذن:

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{x}(2x + \ln x) - \left(2 + \frac{1}{x}\right)6 \ln x}{(2x + \ln x)^2} = \frac{12 + \frac{6 \ln x}{x} - 12 \ln x - \frac{6 \ln x}{x}}{(2x + \ln x)^2} = \frac{12(1 - \ln x)}{(2x + \ln x)^2}$$

$f'(x) = 0$ عناه $-\ln x = 0$ إكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$
 $f'(x) > 0$ عناه $-\ln x > 0$ إكافئ $\ln x < 1$ أي $1 < x < e$
 إذن الدالة f متزايدة متامة على $[1; e]$ متناقصة متامة على $[e; +\infty[$.
جدول تغيرات الدالة f .

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{6}{2e+1}$	0

نعني k لعدد حقيقي k بنحقيق بل الدالة $f(x) = k$ على $\mathbb{R}$.

للمعادلة $f(x) = k$ نقتبل حلين x_1 و x_2 من أجل k من المجال $]0; \frac{6}{2e+1}]$.

هـ - إيجاد معادل قديم Δ_1 لمنحن (C_f) عن نقطته التي فصلتها 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ وفيه } y = 3(x-1) \text{ أي } y = 3x - 3 \text{ } (\Delta_1)$$

3- تعبر الدالة h للمعوجة على المجال $[1; +\infty[$ بالعبارة: $h(x) = f(e^x)$

و (C_h) تمثلها البيكل f للمعوجة h .

أشترك جدول تغيرات الدالة h .

نالحظ أن الدالة h مركبة من الدالة الأسية f و $h = f \circ \exp$

لأن الدالة الأسية $\exp$ متزايدة متامة على $[1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في $[e; +\infty[$ والدالة f متناقصة متامة على $[e; +\infty[$ فإن تركبهما ذلك متناقصة متامة على $[1; +\infty[$ أي الدالة h متناقصة متامة على $[1; +\infty[$

$$\text{لذا } h(1) = f(e^1) = f(e) = \frac{6}{2e+1}$$

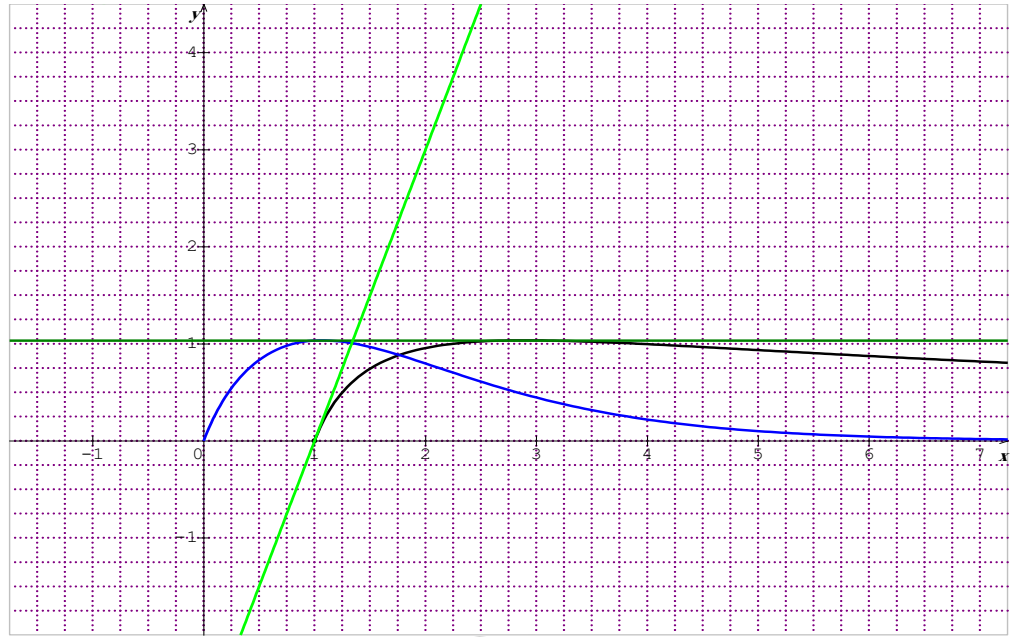
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

x	1	$+\infty$
$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$	0

ب - إيجاد معادل قديم Δ_2 لمنحن (C_h) عن نقطته التي فصلتها 1.

$$y = h'(1)(x-1) + h(1) \text{ وفيه } y = \frac{6}{2e+1} \text{ أي } y = \frac{6}{2e+1} \text{ } (\Delta_2)$$

ج - وسم كمال من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) .



aziz_mus1@hotmail.fr

