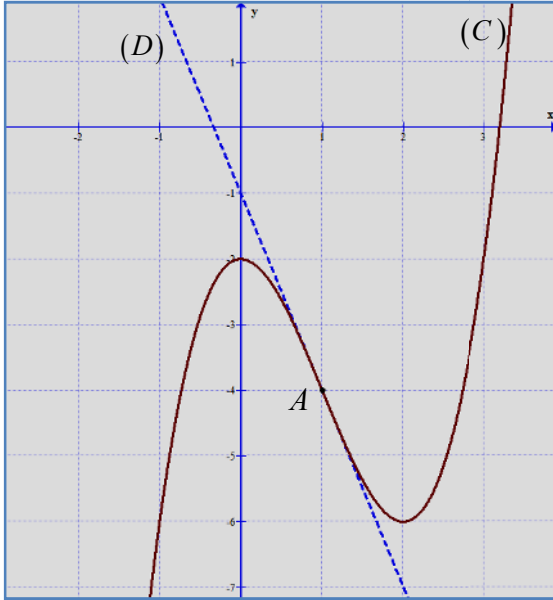




الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية .
(C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم . و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1; -4)$ ، (انظر الشكل)



1. بقراءة بيانية :
أ. شكل جدول تغيرات g .
ب. عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.
ج. اكتب معادلة لـ (D) .
د. حل المتراجحة الآتية $g'(x) < 0$.
2. باستعمال (C) ، بين أن $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = -2$.
3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 .
4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.
5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

- f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$.
(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .
 2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R - \{1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$. ثم استنتج اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .
 3. احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل م م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته . أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
 4. بين أن $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 5. بين أن : (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلته .
 6. احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .
 7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$ و المعادلة $f(x) = x + m$.
 8. h الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$.
أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة)
 9. u الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي : $u(x) = |f(x)|$ (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u .
أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f)
 10. v الدالة المعرفة على المجال $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $v(x) = f(|x|)$ (C_v) هو التمثيل البياني للدالة v .
بين أن v زوجية ثم أنشئ (C_v) انطلاقا من (C_f)
 11. k الدالة المعرفة على المجال $R - \{2\}$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ (C_k) هو التمثيل البياني للدالة k .
أشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) .

الحل

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية .
1. بقراءة بيانية :

أ. شكل جدول تغيرات g :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$

ب. عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ ، $g'(1)$ و $g''(1)$.

$$g(0) = -2 ، g(2) = -6 ، g'(0) = 0 ، g'(2) = 0$$

$$g'(1) = \frac{-1 - (-4)}{0 - 1} = -3 : (D) \text{ هو معامل توجيه المماس}$$

$g''(1) = 0$: نلاحظ أن المماس (D) يخترق المماس في $A(1; -4)$ ، إذن $A(1; -4)$ نقطة انعطاف و بالتالي : $g''(1) = 0$

ج. اكتب معادلة لـ (D) :

معادلة (D) هي : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ و لدينا $g(1) = -4$ و $g'(1) = -3$

و منه $y = -3(x-1) - 4$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y = -3x - 1$

د. حل المتراجحة الآتية $g'(x) < 0 : x \in]0; 2[$

2. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ و $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$$\begin{cases} c = -2 \\ -a - b = 2 \dots (1) \\ 3a + b = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} c = -2 \\ a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} c = -2 \\ a + b - 2 = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \begin{cases} g(0) = -2 \\ g(1) = -4 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد : $2a = 2$ ومنه $a = 1$

نعوض قيمة a في (1) نجد $1 + b = -2$ ومنه $b = -3$

إذن $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = -2$: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 :

$$g \text{ مستمرة و متزايدة تماما على المجال } [3.1; 3.2] \text{ و لدينا } \begin{cases} g(3.1) < 0 \\ g(3.2) > 0 \end{cases} \text{ أي } g(3.1) \times g(3.2) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α حيث $3.1 < \alpha < 3.2$

4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = 3x^2 - 6x$ و $g''(x) = 6x - 6$

$g''(x) > 0$ من أجل $x < 1$ و $g''(x) < 0$ من أجل $x > 1$ و $g(1) = -4$

g'' تتعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن $A(1; -4)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C) .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$.

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . وفسر النتائج هندسيا .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

↪ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لـ (C_f) .

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R - \{1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.

من أجل كل x من $R - \{1\}$ لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)(x-1)^3} = \frac{(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3 - 2}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

استنتج اتجاه تغير f :

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$g(x)$		-	- 0 +	
$(x-1)^3$	-	○	+	+
$f'(x)$	+		- 0 +	

f متزايدة تماما على $]-\infty; 1[$ و $]\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1; \alpha]$.

و شكل جدول تغيراتها .

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

احسب : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

ثم استنتج أن (C_f) يقبل م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x+2) = 0 \text{ معناه } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x - 2 = 0 \text{ معناه } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x = 2$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

الأستاذ : بلجودي حمو

$$f(x) - (x+2) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - 2 = \frac{2x^2 - x + 1 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - x + 1 - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x - 1}{(x-1)^2}$$

x	$+\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$-\infty$
f(x)-y	-	0	+	+
الوضع النسبي	(C _f) تحت (Δ)	(C _f) يقطع (Δ)	(C _f) فوق (Δ)	(C _f) فوق (Δ)

4. بين أن $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$

لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2 = 0$ ومنه $\alpha^3 = 3\alpha^2 + 2$.

من جهة أخرى: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha-1)^2}$ ومنه $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 2 + 1}{(\alpha-1)^2}$ ومنه $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 3}{(\alpha-1)^2}$ ومنه $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$

استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا $3.1 < \alpha < 3.2$ ومنه $2.1 < \alpha - 1 < 2.2$ ومنه $4.41 < (\alpha-1)^2 < 4.84$ ومنه $0.2 < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < 1.32$ ومنه $1.2 < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < 7.92$

ومنه $1.2 \times 3.1 < \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 1.32 \times 3.2$ ومنه $3 + 3.72 < 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 3 + 4.22$ إذن $6.72 < f(\alpha) < 7.22$

5. بين أن: (C_f) **يقبل مماسا** (T) **موازيا لـ** (Δ)

$f'(x) = 1$ ومنه $\frac{x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1)^3} = 1$ ومنه $x^3 - 3x^2 - 2 = (x-1)^3$ ومنه $x = \frac{-1}{3}$

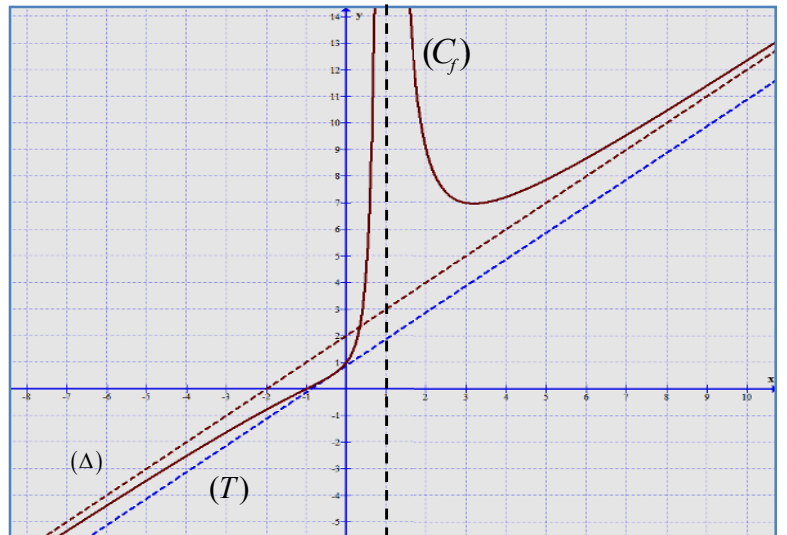
(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = \frac{-1}{3}$.

يطلب تعيين معادلته:

معادلة (T) هي: $y = f'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{-1}{3}\right)$ ومنه $y = 1\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{13}{24}$

و بالتالي معادلة المماس (D) هي: $y = x + \frac{7}{8}$

6. احسب $f(-1)$ **ثم ارسم المستقيم** (Δ) **و المنحنى** (C_f) **:**



الأستاذ : بلجودي حمو

7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$ (المناقشة أفقية)

↔ إذا كان $m \in]-\infty; f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

↔ إذا كان $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلان .

↔ إذا كان $m \in]f(\alpha); +\infty[$ المعادلة تقبل 3 حلول .

المعادلة $f(x) = x + m$.

↔ إذا كان $m \in]-\infty; \frac{7}{8}[$ لا توجد حلول .

↔ إذا كان $m = \frac{7}{8}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا .

↔ إذا كان $m \in]\frac{7}{8}; 2[$ المعادلة تقبل حلان .

↔ إذا كان $m = 2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

↔ إذا كان $m \in]2; +\infty[$ المعادلة تقبل حلان .

8. الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

↔ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة) :

من أجل كل x من $R - \{1\}$ لدينا ، $h'(x) = 2 \times f'(x) \times f'(x)$

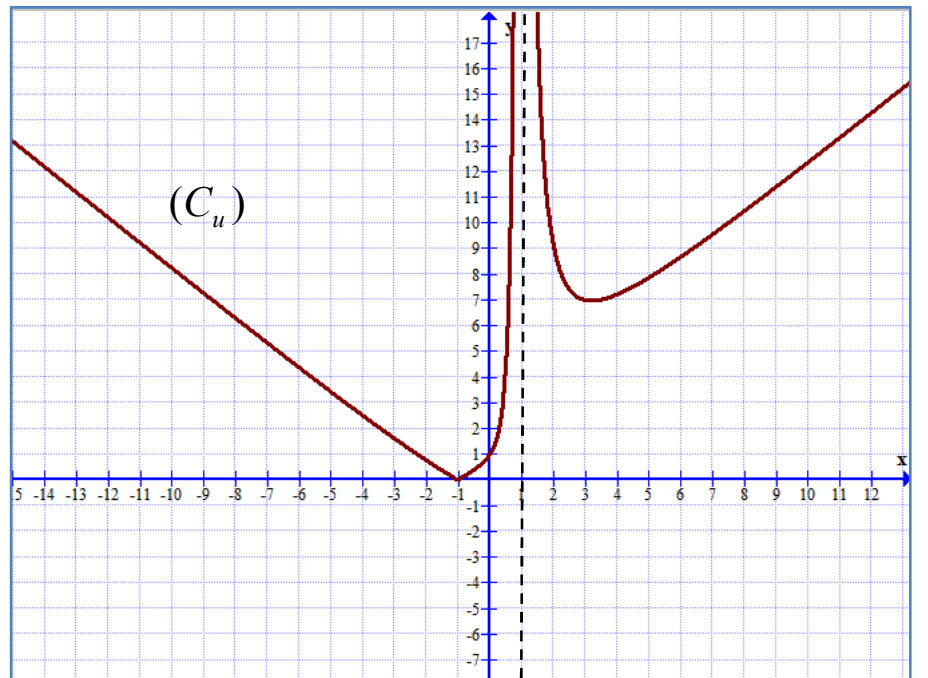
x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+		- 0 +	
$f(x)$	- 0 +			+ +	
$h'(x)$	- 0 +			- 0 +	
$h(x)$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

9. الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي : $u(x) = |f(x)|$ هو التمثيل البياني للدالة u .

↔ أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f) :

يكون (C_u) منطبقا على (C_f) في المجالات التي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل .

يكون (C_u) منظر لـ (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه (C_f) تحت محور الفواصل .



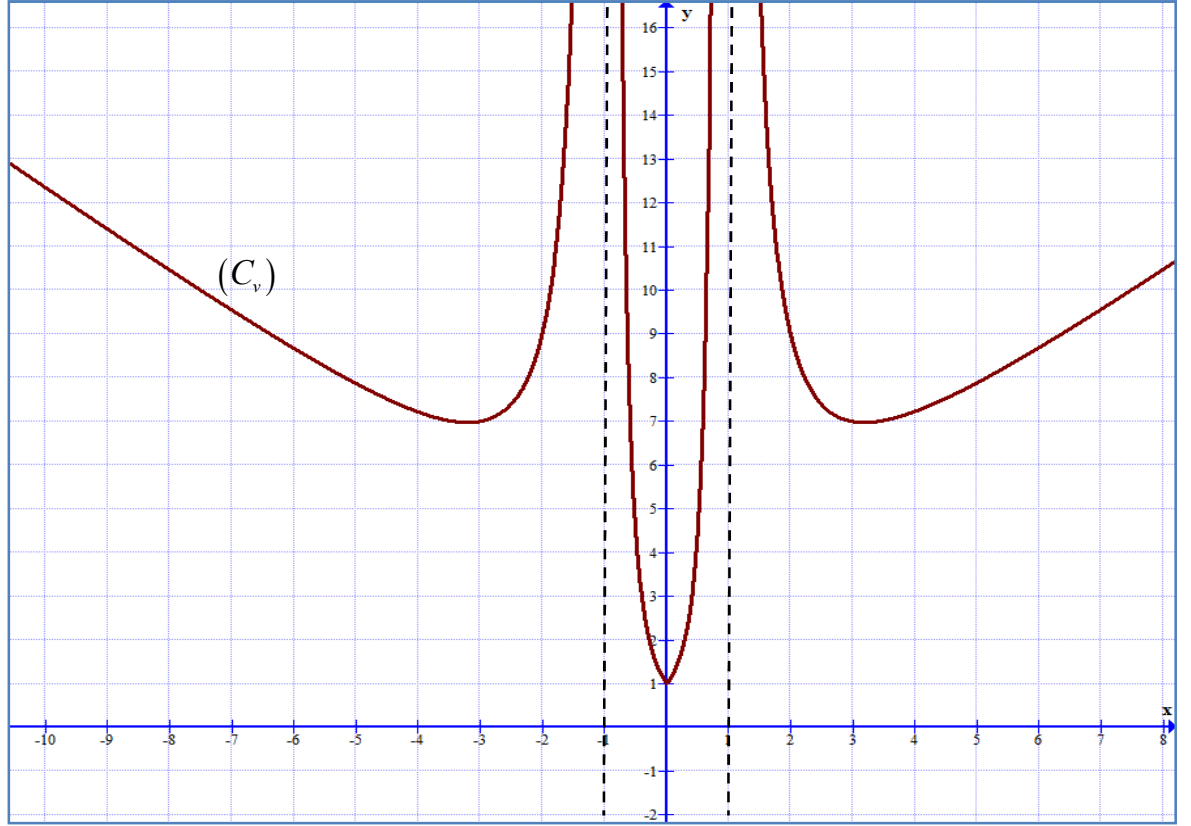
10. الدالة المعرفة على المجال $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $v(x) = f(|x|)$ هو التمثيل البياني للدالة v .

بين أن v زوجية

من أجل $-x \in D_u, x \in D_u$ و : $v(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = v(x)$ إذن الدالة u زوجية .

ثم أنشئ (C_v) انطلاقاً من (C_f) :

يكون (C_v) منطبقاً على (C_f) في المجال $[1; +\infty[\cup]0; 1]$ ، وبما أن الدالة u زوجية فإن منحنيتها متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .



11. الدالة المعرفة على المجال $R - \{2\}$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ هو التمثيل البياني للدالة k .

أشرح كيفية إنشاء (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

$k(x) = f(x-1) + 2$ من الشكل $k(x) = f(x+a) + b$ مع $a = -1$ و $b = 2$

إذن (C_k) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1; -2)$.

الأستاذ : بلجودي حمو

وفقكم الله في بكالوريا 2022
دعواتكم