

***: تمثل درجة الصعوبة**

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد

الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ والمعرف بـ:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

مبرهنة 1: إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إحداثيات

$\vec{u}$ هي (x, y) وكانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x', y') فإن:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

مبرهنة 2: القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

التمرين رقم 01 *

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث

$AB = AC = BC = 3$ و لتكن النقط A' ، B' و C'

منتصفات القطع

المستقيمة $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.

أحسب الجداءات السلمية الآتية بطريقتين مختلفتين:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ، $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$ ، $\vec{CC'} \cdot \vec{AB}$ و $\vec{A'B'} \cdot \vec{AB}$.

التمرين رقم 02 *

ABCD مربع طول ضلعه a . I و J هما النقطتان المعرفتان

بـ: $\vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ و $\vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CD}$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

$\vec{BI} \cdot \vec{BC}$ ، $\vec{BI} \cdot \vec{CJ}$ و $\vec{AB} \cdot \vec{CJ}$

بكتابة $\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI}$ و $\vec{BJ} = \vec{BC} + \vec{CJ}$ أثبت

أن $\vec{AI} \cdot \vec{BJ} = 0$. ماذا تستنتج ؟

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و كان $\vec{v'}$

المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'}$$

التمرين رقم 03 **

أصحح أم خاطئ .

1 الجداء السلمي لشعاعين هو عدد حقيقي موجب .

2 إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين مرتبطين خطيا فإن :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

3 من أجل كل شعاع $\vec{u}$ ، $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ إذن $\vec{u} = \|\vec{u}\|$

4 إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ فإن $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$.

5 إذا كان $\|\vec{u}\| = 1$ ، $\|\vec{v}\| = 2$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ فإن

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

6 إذا كان $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ ، $\|\vec{v}\| = 1$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$ فإن

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4$$

7 من أجل كل الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ،

$$(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{v} \cdot \vec{w}$$

8 من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ،

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

9 إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ فإن $\vec{v} = \vec{w}$.

10 إذا علمنا أن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2$ فإن ABC مثلث

متساوي الساقين رأسه A .

11 A نقطة و $\vec{u}$ شعاع غير معدوم. مجموعة النقط M

حيث $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$ هي مستقيم .

12 في معلم متعامد ومتجانس، معادلة الدائرة ذات المركز

$A(1;2)$ ونصف القطر 2 هي

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

13 $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right)$

14 من أجل كل عدد حقيقي x ، $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

15 إذا كان $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن $\|\vec{u}\| = 3$.

16 إذا كان $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$.

17 إذا كان $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ فإن $\vec{u} \perp \vec{v}$.

التمرين رقم 04 *

أ و B نقطتان من المستوى . مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي :

أ) محور القطعة [AB] .
 ب) الدائرة ذات القطر [AB] .
 ج) المستقيم (AB) .

التمرين رقم 05 *

ABCD مربع حيث $AB = 6$ و I نقطة تقاطع قطريه .
 احسب الجداءات السلمية التالية:
 $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BI}$ ، $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$

التمرين رقم 06 **

ABC مثلث حيث $AB = 2$ و $AC = 3$
 و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

هل هذا المثلث قائم في A ؟ علل .

التمرين رقم 07 **

ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B و ACD مثلث متقايس الأضلاع . علما أن $AC = 6$

1) احسب الجداءات السلمية

التالية $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ،

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$

2) احسب DH حيث H

هو المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ و استنتج قيمة

$\cos DCB$

تعريف: القول أن الشعاع غير المعلوم $\vec{n}$ شعاع

ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ (D)

-

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس يكون لكل

مستقيم حيث الشعاع غير المعلوم $\vec{n}(a,b)$ شعاع

ناظمي له معادلة من الشكل:

$ax + by + c = 0$ حيث c عدد حقيقي.

التمرين رقم 08 **

عين معادلة ديكارتية للمستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية:

أ) (D) يشمل $A(2;-1)$ و $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ شعاع ناظمي له .

ب) (D) يشمل $A(-\sqrt{2};1)$ و عمودي على المستقيم (BC) حيث $B(-2;1)$ و $C(5;2)$

ج) (D) يشمل O و عمودي على المستقيم الذي

معادلته $2x + 3y - 6 = 0$

التمرين رقم 09 **

D_1 و D_2 مستقيمان معادلتهما على الترتيب:

$y = -\frac{1x+3}{2}$ و $y = 2x+1$

1) عين شعاعا ناظميا $\vec{n}_1 \perp D_1$ و شعاعا ناظميا $\vec{n}_2 \perp D_2$

2) احسب $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$

3) ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين D_1 و D_2 ؟

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C)

التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ و نصف قطرها $r (r > 0)$ هي:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

الدائرة التي قطرها [AB] هي مجموعة النقط M حيث

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

التمرين رقم 10 **

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس.

1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2,1)$

و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها [AB] علما

أن $A(-2,-1)$ و $B(-3,2)$.

3. بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

مركزها و نصف قطرها .

هل (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = 0$$

أ) التمرين رقم 11 **

A و B نقطتان احداثيهما على الترتيب $(-3; 2)$ و $(2; 0)$.

(1) عين معادلة الدائرة التي قطرها $[AB]$.

(2) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في النقطة B

التمرين رقم 12 **

لتكن النقط $A(1; 3)$ ، $B(3; 0)$ و $C(-5; -1)$.

(1) بين أن المثلث ABC قائم.

(2) عين معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC .

(3) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في A .

التمرين رقم 13 ***

لتكن $A\left(0; \frac{9}{2}\right)$ و (D) المستقيم الذي معادلته

$$4x + 3y - 1 = 0$$

(1) عين معادلة المستقيم Δ العمودي على (D) و الذي

يشمل A .

(2) عين احداثي نقطة تقاطع Δ و (D) .

(3) استنتج المسافة بين A و (D) .

مبرهنة: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة

$[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

قاعدة المساحة

مبرهنة: ABC مثلث حيث $BC = a$ ، $AC = b$ ، $AB = c$

و S مساحة المثلث ABC . لدينا العلاقات التالية:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (3)$$

التمرين رقم 14 ***

ABC مثلث حيث: $BC = 8$ ، $B = 50^\circ$ و $C = 70^\circ$.

1. أحسب A .

أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2}

التمرين رقم 15 **

عين في كل حالة من الحالات التالية معادلة للدائرة (C)

أ) (C) مركزها $A(-1; 2)$ و نصف قطرها $R = 3$.

ب) (C) تشمل النقطة $A(4; 1)$ ومركزها $B(2; 3)$.

ج) (C) قطرها $[AB]$ حيث $A(2; 1)$ و $B(4; -1)$

التمرين رقم 16 **

(E) مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 23 = 0$$

ما هي طبيعة المجموعة (E) ؟ أعط عناصرها المميزة

التمرين رقم 17 **

$ABCD$ مستطيل و M نقطة كيفية من المستوي .

$$MD^2 + MC^2 = MA^2 + MB^2$$

التمرين رقم 18 ***

ABC مثلث و d مستقيم يشمل A . B' المسقط العمودي لـ B على

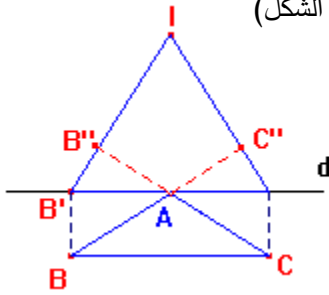
d . C' المسقط العمودي لـ C على d . B'' المسقط

العمودي لـ B' على (AC)

C'' المسقط العمودي لـ C' على (AB)

نفرض أن المستقيمين $(B'B'')$ و $(C'C'')$ يتقاطعان

في I . (انظر الشكل)



(1) بين أن :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} \quad (أ)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB'} \quad (ب)$$

(2) استنتج أن المستقيمين (AI) و (BC) متعامدان

التمرين رقم 19 ****

في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$ هي الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

T نقطة احداثيها $(3; 4)$

(1) أ) عين احداثي النقطة Ω مركز الدائرة (C) و نصف قطرها .

ب) ارسم الدائرة (C) . مثل T .

(2) نرسم من T المماسين للدائرة (C) و نسمي A_1 و A_2 نقطتي التماس .

أ) بين أن A_1 و A_2 تنتميان إلى الدائرة (C') ذات القطر $[OT]$.

ب) أعط معادل للدائرة (C') .

ج) عين احداثي A_1 و A_2 .

د) عين معادلة لكل مماس .

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين

هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة

$A(x_0, y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax + by + c = 0$

$$\text{هي: } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

التمرين رقم 20 ***

❖ أحسب المسافة بين النقطة $A(2, 3)$ و المستقيم (D)

ذو المعادلة: $y = 2x + 1$

❖ عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2, 1)$

و تمس المستقيم (D) ذو المعادلة:

$$x + y - 2 = 0$$

❖ لتكن (C') مجموعة النقط (x, y) و التي

تحقق المعادلة: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$

• بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و

نصف قطرها .

• هل المستقيم (D') ذو المعادلة

$3x + 2y + 4 = 0$ مماس للدائرة (C') ؟

التمرين رقم 21 **

(D) المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$

و A النقطة التي احداثيها $(2; 3)$.

نرمز بـ H إلى المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

(1) ماذا يمكن القول عن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ ؟

(2) عين احداثي النقطة H .

(3) احسب المسافة AH .

التمرين رقم 22 **

لتكن النقط $A\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ ، $B(-1; 3)$ و $C(5; -1)$

H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

(1) عين شعاعا $\vec{n}$ ناظميا على (BC) .

(2) احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}$ بطريقتين .

استنتج المسافة AH

المحل الهندسي

التمرين رقم 23 **

ABC مثلث . ما هي مجموعة النقط M من

المستوي حيث: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ؟

التمرين رقم 24 ***

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$(1) \quad (2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad ؟$$

$$(2) \quad (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \quad ؟$$

التمرين رقم 25 ***

A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$

(1) بين أن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون:

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$$

(2) نفرض أن $AB = 1$

- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

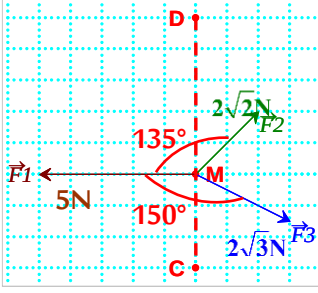
$$MA^2 - MB^2 = 2$$

التمرين رقم 26 ***

A و B نقطتان من المستوي حيث $AB = 4$.

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث

$$MA^2 + MB^2 = 16 \quad ؟$$



(1) جسم M متعرض إلى ثلاث قوى كما هو مبين في الشكل .

(أ) هل الجسم في توازن ؟

(ب) عين العمل لمحصلة

القوى $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ إذا كان الجسم يتحرك من D إلى

C ، حيث $DC = 4\text{cm}$

(2) جسم M كتلته m مثبت

بخططين معلقين في عريضة أفقية

في A و B . الجملة في توازن

أي : $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$ ،

حيث

$\vec{P}$ هو ثقل الجسم ، $\vec{F}_A$ ، $\vec{F}_B$ تواترا الخيطين .

يعطى $\|\vec{P}\| = 50$ ، $\|\vec{F}_A\| = 35$ و $\|\vec{F}_B\| = 40$ و

عين زوايا المثلث ABM .

المسألة رقم 03

في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعرف النقطة

$A(-2; 5)$ والمستقيم (d) ذي المعادلة $y = -3x + 1$

الهدف هو حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (d)

باستعمال طريقتين .

الطريقة الأولى :

نعين النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (d) .

(أ) عين معادلتين تربط بين إحداثيي النقطة H . ثم أحسب

إحداثيي النقطة H .

(ب) عين المسافة AH .

الطريقة الثانية :

(أ) أثبت أن النقطة $B(1; -2)$ تنتمي إلى المستقيم (d)

(ب) نضع $\vec{u}(1; -3)$ ، تحقق أن $\vec{u}$ هو شعاع التوجيه

للمستقيم (d) .

اشرح لماذا القول أن M تنتمي إلى (d) راجع إلى إيجاد عدد

حقيقي k حيث : $\vec{BM} = k\vec{u}$.

(ج) جد القيمة الحدية الصغرى للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$f(k) = 10k^2 + 48k + 58$. أحسب AM^2 .

(د) استنتج .

دساتير التحويل في حساب المثلثات

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

التمرين رقم 27 **

بملاحظة $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ أحسب القيم المضبوطة

لكل من $\sin \frac{7\pi}{12}$ و $\cos \frac{7\pi}{12}$.

استنتج $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$.

أحسب $\sin \frac{11\pi}{12}$ و $\cos \frac{11\pi}{12}$.

التمرين رقم 28 ***

اكتب بدلالة $\sin 2x$ كل من العبارتين التاليتين :

$(\cos x + \sin x)^2$ ؛ $(\cos x - \sin x)^2$.

التمرين رقم 29 ***

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

(أ) $\sin^4 x - \cos^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

(ب) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

(ج) $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$

مسائل

المسألة رقم 01

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A .

O منتصف القطعة $[BC]$ ، و H المسقط العمودي

لنقطة O على $[AC]$. I منتصف $[OH]$.

برهن أن المستقيمين (BH) و (AI) متعامدان

المسألة رقم 02

نقول عن جسم أنه في توازن إذا كان مجموع القوى معدوما .

بعد المسافة لا يهم ... الخطوة الأولى فقط هي الأكثر صعوبة.

النكاد كالنهر ، كلما ارتداد عمقا قلت ضوءناه