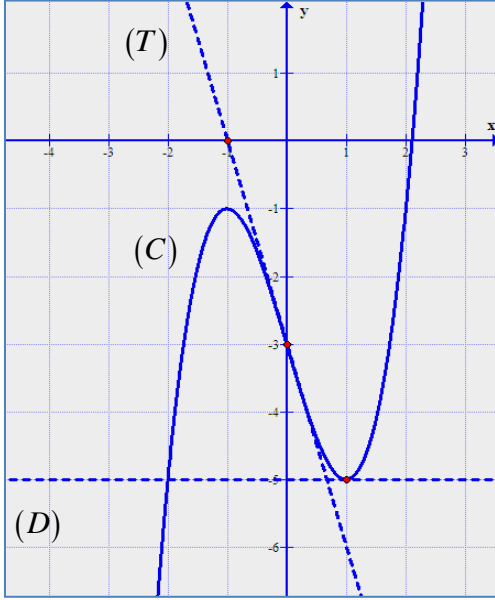


الجزء الأول :



g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية . (C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم . (D) ، و (T) هي المماسان للمنحنى (C) في النقطتين التي فاصلتهما 1 و 0 على الترتيب . (انظر الشكل)

1. بقراءة بيانية ، عين $g(0)$ ، $g'(1)$ و $g'(0)$ و $g''(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+5}{x-1}$.
2. عين معادلة لكل من (D) و (T) .
3. شكل جدول تغيرات الدالة g .
4. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-3$.

الجزء الثاني :

g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية . (C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم .

✦ عين a ، b و c علما أن (C) يقبل عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه -3 و يقبل عند النقطة ذات الفاصلة

1 مماسا موازيا لمحور الفواصل .

الجزء الثالث :

g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. احسب نهايات g عند حدود مجال تعريفها .

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3. عين معادلة (T) المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 0 ..

4. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $\alpha \in]2.1; 2.2[$

ثم عين حصرا لـ سعتة 0.01 بالاستعانة بالجدول المقابل .

5. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

6. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

x	$g(x)$
2.1	-0.039
2.11	0.0639
2.12	0.1682
2.13	0.2736
2.14	0.3803
2.15	0.4884

الجزء الرابع :

f الدالة المعرفة على المجموعة $\square - \{-1;1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها و فسر النتائج هندسيا .

2. أ. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $\square - \{-1;1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ج. عين ؛ دون حساب ؛ $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

3. بين أن $f(\alpha) = 3\alpha - 1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4. أ. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $\square - \{-1;1\}$ ؛ يكون : $f(x) = 2x - 1 + \frac{2x+3}{x^2-1}$.

ب. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x - 1$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

ج. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-1.2 < \beta < -1.1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

6. بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) (لا يطلب تعيين معادلتيهما) .

7. انشئ (Δ) و (C_f) .

8. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = |m|$.

9. u الدالة المعرفة على المجال $R - \{-1;1\}$ كما يلي : $u(x) = |f(x)|$ ، (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u .

⇨ اشرح كيفية انشاء (C_u) انطلاقا من (C_f) .

10. k الدالة المعرفة على المجال $R - \{0;2\}$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ (C_k) هو التمثيل البياني للدالة k .

⇨ اشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) .

الأستاذ بلجودي حمـو



بكالوريا 2023

تصحيح التمرين الشامل حول دراسة الدوال

الجزء الأول

1. بقراءة بيانية، عين $g(0)$ ، $g'(1)$ ، $g'(0)$ و $g''(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+5}{x-1}$.

$$g(0) = -3, \quad g'(1) = 0$$

عين $g'(0)$: هو معامل توجيه المماس (T) : $g'(0) = \frac{-3-0}{0-(-1)} = -3$

$g''(0)$: القيمة 0 هي فاصلة نقطة الانعطاف ، إذن $g''(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-(-5)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = g'(1) = 0$$

2. معادلة (D) : $y = g(1) = -5$

3. معادلة (T) : $y = g'(1)(x-0) + g(0)$ و منه $y = -3x - 3$

3. شكل جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
g(x)	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

4. باستعمال (C)، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-3$:

$$g(x) = ax^3 + bx + c, \quad g'(x) = 3ax^2 + b$$

$$g(0) = -3 \text{ ومنه } c = -3$$

$$g'(0) = -3 \text{ ومنه } b = -3$$

$$g'(1) = 0 \text{ ومنه } 3a + b = 0 \text{ ومنه } 3a - 3 = 0 \text{ ومنه } a = 1$$

الجزء الثاني

(C) يقبل عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه -3 معناه : $g(0) = -3$ و $g'(0) = -3$ و يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه $g'(1) = 0$.

$$g(x) = ax^3 + bx + c, \quad g'(x) = 3ax^2 + b$$

$$g(0) = -3 \text{ ومنه } c = -3$$

$$g'(0) = -3 \text{ ومنه } b = -3$$

$$g'(1) = 0 \text{ ومنه } 3a + b = 0 \text{ ومنه } 3a - 3 = 0 \text{ ومنه } a = 1$$

الجزء الثالث

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x - 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2. دراسة تغيرات الدالة g :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = 3x^2 - 3$.

المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلين هما $x = 1$ و $x = -1$. إشارة $g'(x)$ كما هو موضح في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$g'(x)$		+	0	-	0	+

الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$ و متناقصة تماماً على $[-1; 1]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

3. عين معادلة (T) المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 0 ..

$$y = -3x - 3 \text{ و منه } y = g'(1)(x - 0) + g(0)$$

4. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في R حلاً وحيداً:

لا توجد حلول للمعادلة $g(x) = 0$ في المجال $]-\infty; 1]$.
 f مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ ولدينا $g(1) = -5$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ نلاحظ أن $0 \in [-5; +\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلاً وحيداً α .

التحقق من أن: $2.1 < \alpha < 2.2$:

$$g(2.1) = -0.039 \text{ و } g(2.2) = 1.048 \text{ و منه } g(2.1) \times g(2.2) < 0 \text{ إذن } 2.1 < \alpha < 2.2$$

حصر α سعته 0.01

$$g(2.1) < 0 \text{ و } g(2.11) > 0 \text{ إذن } 2.1 < \alpha < 2.11$$

5. استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

6. تبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = 6x$.

f'' تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها أي $f''(x) > 0$ من أجل $x < 0$ و $f''(x) < 0$ من أجل $x > 0$ و $f(1) = -3$ إذن $A(0; -3)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

الجزء الرابع

f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 1}$

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ م.م عمودي لـ (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $x = 1$ م.م عمودي لـ (C_f) .

2. أ. التحقق أن :

$$f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

من أجل كل x من $R - \{-1; 1\}$ لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 2x)(x^2 - 1) - 2x(2x^3 - x^2 + 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 2x^3 + 2x - 4x^4 + 2x^3 - 8x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

ب. استنتاج اتجاه تغيرات f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$. نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$g(x)$		-	-	-	- 0	+
x		-	- 0	+	+	
$f'(x)$	+		+	0 -		- 0 +

f متزايدة تماماً على المجالات $]-\infty; -1]$ و $]-1; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجالين $]0; 1[$ و $]1; \alpha]$.

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$+\infty$	-4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
			$-\infty$	$-\infty$	$f(\alpha)$	

ج. تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{2\alpha \times g(\alpha)}{(\alpha^2 - 1)^2} = 0$:

تفسير النتيجة بيانياً منحنى الدالة f يقبل عند النقطة ذات α الفاصلة مماساً أفقياً.

3. تبين ان $f(a)=3a-1$

. أي نبين أن $f(\alpha) - (3\alpha - 1) = 0$

$$f(\alpha) - (3\alpha - 1) = \frac{2\alpha^3 - \alpha^2 + 4}{\alpha^2 - 1} - (3\alpha - 1) = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha + 3}{\alpha^2 - 1} = -\frac{\alpha^3 - 3\alpha - 3}{\alpha^2 - 1} = -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 - 1} = -\frac{0}{\alpha^2 - 1} = 0$$

اذن $f(\alpha) = 3\alpha - 1$

استنتج حصرا للعدد $f(a)$:

لدينا $2.1 < \alpha < 2.11$ ومنه $6.1 < 3\alpha < 6.11$ ومنه $5.1 < 3\alpha - 1 < 5.11$ أي $5.1 < f(\alpha) < 5.11$.

4.أ. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $\square - \{-1; 1\}$ ؛ يكون : $f(x) = 2x - 1 + \frac{2x+3}{x^2-1}$

$$2x - 1 + \frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{(2x-1)(x^2-1) + 2x+3}{x^2-1} = \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2-1} = f(x)$$

ب. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x - 1$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 + \frac{2x+3}{x^2-1} - (2x-1) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2-1} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x) - y$ أي إشارة $\frac{2x+3}{x^2-1}$. نلخص إشارة $f(x) - y$ والوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
x^2-1	+	+	0	+
$f(x)-y$	-	0	+	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت	(C_f) يقطع في $A(\frac{-3}{2}, -3)$	(C_f) فوق	(C_f) فوق
	(Δ)	(Δ)	(Δ)	(Δ)

5. تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا :

• f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ و من ثم على المجال $[-1.2; -1.1]$:

و لدينا : $f(-1.1) = 1.609 > 0$ و $f(-1.2) = -1.03 < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $[-1.2; -1.1]$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا :

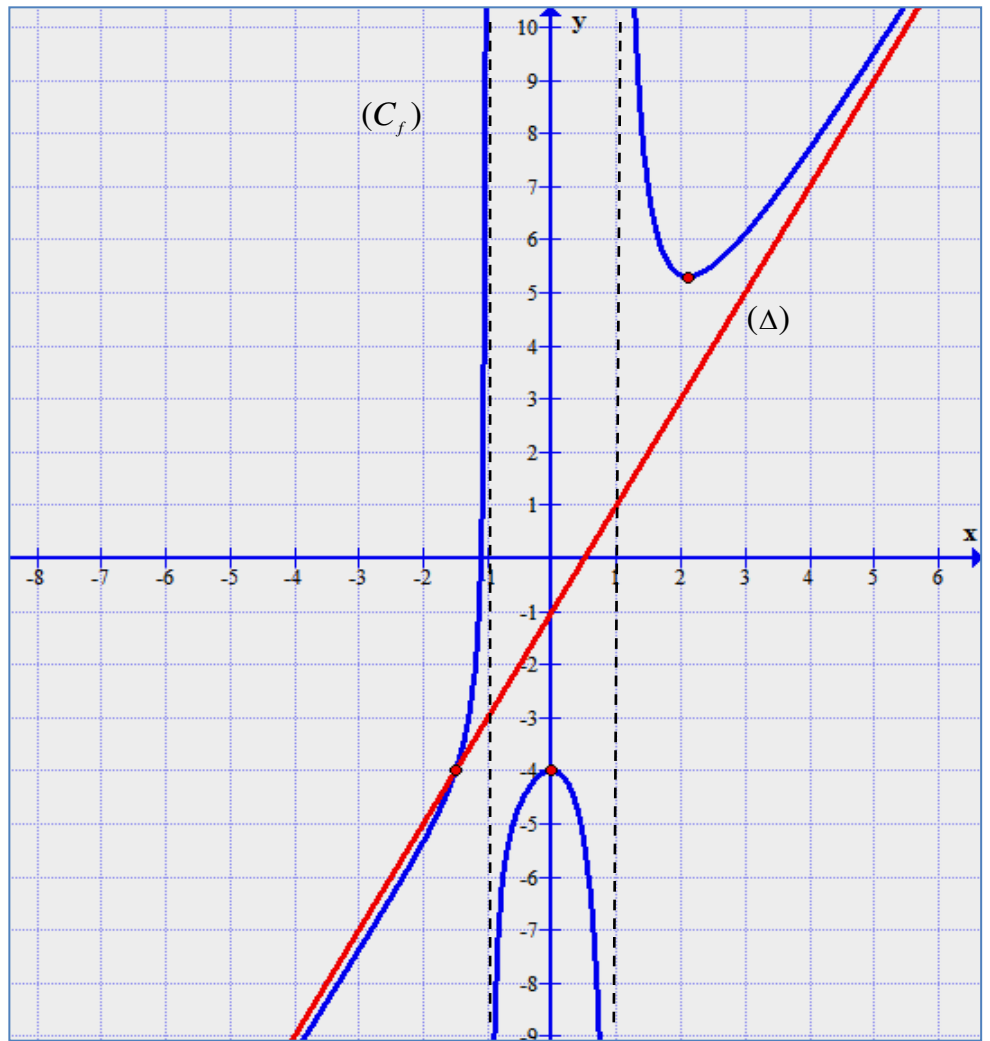
B هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

6. بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) (لا يطلب تعيين معادلتيهما) .

$$f'(x) = 2 \text{ معناه } \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2-1)^2} = 2 \text{ ومنه } \frac{x^4 - 3x^2 - 3x}{(x^2-1)^2} = 1 \text{ ومنه } x^4 - 3x^2 - 3x = (x^2-1)^2 \text{ ومنه } x^4 - 3x^2 - 3x = (x^2-1)^2$$

$x^2 + 3x + 1 = 0$ لهذه المعادلة حلان متمايزان ، اذن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ)

7. انشاء (Δ) و المنحنى



8. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=ImI$

- إذا كان $|m| \in [0; f(\alpha)]$ أي أن $m \in [-f(\alpha); f(\alpha)]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
 - إذا كان $|m| = f(\alpha)$ أي أن $m = f(\alpha)$ أو $m = -f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا و حلا سالبا .
 - إذا كان $|m| \in]f(\alpha); +\infty[$ أي أن $m \in]-\infty; -f(\alpha)] \cup [f(\alpha); +\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين و حلا سالبا .
9. الدالة المعرفة على المجال $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $u(x) = |f(x)|$ (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u .

↔ انشاء (C_u) انطلاقا من (C_f) :

- يكون (C_u) منطبقا على (C_f) في المجالات التي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل .
 - يكون (C_u) منظر لـ (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه (C_f) تحت محور الفواصل .
10. k الدالة المعرفة على المجال $R - \{0; 2\}$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ (C_k) هو التمثيل البياني للدالة k .

↔ اشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) :

- من الشكل $k(x) = f(x-1) + 2$ مع $a = -1$ و $b = 2$.
- إن (C_k) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1; -2)$.

وفقكم الله فى بكالوريا 2023