



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

تحتوي علبة على تسع بطاقات لا يمكن التمييز بينها. بطاقتان بيضاوان تحملان الرقم 1 و ثلاث بطاقات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2 و أربع بطاقات سوداء تحمل الأرقام 1، 2، 3. نسحب عشوائيا من العلبة بطاقتين على التوالي و بدون إرجاع ، نعتبر الحادثتين التاليتين:

" A البطاقتان المسحوبتان من نفس اللون " ، " B البطاقتان المسحوبتان تحملان نفس الرقم "

(1) بين أن: $p(A) = \frac{5}{18}$ ثم احسب $p(B)$.

(2) أ - احسب احتمال سحب بطاقتين من نفس اللون وتحملان نفس الرقم.

ب - استنتج $p(A \cup B)$.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب المضاعف المشترك الأصغر للرقمين المسحوبين.

أ - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

ب - احسب التباين $V(X)$ ثم استنتج $V(-3X)$.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على بـ: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

(1) أ - اثبت أن (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n .

ج - احسب بدلالة n الجداء: $p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

(2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

أ - اثبت أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول w_0 .

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $10^{w_n} > 2021$

ج - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + 2u_1 + 2^2u_2 + \dots + 2^nu_n$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

من بين الإجابات المقترحة اختر الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التعليل.

- (1) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1954^{2020} على 5 هو: أ - 1 ب - 2 ج - 3
- (2) في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة التالية $12x + 17y = 1$ هي الثنائيات $(x; y)$ حيث:
- أ - $(17k - 7; 5 - 12k)$ ب - $(-7k; 5k)$ ج - $(17k - 5; 7 - 12k)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
- (3) a عدد طبيعي حيث: $a = \overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5. a يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل:
- أ - $a = \overline{111}$ ب - $a = \overline{303}$ ج - $a = \overline{222}$

- (4) في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهول x التالية $x^2 - 4x - 2 \equiv 0[5]$:
- أ - لا تقبل حولا ب - حلولها تحقق: $x \equiv -3[5]$ ج - حلولها تحقق: $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$

التمرين الرابع: (8 نقاط)

- f دالة عددية معرفة على $[-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + xe^{-x}$
- (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أ - (T) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $J(0; 1)$. اكتب معادلة للمماس (T).
 ب - اكتب معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) ويشمل النقطة ذات الفاصلة $A(-1; 1 - e)$.
- (4) أ - برهن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha \geq -1$.
 ب - بين أن: $e^\alpha = -\alpha$ ثم استنتج طريقة لإنشاء نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل بدقة.
- (5) أنشئ المستقيم (T')، المماس (T) والمنحنى (C_f).
- (6) m وسيط حقيقي. نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $\frac{1-m}{x} = 1 - e^{-x}$ (E)
- أ - بين أن كل حل للمعادلة (E) هو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم: $y = x + m$: (T_m).
 ب - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E).
- (7) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \ln[f(n) - 1]$
 - اكتب بدلالة n عبارة المجموع S_n المعروف بـ: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- (8) لتكن الدالة k المعرفة على $[-1; 1]$ بـ: $k(x) = f(x^2)$
 أ - عين الدالة المشتقة k' بدلالة f' .
 ب - ادرس اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات متميزة لا نفرق بينها عند اللمس، منها كرتان حمراوان تحملان الرقم 0 و ثلاثة كرات بيضاء تحمل الرقم 2 و ثلاثة كرات خضراء تحمل الأرقام 1, 2, 4.

أ. نسحب عشوائيا و في أن واحد ثلاث كرات من الصندوق

(1) احسب احتمال الحدثين التاليين :

A : "الكرات المسحوبة لا تحمل الرقم 0". B : "جاء الأعداد الظاهرة على الكرات المسحوبة يساوي 8".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جاء الأعداد الظاهرة على الكرات المسحوبة.

أ - عين قيم المتغير العشوائي X و حدد قانون احتماله.

ب - احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X و انحرافه المعياري.

II. في هذه المرحلة نعوض الكرات الثلاثة البيضاء ب n كرة بيضاء حيث n عدد طبيعي و $n > 2$, ثم نسحب

عشوائيا كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة الأولى إلى الصندوق.

نعتبر الحدثين التاليين: E : "الكرتان المسحوبتان بيضاوان" F : "الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون".

أ - احسب $p(E)$ بدلالة n .

ب - بين أن $p(D) = \frac{n^2 + 13}{n^2 + 10n + 25}$ ثم عين اصغر قيمة ل n حتى يكون $p(D) > \frac{1}{2}$.

التمرين الثاني: (4.5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0 = 11$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2}$.

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$.

(2) أ- تحقق انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$.

ب- اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

ب- استنتج انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و احسب نهاية المتتالية (u_n).

(4) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $v_n = \ln(u_n - 2)$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد اساسها و حدها الاول.

ب- اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة ثانية.

(5) احسب الجداء $P_n = (u_{1442} - 2) \times (u_{1443} - 2) \times \dots \times (u_{2021} - 2)$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) (u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 25$ و $u_8 = 3$ - أساس المتتالية (u_n) هو:

أ - $\frac{-22}{5}$ ب - $\frac{22}{5}$ ج - $\frac{-3}{8}$

(2) نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية $-2e^{2x} + 4e^x - 4 = 0$

- حلول هذه المعادلة هي S حيث: أ - $S = \{0;1\}$ ب - $S = \{0\}$ ج - $S = \emptyset$

(3) ليكن X المتغير العشوائي وقانون احتماله معرف بالجدول المقابل:

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	α	2α	3α

قيمة العدد الحقيقي α هي:

أ - $\frac{1}{9}$ ب - $\frac{1}{3}$ ج - $\frac{1}{6}$

(4) قسم دراسي يتكون من 3 ذكور و 25 إناث، يراد تشكيل لجنة تتكون من: رئيس و نائب رئيس و عضوين

عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من نفس الجنس هو:

أ - 303600 ب - 390000 ج - 151800

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I. لنكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = \frac{x}{2} + (x+1)\ln(x+1)$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى

منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{x+1}$.

(3) ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عين معادلة ل (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديدها.

(6) احسب $f(1)$, $f(2)$ و أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

III. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $h(x) = (x^2 - 2|x| + 1)\ln|x|$.

(1) احسب $h(-x) - h(x)$ ماذا تستنتج؟

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f(|x| - 1)$.

(3) اشرح طريقة إنشاء التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني