

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

ننسب الفضاء إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2; -1; 1)$ ، $B(1; -1; 3)$ ، $C(2; -2; 1)$ و $D(2; 2; 2)$.
1- أ. برهن أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب. تحقق أن $2x + z - 5 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (ABC) .

2- ليكن (Δ) مستقيم معرف بتمثيله الوسيط $t \in \mathbb{R} :$
$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 2 \\ z = 2t \end{cases}$$

- بين أن النقط D تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أن المستقيم (Δ) عمودي على (ABC) .

3- لتكن H المسقط العمودي للنقط D على المستوي (ABC) .

أ. عين إحداثيات النقط H .

ب. استنتج المسافة بين النقط A و المستقيم (Δ) .

4- ماهي المجموعة (S) للنقط M من الفضاء بحيث : $\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 = \frac{103}{5}$ ؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقطتان

A و B لواحقيها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$.

• أكتب كلا من z_A و z_B على الشكلين المثلثي و الأسّي .

• أحسب العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^{1436}$.

3. L تحويل نقطي عبارته المركبة : $z' = 2iz + 3$.

- عين طبيعة التحويل L و أنكر عناصره المميزة.

- أوجد لاحقة النقط D صورة النقط B بالتحويل L .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z - \sqrt{3} + i| = |iz + 1 - \sqrt{3}i|$.

I. نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

1. أدرس اتجاه تغيرات الدالة g .

2. احسب $g(1)$ ، استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x} \quad (C_f)$$

1. أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانياً.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و أنشئ جدول تغيراتها.

3. أ- ليكن (D) مستقيم معادلته $y = x$. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .

4. بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

5. أرسم (D) و (C_f) .

6. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و ومحور الفواصل والمستقيمان اللذين

معادلتهما $x = 1$ و $x = e$.

7. ناقش بيانياً، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$x^2 - mx - \ln x = 0$$

III. نعتبر الدالة h ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على R كما يلي: $h(x) = f(e^x)$.

1. بين أنه من أجل كل x من R لدينا: $h(x) = \frac{e^{2x} - x}{e^x}$.

2. استنتج جدول تغيرات الدالة h .

IV. لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. باستعمال رسم (D) و (C_f) مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها.

2. باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq e$.

3. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

4. هل المتتالية (u_n) مقاربة؟ برر.

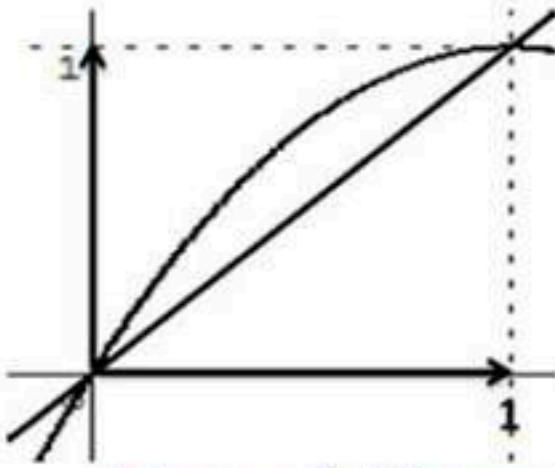
5. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 10 = 0$.
2. في المستوى المركب نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتهما $z_A = 3 - i$ و $z_B = 3 + i$.
وليكن r الدوران الذي مركزه A و زاوية له $\frac{\pi}{2}$. أوجد العبارة المركبة للدوران r .
3. أ- أوجد لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران r .
ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .
4. لتكن النقطة $D(1; 1)$. و ليكن العدد المركب $L = \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$.
أ- أكتب L على الشكل الجبري ثم المثلثي و الأسّي.
ب- أحسب $\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^{2015}$.
- ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)



- في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $8cm$
مثلنا المنحني (C_f) بيان الدالة $f(x) = x(2 - x)$
على المجال $[0; 1]$ و المنصف الأول $(y = x)$.
ولتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{8}$
و $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$

1. باستعمال الرسم المقابل مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها.
2. أ) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.
ب) استنتج اتجاه تغيير المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برر.
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(1 - u_n)$.
أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
ب) أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
ج) أوجد بدلالة n المجموع: $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط: $A(1; -2; 4)$ ،
 $B(-2; -6; 5)$ ، $C(-4; 0; -3)$ و $D(-\frac{1}{2}; -3; 2)$.
1. أ- بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامة.

ب- بين أن الشعاع $\vec{n}(1; -1; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

ج- اوجد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2. أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة D و العمودي على المستوي (ABC) .

ب- استنتج إحداثيات النقطة G المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

ج- تحقق أن النقطة G هي مرجح الجملة المنقلة $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$.

د- عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\|2\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM}\| = d(O; (ABC))$.

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I - (I) g دالة عددية معرفة على R بـ: $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$

1. أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38; -0.37[$.

4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .

II - (II) f دالة عددية معرفة على R بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1. أ- أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

ب- بين أن $f(x) = g(x)$ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2. أ- بين أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

3. بين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

4. أرسم (d) و (C_f) نأخذ $\alpha = -0.37$.

5. أحسب بالمستقيمر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات ذات

المعادلات $y = 2x + 1$ ، $x = 0$ و $x = 2$.

III - (III) (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي .

1. عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحني (C_f) عند نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

2. أكتب معادلة للمماس (Δ_m) في هذه الحالة .

3. ناقش بيانها، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$1 - \frac{x}{e^x} - m = 0$$