

سلسلة تمارين - 01-الجزء الأولالأعداد المركبةخواص و علاقات

BAC - 2020

تمرين 01:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية :

$$z_3 = \frac{1}{2+3i} + \frac{1}{(1+i)^2} \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{(2-3i)(1+i)} \quad ; \quad z_1 = \frac{1}{2-i} \quad ; \quad z_0 = \frac{1}{i}$$

$$z_7 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \quad ; \quad z_6 = \frac{1+i}{-1-2i} \quad ; \quad z_5 = \frac{3i}{2+i} \quad ; \quad z_4 = \frac{1+2i}{1+i}$$

تمرين 02:

الحل المفصل على القناة.

Chaine youtube:

Prof-AhmedTrir

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون :

$$3x + y - 1 + i(x - y) = 4 - i \quad \bullet$$

$$2x + 3iy - 1 + i(x - yi + 2) = 3i - 1 \quad \bullet$$

$$x + 2y + i(2x - y + 5) = 0 \quad \bullet$$

تمرين 03:

عين مرافق كلا من الأعداد المركبة التالية واكتب النتيجة على الشكل الجبري:

$$z_0 = 2 - 9i; \quad z_1 = 2i + 5; \quad z_2 = i(4 + 3i); \quad z_3 = (1 + 2i)(-4 - 3i)$$

$$z_4 = \frac{1-3i}{1+2i}; \quad z_5 = \frac{3+i}{i}; \quad z_6 = \frac{1+i}{-1-2i}; \quad z_7 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$$

تمرين 04:

$$\text{نضع } z_1 = 2 - 3i \quad ; \quad z_2 = 1 + i \quad \text{أحسب } |z_1| \quad ; \quad |z_2|$$

أكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد المركبة التالية ثم احسب

$$\text{طويلة كلا منها: } z_1^2 \quad ; \quad \frac{z_1}{z_2} \quad ; \quad z_1 \times z_2 \quad ; \quad z_1 + z_2$$

تمرين 05:

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = -1 - i \quad ; \quad z_3 = \sqrt{3} - i \quad ; \quad z_4 = -1 + i\sqrt{3}$$

تمرين 06:

الحل المفصل على القناة.

Chaine youtube:

Prof-AhmedTrir

$$z_1 \text{ و } z_2 \text{ عدنان مركبان بحيث: } z_2 = 6 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right); z_1 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

أوجد الطويلة وعمدة لكل من $\frac{z_1}{z_2}$ و $z_1 \times z_2$.

تمرين 07:

$$z_1 \text{ و } z_2 \text{ عدنان مركبان بحيث } z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) \text{ و } z_2 = 1 - i$$

(1) اكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية: z_1 ، z_2 ، $Z = \frac{z_1}{z_2}$

$$Z' = z_1 \times z_2$$

(2) اكتب على الشكل الجبري كلا من Z و Z' .

(3) استنتج قيمة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ ، $\sin \frac{\pi}{12}$ ، $\cos \frac{5\pi}{12}$ ، $\sin \frac{5\pi}{12}$.

تمرين 08:

$$z \text{ عدد مركب بحيث } z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

1. أحسب z^2 و z^4 .

2. اكتب z^4 على الشكل المثلثي.

3. استنتج الشكل المثلثي للعدد z .

4. أحسب $\cos \frac{3\pi}{8}$ و $\sin \frac{3\pi}{8}$.

5. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون z^n حقيقيا.

تمرين 09:

z_1 ، z_2 ، Z أعداد مركبة بحيث:

$$Z = z_1 \times z_2 \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad z_1 = -1 - i$$

1. اكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية: z_1 ، z_2 ، Z .

2. اكتب على الشكل الجبري العدد المركب Z .

3. استنتج قيمة لكل من $\cos \frac{11\pi}{12}$ ، $\sin \frac{11\pi}{12}$.

تمرين 10:

اكتب على الشكل الجبري كلا من :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad , \quad z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad , \quad z_3 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

تمرين 11:

اكتب على الشكل الأسّي كلا من :

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad , \quad z_2 = \cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3} \quad , \quad z_3 = 1 + i$$

$$z_4 = -2 \quad , \quad z_5 = -2i$$

Page FB:

Prof AhmedTrir

Chaine youtube:

Prof-AhmedTrir

instagram:

ProfAhmedTrir

أكتب على الشكل الأسّي كلا من:

$$z_3 = (-1 + i\sqrt{3})^5, \quad z_2 = (2 + 2i)(\sqrt{3} - i), \quad z_1 = \frac{2 + 2i}{\sqrt{3} - i}$$

الحل المفصل على القناة.

Chaine youtube:

Prof-AhmedTrir

$$z = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \text{ بحيث}$$

1. أحسب z^2 .
2. عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z^2 .
3. استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب z .
4. استنتج $\sin \frac{17\pi}{12}$ ، $\cos \frac{17\pi}{12}$.

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية ذات المجهول z واكتب الحلول على الشكل الجبري.

$$z + 1 = (1 - i)\bar{z} + 3 + i \quad (ب) \quad i\bar{z} = 2 - 3i \quad (أ)$$

أحسب $(2 - 5i)^2$ و $(\sqrt{3} + 2i)^2$ واستنتج الجذرين التربيعيين لكل من العددين : $a = -21 - 20i$ ، $b = -1 + 4i\sqrt{3}$.

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و Z عدد مركب

Page FB:

Prof AhmedTrir

Chaine youtube:

Prof-AhmedTrir

instagram:

ProfAhmedTrir

(1) حل في المجموعة C المعادلة $P(Z) = 0$.

(2) نضع: $Z_1 = 1 + i$ ؛ $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

(أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسّي.

(ب) أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

(ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) (أ) عدد طبيعي. عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقياً.

(ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

سلسلة تمارين – 02-

الجزء الثاني

الأعداد المركبة

تمرين 01:

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A = 1+i$ و $z_B = 3i$.

(1) اكتب على الشكل الأسّي: z_A و z_B .

(2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

(أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

(ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$.

(أ) عين z_D لاحقة النقطة D .

(ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

(4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات

اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ) .

تمرين 02:

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على

الترتيب: $z_A = -i$ ، $z_B = 2 + 3i$ و $z_C = -4 + i$.

1. أ - اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب - عين طول العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له ؛ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = iz - 1 - i$$

أ - عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$.

أ - بين أن النقاط A ، C و D في استقامة.

ب - عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C إلى النقطة D .

ج - عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D .

BAC - 2020

تمرين 03:

- (1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \dots\dots(I)$$
 حيث α وسيط حقيقي.
- (2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ؛ نرسم إلى حلي المعادلة (I) z_1 و z_2 . بين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.
- (3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B = 1-i\sqrt{3}$ و $z_C = 4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.
 أ) أنشئ النقط A ، B و C .
- ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.
- ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$ ، ثم أنشئ G .
- د) احسب لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

تمرين 04:

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.
 أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.
- ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.
- ج) بين أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.
- د) احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟
- (3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
 أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R .
- ب) عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A ، C و C' في استقامية.
- ج) عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

الحل المفصل على القناة.

Chaîne youtube:

Prof-AhmedTrir

- (I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .
- (II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C النقطة التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{و} \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) أ) اكتب z_C و z_A على الشكل الأسّي ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ب) تحقّق أنّ العدد المركّب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

(2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1+i$.

أ) حدّد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل D إلى A .

ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق : $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث $k \in \mathbb{R}^+$.

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها

العدد المركّب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركّب z' حيث : $z' = \frac{z-2}{z-1}$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

(2) النقطتان A و B لاحقاتهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث : $z_1 = 1-i$ و $z_2 = \bar{z}_1$.

أ - اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.

ب - بيّن أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.

(3) نضع $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ) .

(4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ وعناصره المميّزة .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل S .

ج - عيّن ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S .

BAC - 2020

تمرين 07:

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = \bar{z}_B$.
 (أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .
 (ب) بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.
 (3) (أ) عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته.
 (ب) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z .
 (ج) عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$.
 ثم تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

تمرين 08:

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2 - 4z + 8) = 0$.
- (II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2$.
 (1) اكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي .
 (2) عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .
 (3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$.
 تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.
 (4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h عين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

Page FB:

Prof Ahmed Trir

Chaine youtube:

Prof-Ahmed Trir

instagram:

ProfAhmedTrir

الحل المفصل على القناة.

Chaine youtube:

Prof-AhmedTrir

تمرين 09:

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A ، B و C التي لآحقاتها $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$.
- (1) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C .
 - (2) اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 - (3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$
عيّن كلاً من z_I و z_G لآحقتي النقطتين I و G ، ثم بيّن أنّ النقط B ، G و I في استقامية.
 - (4) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى I ، حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.
 - (5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}$.
- (أ) تحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ) .
- (ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها.

تمرين 10:

- I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.
- II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لآحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.
- (1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 - (2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z) = \frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$
- (أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)| = \frac{1}{2}$
- (ب) بيّن أنّ العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب.
- (3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
- (أ) عيّن لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أنّ النقط D ، A و C في استقامية.
- (ب) استنتج أنّ D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره .

Page FB:

Prof AhmedTrir

Chaine youtube:

Prof-AhmedTrir

instagram:

ProfAhmedTrir