

MATH

=

الكالي للرياضيات

الأستاذ الكالي خليل



2AS

جميع الشعب العلمية

ملخص درس في المرجح مع
تمارين بالحل

جميع الشعب العلمية

تمارين متنوعة شاملة

شرح مبسط

دروس وتمارين

V U

من اعداد
الأستاذ الكالي خليل



لمتابعتنا عبر صفحتنا على الفيسبوك او على اليوتيوب قومو بالضغط على الروابط الاتية

facebook

You Tube

www.dzexams.com

ملخص درس المرجح

 C و B, A ثلاث نقط من المستوى و k عدد حقيقي غير معدوم.

مرجح نقطتين

 G مرجح يعني $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ و $\alpha + \beta \neq 0$ "حساب احداثيات G "

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

"تعين مجموعة النقط"

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{AG}$$

"إنشاء G "

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

ملاحظة ونتائج

- تسمى النقطة G كذلك مرجحا للجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ فإن G تنتمي الى المستقيم (AB)
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ وكان α و β من نفس الإشارة فإن $G \in [AB]$
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ وكان α و β مختلفين في الإشارة فإن G تقع خارج القطعة $[AB]$
- إذا كانت G مرجح للجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \alpha)\}$ فإن G تقع في منتصف القطعة $[AB]$
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ فإن G مرجح $\{(A, K\alpha), (B, K\beta)\}$
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ فإن G وحيدة

مرجح ثلاث نقط

G مرجح يعني $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$ حيث $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ و $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

مرجح للجملة

$$\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$$

$$\alpha + \beta \neq 0$$

ليكن H مرجح

$$\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$$

مرجح G

$$\{(H, \alpha + \beta), (C, \gamma)\}$$

حساب احداثيات G

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

تعيين مجموعة النقط M

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG}$$

إنشاء G

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$$

ملاحظة ونتائج

- تسمى النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$
- مرجح ثلاث نقاط ليست في إستقامة A, B و C يقع داخل المستوي (ABC)
- إذا كانت النقطة G كذلك مرجحا للجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \alpha), (C, \alpha)\}$ وكانت A, B و C ليست على إستقامة فإن G مركز ثقل المثلث ABC
- إذا كانت G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ وكانت α و β و γ من نفس الإشارة وكانت A, B و C ليست على إستقامة فإن G تقع داخل المثلث ABC
- إذا كانت G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ فإن G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A, k\alpha), (B, k\beta), (C, k\gamma)\}$.

من اعداد الأستاذ خليل الكالي

تمرين 01

ليكن في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ثلاث نقاط

$$C(-3, 2), \quad B(2, -2), \quad A(3, 2)$$

- (1) احسب احداثياتي النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, -1)\}$
- (2) احسب احداثيات النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, -2), (C, 3)\}$
- (3) احسب احداثياتي H_1 منتصف القطعة $[AB]$
- (4) احسب احداثياتي النقطة H_2 مركز ثقل المثلث ABC

تمرين 02

لتكن A و B نقطتين متميزتان من المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$

أنشئ النقطة I في كل حالة من الحالات التالية:

- (1) نعتبر النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2)\}$
- (2) نعتبر النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -1), (B, -2)\}$
- (3) نعتبر النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2), (B, 3)\}$
- (4) نعتبر النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -3), (B, 2)\}$
- (5) نعتبر النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3), (B, 3)\}$

تمرين 03

لتكن A, B و C ثلاث نقط من المستوى متميزة

أنشئ G بطريقتين في كل حالة من الحالات التالية:

- (1) أنشئ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, -2), (C, 3)\}$
- (2) أنشئ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2), (B, 2), (C, 1)\}$
- (3) أنشئ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ (للمحاولة)
- (4) أنشئ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2), (B, 3), (C, -2)\}$ (للمحاولة)

تمرين 04

ليكن A, B, C و D أربع نقط من المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -1), (B, 2), (C, 3)\}$ و I مرجح الجملة المثقلة $\{(D, 1), (C, 2)\}$

- عين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث: $|| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} || = 2$

- عين (E_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| = 3$
- عين (E_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| = 0$
- عين (E_3) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| = -2$
- عين (E_4) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| < 3$
- عين (E_5) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| \leq 3$
- عين (E_6) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| > 3$
- عين (E_7) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| \geq 2$
- عين (E_8) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| > 1$
- عين (E_9) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| > 0$
- عين (E_{10}) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $3||-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| = 4||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}||$
- عين (E_{11}) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| = ||-\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}||$
- عين (E_{12}) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \perp \frac{4}{3}(\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC})$

تمارين 05

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $||\vec{i}|| = 1cm$

$$C(-3,0) , B(1,-2) , A(1,2)$$

(1) عين احداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC

(2) أنشئ النقط A, B, C و G

(3) عين قيمة m حتى تقبل الجملة المثقلة $\{H_m(A, m+2), (B, m^2+m), (C, m)\}$ مرجح لها حيث $m \in \mathbb{R}$.

(4) عين احداثيتي H_1

(5) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = 3$

أ- اكتب $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$

ب- عين مجموعة النقط (E) ثم أنشئها في المعلم السابق.

(6) لتكن (E_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $5||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = 3||3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$

أ- اكتب $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MH_1}$

ب- عين مجموعة النقط (E_1) ثم أنشئها في المعلم السابق.

تمارين 06

ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $||\vec{i}|| = 1cm$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ و } AB = 4cm \text{ مثلث متقايس الاضلاع حيث}$$

(1) بين ان H مرجح النقطتين A و B المرفقتين على الترتيب بمعاملين يطلب تعيينها.

(2) لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$

- أنشئ النقطه G بطريقتين مختلفتين.

(3) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $||2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| = 3||-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}||$

- أ- اكتب الشعاع $\vec{MG}$ بدلالة $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$
- ب- بين ان الشعاع $\vec{MA} + \vec{MB}$ مستقل على M
- ت- عين مجموعة النقط (E) ثم أنشئها.

تمرين 07

ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = 1cm$. $ABCD$ مستطيل

$$\vec{AH} = \frac{4}{3}\vec{AB}; AC = 3cm; AB = 6cm$$

- (1) تبين ان H مرجح النقطتين A و B المرفقتين على الترتيب بالمعاملين 1 و -4 ثم أنشئها.
- (2) ليكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, -4), (C, 1)\}$
- بين ان G ، H و C على إستقامة واحدة، ثم أنشئها.
- (3) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$
- أ- بين ان B تنتمي الى (E) .
- ب- احسب BD
- ج- بين ان الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل على M .
- د- اكتب الشعاع $\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}$ بدلالة $\vec{MG}$
- هـ- عين مجموعة النقط (E) ، ثم أنشئها؟

تمرين 08

ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = 1cm$. $ABCD$ متوازي اضلاع، ليكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, -1)\}$

- (1) أنشئ I و H مرجحي الجملتين المثقلتين $\{(A, 1), (B, 2)\}$ و $\{(C, 3), (D, -1)\}$ على التوالي.
- (2) باستعمال خاصية التجميع بين ان G مرجح I و H المرفقتين بالمعاملين 3 و 2 على الترتيب. ثم أنشئ G .
- (3) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - \vec{MD}\| = 3$
- أ- اكتب $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - \vec{MD}$ بدلالة $\vec{MG}$
- ب- عين مجموعة النقط (E) ، ثم أنشئها
- (4) لتكن (E_1) مجموعة النقط M من المستوي:

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - \vec{MD}\| < \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

- أ- بين ان الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل على M .
- ب- عين مجموعة النقط M . ثم أنشئها (يعطى $BD = 4cm$)

تمارين 09

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = 1cm$ حيث ABC مثلث كفي.

و H نقطة من المستوي التي تحقق $2\vec{AH} + \vec{AB} = \vec{0}$ و G نقطة من المستوي المعرفة كما يلي $2\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$

(1) بين ان H مرجح للنقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما

(2) بين ان G مرجح نقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ يطلب تعيينهما

(3) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $2\|\vec{3MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 3\|\vec{3MA} - \vec{MB}\|$

(4) أ) عين قيم الحقيقي m حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A, m+1), (B, m^2), (C, m+3)\}$ I_m مرجح لها
ب) عين احداثيات I_m بدلالة m إذا علمت ان $A(-1, -1)$ ، $B(-2, 3)$ و $C(2, -3)$.

ج) هل توجد قيمة ل m حتى تكون النقطة $I(3, 2)$ مرجح للجملة.

حل تمرين 01

(1) حساب احداثياتي النقطة I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, -1)\}$

$$x_I = \frac{2x_A + (-1)x_B}{2-1} = \frac{2(3) + (-1)(2)}{1} = 4$$

$$y_I = \frac{2y_A + (-1)y_B}{2-1} = \frac{2(2) + (-1)(-2)}{1} = 6$$

اذن $I(4, 6)$

(2) حساب احداثياتي النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, -2), (C, 3)\}$

$$x_G = \frac{2x_A + (-2)x_B + 3x_C}{2-2+3} = \frac{2(3) + (-2)(2) + 3(-3)}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$y_G = \frac{2y_A + (-2)y_B + 3y_C}{2-2+3} = \frac{2(2) + (-2)(-2) + 3(2)}{3} = \frac{14}{3}$$

اذن $G\left(-\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$

(3) حساب احداثيات H_1 منتصف القطعة $[AB]$

بما ان H_1 منتصف القطعة $[AB]$ إذا H_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \alpha)\}$ حيث $\alpha \neq 0$ من اجل $\alpha = 1$ نجد ان H_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 1)\}$ ومنه

$$x_{H_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_{H_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$$

اذن $H_1\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

(4) حساب احداثيات النقطة H_2 مركز ثقل المثلث ABC

هذا يعني H_2 مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \alpha), (C, \alpha)\}$ حيث $\alpha \neq 0$ نضع $\alpha = 1$ نجد ان H_2 مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ ومنه نجد

$$x_{H_2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{3+2-3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_{H_2} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2-2+2}{3} = \frac{2}{3}$$

اذن $H_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

حل تمرين 02

نستخدم هذا القانون $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \vec{AB}$ لحل هذا التمرين

(1) بما ان I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2)\}$ ومنه $\vec{AI} = \frac{2}{1+2} \vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{AB}$



(2) بما ان I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -1), (B, -2)\}$ ومنه نجد $\vec{AI} = \frac{-2}{-1-2} \vec{AB} = \frac{-2}{-3} \vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{AB}$



(3) بما ان I مرجح الجملة $\{(A, -2), (B, 3)\}$ ومنه نجد $\vec{AI} = \frac{3}{-2+3} \vec{AB} = 3 \vec{AB}$



(4) بما ان I مرجح الجملة $\{(A, -2), (B, 2)\}$ ومنه نجد $\vec{AI} = \frac{2}{-3+2} \vec{AB} = -2 \vec{AB}$



(5) بما ان I مرجح الجملة $\{(A, 3), (B, 3)\}$ ومنه نجد $\vec{AI} = \frac{3}{3+3} \vec{AB} = \frac{3}{6} \vec{AB} = \frac{1}{2} \vec{AB}$



حل تمرين 03

نستعمل في الطريقة الأولى القانون $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \vec{AC}$ (خاصية متوازي الاضلاع)

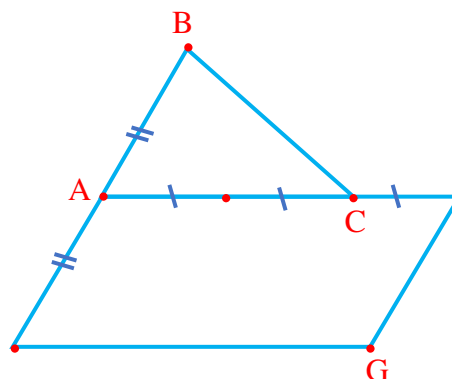
ونستعمل في الطريقة الثانية خاصية التجميع.

(1) الطريقة الأولى

بما ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, -2), (C, 3)\}$ ومنه

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{1-2+3} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{1-2+3} \overrightarrow{AC} = \frac{-2}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{اذن}$$

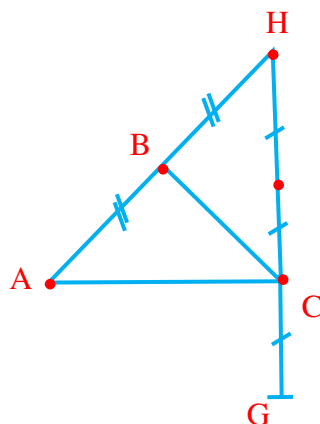


باستخدام خاصية متوازي اضلاع

(2) الطريقة الثانية

بما ان $1 - 2 \neq 0$ اذن الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, -2)\}$ تقبل مرجح ليكن H ومنه $\overrightarrow{AH} = \frac{-2}{1-2} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

وباستعمال خاصية التجميع نجد ان G مرجح الجملة المتقلة $\{(H, -1), (C, 3)\}$ ومنه نجد ان $\overrightarrow{HG} = \frac{3}{-1+3} \overrightarrow{HC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HC}$



نقوم بإنشاء H ثم باستعمال H نقوم بإنشاء G

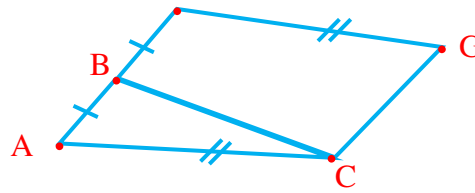
(3) الطريقة الأولى

بما ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2), (B, 2), (C, 1)\}$ ومنه

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{-2+2+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{-2+2+1}\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{اذن}$$

استعمال خاصية متوازي اضلاع

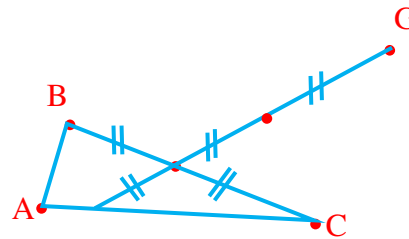


(4) الطريقة الثانية

بما ان $2 + 1 \neq 0$ اذن الجملة المثقلة $\{(B, 2), (C, 1)\}$ تقبل مرجح ليكن H ومنه $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2+1} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$

وباستعمال خاصية التجميع نجد ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2), (H, 3)\}$ ومنه نجد ان $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{-2+3} \overrightarrow{AH}$

اذن $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AH}$



حل تمرين 04

نستخدم في هذا التمرين قانون $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$
وكذلك قانون $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$

⊗ بما ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -1), (B, 2), (C, 3)\}$ فإن $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$

⊗ بما ان I مرجح الجملة المثقلة $\{(D, 1), (C, 2)\}$ فإن $\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$

(1) تعيين (E) مجموعة النقط M

لدينا $\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \| = 2$

ولدينا كذلك $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$

ومنه $\| 4\overrightarrow{MG} \| = 2$

أي $MG = \frac{1}{2}$

اذن (E) دائرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{1}{2} cm$

(2) تعيين (E₁) مجموعة النقط M

$$||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| = 3 \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||3\overrightarrow{MI}|| = 3 \quad \text{ومنه}$$

$$3MI = 1 \quad \text{أي}$$

اذن (E₁) دائرة مركزها I ونصف قطرها 1cm

(3) تعيين (E₂) مجموعة النقط M

$$||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||3\overrightarrow{MI}|| = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$3MI = 0 \quad \text{أي}$$

اذن (E₂) هي النقطة I

(4) تعيين (E₃) مجموعة النقط M

$$||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| = -2 \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||3\overrightarrow{MI}|| = -2 \quad \text{ومنه}$$

$$3MI = -2 \quad \text{أي مستحيل}$$

اذن (E₃) مجموعة خالية

(5) تعيين (E₄) مجموعة النقط M

$$||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| < 3 \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||3\overrightarrow{MI}|| < 3 \quad \text{ومنه}$$

$$MI < 1 \quad \text{أي}$$

اذن (E_4) هي القرص ماعدا الحافة (القرص المفتوح) الذي مركزه I ونصف قطره 1cm

(6) تعيين (E_5) مجموعة النقط M

$$||-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| \leq 3 \quad \text{لدينا}$$

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||4\overrightarrow{MG}|| \leq 3 \quad \text{ومنه}$$

$$MG \leq \frac{3}{4} \quad \text{أي}$$

اذن (E_5) هي القرص مع الحافة (القرص المغلق) الذي مركزها G ونصف قطرها $\frac{3}{4}\text{cm}$

(7) تعيين (E_6) مجموعة النقط M

$$||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| > 3 \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||3\overrightarrow{MI}|| > 3 \quad \text{ومنه}$$

$$MI > 1 \quad \text{أي}$$

اذن (E_6) هي المستوي ماعدا القرص المغلق الذي مركزه I ونصف قطره 1cm

(8) تعيين (E_7) مجموعة النقط M

$$||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC}|| \geq 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||3\overrightarrow{MI}|| \geq 2 \quad \text{ومنه}$$

$$MI \geq \frac{2}{3} \quad \text{أي}$$

اذن (E_7) هي المستوي ماعدا القرص المفتوح الذي مركزه I ونصف قطره $\frac{2}{3} cm$

(9) تعين (E_8) مجموعة النقط M

$$|| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} || > -1 \quad \text{لدينا}$$

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||4\overrightarrow{MG}|| > -1 \quad \text{ومنه}$$

$$4MG > -1 \quad \text{أي}$$

$$4MG \geq 0$$

$$MG \geq 0$$

اذن (E_8) هي المستوي

(10) تعين (E_9) مجموعة النقط M

$$|| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} || > 0 \quad \text{لدينا}$$

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$||4\overrightarrow{MG}|| > 0 \quad \text{ومنه}$$

$$MG > 0 \quad \text{أي}$$

اذن (E_9) هي المستوي ماعدا G

(11) تعين (E_{10}) مجموعة النقط M

$$3|| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} || = 4||\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} || \quad \text{لدينا}$$

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$3||4\overrightarrow{MG}|| = 4||3\overrightarrow{MI}|| \quad \text{ومنه}$$

$$12MG = 12MI \quad \text{أي}$$

$$MG = MI \quad \text{نجد ان}$$

اذن (E_{10}) هي المستقيم المحوري للقطعة $[GI]$

(12) تعين (E_{11}) مجموعة النقاط M

$$|| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} || = || -\vec{MB} + \vec{MA} || \quad \text{لدينا}$$

$$-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = 4\vec{MG} \quad \text{وكذلك}$$

$$-\vec{MB} + \vec{MA} = \vec{BM} + \vec{MB} = \vec{BA} \quad \text{ونعلم باستعمال خاصية شال نجد}$$

$$||4\vec{MG}|| = ||\vec{BA}|| \quad \text{ومنه}$$

$$4MG = BA \quad \text{أي}$$

$$MG = \frac{BA}{4} \quad \text{نجد ان}$$

اذن (E_{11}) هي دائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{BA}{4} \text{ cm}$

(13) تعين (E_{12}) مجموعة النقاط M

$$(-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) \perp \frac{4}{3}(\vec{MD} + 2\vec{MC}) \quad \text{لدينا}$$

$$-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = 4\vec{MG} \quad \text{و} \quad \vec{MD} + 2\vec{MC} = 3\vec{MI} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$(4\vec{MG}) \perp \frac{4}{3}(3\vec{MI}) \quad \text{ومنه}$$

$$4\vec{MG} \perp 4\vec{MI} \quad \text{أي}$$

$$\vec{MG} \perp \vec{MI} \quad \text{نجد ان} \quad (\text{مع العلم } I \neq G)$$

اذن (E_{12}) هي دائرة التي قطرها $[GI]$.

حل تمرين 05

(1) تعين احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

بما ان G مركز المثلث ABC فإن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha), (B, \alpha), (C, \alpha)\}$ حيث $\alpha \neq 0$ من اجل $\alpha = 1$ نجد ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ ومنه

ملخص درس وتمارين بالحل في المرجح

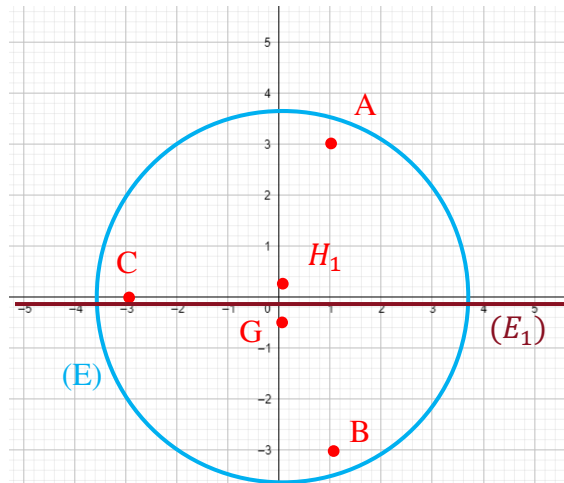
جميع الشعب

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 + 1 - 3}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2 - 2 + 0}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$G\left(\frac{-1}{3}, 0\right) \quad \text{اذن}$$

(2) إنشاء A ، B ، C و G



(3) تعيين قيم m حتى تقبل الجملة المتقلة $\{(A, m+2), (B, m^2+m), (C, m)\}$ مرجح أي $(m+1) + (m^2+m) + m \neq 0$.

$$\text{ومنه } m^2 + 2m + 1 \neq 0 \text{ يكافئ } m \neq -1$$

اذن الجملة تقبل مرجح إذا كان $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(4) تعيين احداثيات H_1

بالتعويض $m = 1$ نجد ان H_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, 2), (C, 1)\}$

ومنه

$$x_{H_1} = \frac{2x_A + 2x_B + x_C}{2+2+1} = \frac{2(1) + 2(1) + (-3)}{5} = \frac{1}{5}$$

$$y_G = \frac{2y_A + 2y_B + y_C}{2+2+1} = \frac{2(2) + 2(-2) + (0)}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$H_1\left(\frac{1}{5}, 0\right) \quad \text{اذن}$$

(5) أ) كتابة $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ بدلالة $\vec{MG}$

نعلم ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, 2), (C, 1)\}$ ومنه نجد ان $(1+1+1)\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad \text{أي}$$

وهو المطلوب

(ب) تعين (E)

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3 \quad \text{لدينا}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = 3$$

$$MG = 1 \quad \text{أي}$$

اذن (E) هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 1cm

$$\overrightarrow{MH_1} \text{ بدلالة } 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \quad (6)$$

نعلم ان H_1 مرجح الجملة المتزنة $\{(A, 2), (B, 2), (C, 1)\}$ ومنه نجد ان $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (2 + 2 + 1)\overrightarrow{MH_1} = 5\overrightarrow{MH_1}$

$$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MH_1} \quad \text{اذن}$$

وهو المطلوب.

(ب) تعين (E_1)

$$5\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \quad \text{لدينا}$$

$$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MH_1} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$5\|3\overrightarrow{MG}\| = 3\|5\overrightarrow{MH_1}\| \quad \text{ومنه نجد ان}$$

$$MG = MH_1 \quad \text{أي}$$

اذن (E_1) هي المستقيم المحوري للقطعة $[GH_1]$

حل تمرين 06

(1) تبين ان H مرجح النقطتين A و B

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{لدينا}$$

$$3\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ومنه}$$

$$3\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \quad \text{إستعمال علاقة شال}$$

$$3\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

$$\vec{HB} - 2\vec{AH} = \vec{0} \quad \text{يمكن التوقف هنا فقط}$$

$$2\vec{AH} + \vec{HB} = \vec{0}$$

اذن H مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 2 و 1 على الترتيب.

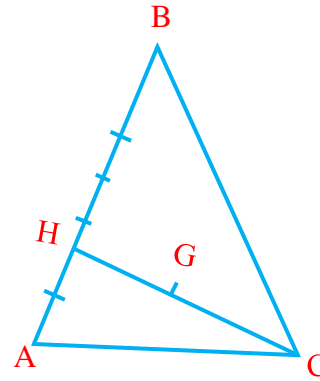
(2) إنشاء G

لدينا H مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, 1)\}$

$$\vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad \text{ومنه}$$

وباستعمال خاصية التجميع نجد ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(H, 3), (C, 3)\}$

$$\vec{HG} = \frac{1}{2}\vec{HC} \quad \text{أي} \quad \vec{HG} = \frac{3}{6}\vec{HC} \quad \text{ومنه نجد ان}$$



$$(3) \text{ أ) كتابة الشعاع } 2\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC} \text{ بدلالة } \vec{MG}$$

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$

$$2\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC} = 6\vec{MG} \quad \text{إذن}$$

وهو المطلوب.

ب) تبين ان $-\vec{MA} + \vec{MB}$ مستقل على M

$$-\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{AB} + \vec{MB} \quad \text{إستعمال علاقة شال}$$

$$= \vec{AB}$$

$$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$

اذن

وهو المطلوب.

(ج) تعين (E).

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| \leq 3\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$$

لدينا

من السؤال (أ) و (ب)

$$\|6\overrightarrow{MG}\| \leq 3\|\overrightarrow{AB}\|$$

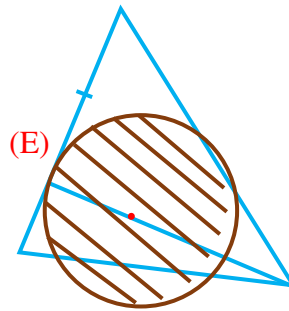
نجد ان

$$6MG \leq 3(4) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = AB = 4cm$$

$$MG \leq 2$$

اذن

اذن (E) هي قرص مغلق مركزه G ونصف قطره 2cm.



حل تمرين 07

(1) تبين ان H مرجح النقطتين A و B المرفقتين على الترتيب بالمعاملين 1 و -4

$$\overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$$

لدينا

$$3\overrightarrow{AH} = 4\overrightarrow{AB} \quad \text{بالمضرب في 3} \quad \text{ومنه}$$

$$3\overrightarrow{AH} = 4\overrightarrow{AH} + 4\overrightarrow{HB} \quad \text{إستعمال علاقة شال}$$

$$3\overrightarrow{AH} - 4\overrightarrow{AH} - 4\overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

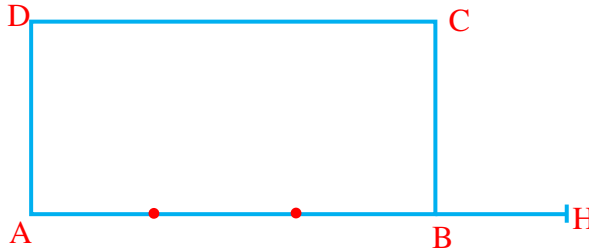
$$-\overrightarrow{AH} - 4\overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{AH} - 4\overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

اذن H مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و -4 على الترتيب.

إنشاء H

لدينا $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ ومنه



(2) تبين ان G ، H و C على إستقامة.

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, -4), (C, 1)\}$

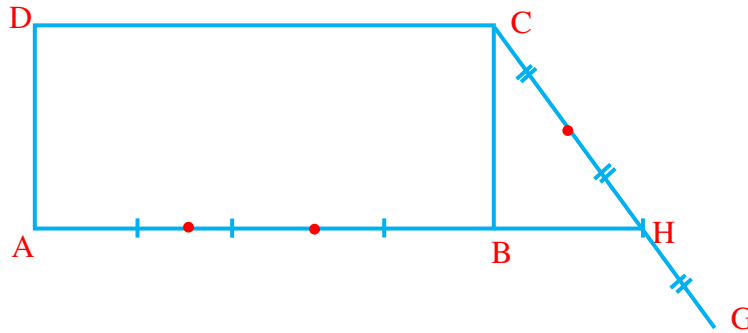
و H مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, -4)\}$

حسب خاصية التجميع نجد ان G مرجح الجملة $\{(H, -3), (C, 1)\}$ ومنه نجد $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{-3+1}\overrightarrow{HC}$

اذن $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{-2}\overrightarrow{HC}$

اذن النقط G ، H و C على استقامة.

إنشاء G



(3) أ) تبين ان B تنتمي الى (E) ونعلم ان (E) هي مجموعة النقط من المستوي حيث

$$||\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$$

بالتعويض B نجد

$$||\vec{BA} - 2\vec{BB} + \vec{BC}|| = ||\vec{BA} + \vec{BC}|| \dots (1)$$

$$||\vec{BA} - 4\vec{BB} + \vec{BC}|| = ||\vec{BA} + \vec{BC}|| \dots (2)$$

اذن من (1) و (2) نجد ان B تنتمي إلى (E)

(ب) حساب BD

بما ان $ABCD$ مستطيل إذن ABD مثلث قائم في A

ومنه حسب خاصية فيثاغورس نجد

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$6^2 + 5^2 = BD^2$$

$$BD = \sqrt{61} \text{ cm} \quad \text{إذن}$$

(ج) تبيان ان الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستـ قل على M

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MB} + \vec{MC}$$

$$= \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{BM} + \vec{MC}$$

$$= \vec{BM} + \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{MC}$$

علاقة شـال

$$= \vec{BA} + \vec{BC}$$

بما ان $ABCD$ متوازي أضلاع (مستطيل)

حسب خاصية متوازي اضلاع نجد $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{BD} \quad \text{ومنه نجد}$$

إذن $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستـ قل على M

(د) كتابة الشعاع $\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}$ بدلالة $\vec{MG}$

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, -4), (C, 1)\}$

$$\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC} = (1 - 4 + 1)\vec{MG}$$

$$\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC} = -2\vec{MG} \quad \text{إذن}$$

وهو المطلوب إثباته.

(هـ) تعيين (E) ثم إنشائها

$$||\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}|| = ||\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}|| \quad \text{لدينا}$$

ولدينا كذلك $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{BD}$ و $\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC} = -2\vec{MG}$

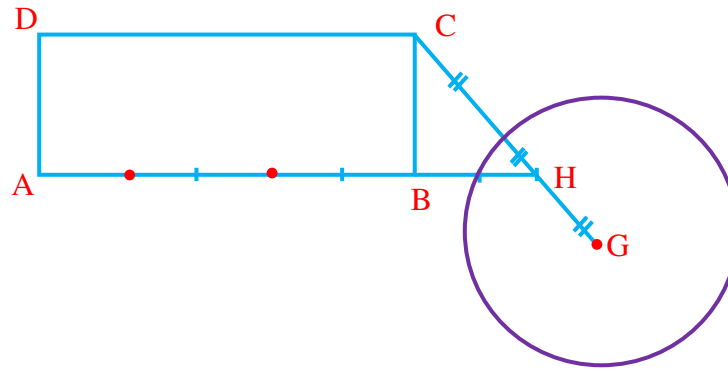
إذن $||-2\vec{MG}|| = ||\vec{BD}||$

أي $2MG = BD$

$BD = \sqrt{61}cm$

ومنه نجد $MG = \frac{\sqrt{61}}{2}cm$

اذن (E) هي دائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{\sqrt{61}}{2}cm$



حل تمرين 08

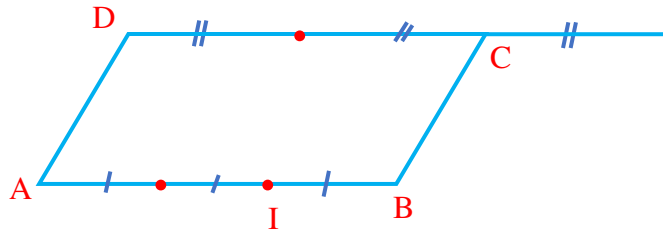
(1) إنشاء I و H

لدينا I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2)\}$

وكذلك H مرجح الجملة المثقلة $\{(C, 3), (D, -1)\}$

ومنه نجد $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ و $\vec{CH} = \frac{-1}{2}\vec{CD}$

إنشاء كل من I و H



(2) بما ان I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2)\}$

و H مرجح الجملة المثقلة $\{(C, 3), (D, -1)\}$

وكذلك G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, -1)\}$
 باستعمال خاصية التجميع نجد ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(I, 3), (H, 2)\}$
 وهو المطلوب إثباته

طريقة (2) (بدون تطبيق خاصية التجميع مباشرة)

بما ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, -1)\}$

إذن $\vec{GA} + 2\vec{GB} + 3\vec{GC} - \vec{GD} = \vec{0}$ علاقة شال

$$\vec{GI} + \vec{IA} + 2\vec{GI} + 2\vec{IB} + 3\vec{GA} + 3\vec{HC} - \vec{GH} - \vec{HD} = \vec{0}$$

$$3\vec{GI} + \vec{IA} + 2\vec{IB} + 2\vec{GH} + 3\vec{HC} - \vec{HD} = \vec{0}$$

بما ان I مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2)\}$

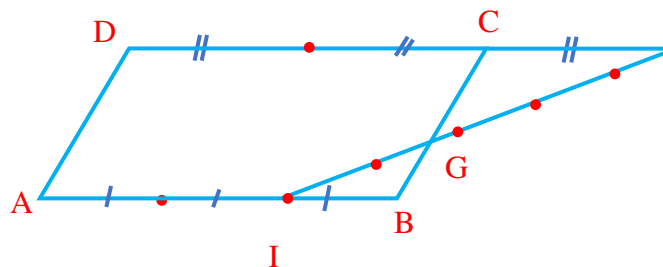
و H مرجح الجملة المثقلة $\{(C, 3), (D, -1)\}$

$$3\vec{GI} + 2\vec{GH} = \vec{0} \text{ ومنه نجد ان } 3\vec{HC} - \vec{HD} = \vec{0} \text{ و } \vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$$

اذن G مرجح الجملة المثقلة $\{(I, 3), (H, 2)\}$

إنشاء G

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(I, 3), (H, 2)\}$ إذن $\vec{IG} = \frac{2}{5}\vec{IH}$



(3) أ) كتابة الشعاع $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - \vec{MD}$ بدلالة $\vec{MG}$

نعلم ان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, -1)\}$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - \vec{MD} = (1 + 2 + 3 - 1)\vec{MG}$$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - \vec{MD} = 5\vec{MG} \text{ اذن}$$

وهو المطلوب.

(ب) تعين (E)

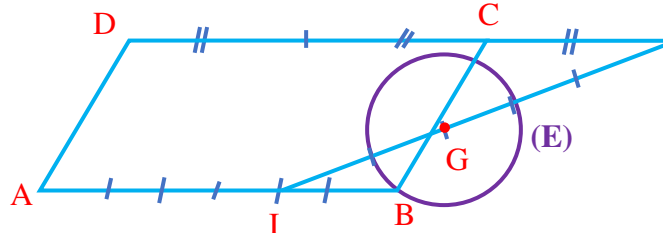
$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - \vec{MD}\| = 3 \text{ لدينا}$$

ولدينا كذلك $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MG}$

اذن $||5\overrightarrow{MG}|| = 3$

أي $MG = \frac{3}{5}cm$

اذن (E) هي دائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{3}{5}cm$



(4) أ) تبيان ان $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ مستقل على M

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

بما ان ABCD متوازي أضلاع اذن $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ وعليه $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BD}$ وهو المطلوب.

(ب) تعين (E_1)

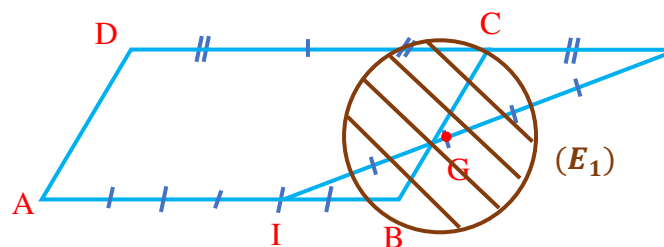
لدينا $||\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|| < ||\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$

ومن الأسئلة السابقة نجد $||5\overrightarrow{MG}|| < ||\overrightarrow{BD}||$

$$5MG < 5cm \quad BD = 5cm$$

$$MG < 1cm$$

اذن (E_1) هي القرص المفتوح الذي مركزه G ونصف قطره 1.



حل تمرين 09

(1) تبين ان H مرجح للنقطتين A و B لدينا $2\vec{AH} + \vec{AB} = \vec{0}$ **إستعمل علاقة شال**ومنه $2\vec{AH} + \vec{AH} + \vec{HB} = \vec{0}$

$$3\vec{AH} + \vec{HB} = \vec{0}$$

يمكن التوقف هنا $-3\vec{HA} + \vec{HB} = \vec{0}$

$$3\vec{HA} - \vec{HB} = \vec{0}$$

اذن H مرجح للنقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب.(2) تبين G مرجح A ، B و C .لدينا $2\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{BG} = \vec{0}$

$$2\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{BG} + 2\vec{GC} = \vec{0}$$

$$2\vec{GA} + \vec{GB} - 2\vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$$

$$2\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$$

اذن G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2، -1 و 2 على الترتيب.(3) تعيين وإنشاء (E) لدينا H مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 3), (B, -1)\}$ و G مرجح الجملة المثقلة $\{(A, 2), (B, -1), (C, 2)\}$

$$2\|2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 3\|3\vec{AM} - \vec{MB}\| \text{ و}$$

$$3\vec{MA} - \vec{MB} = 2\vec{MH} \text{ اذن}$$

$$2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 3\vec{MG}$$

$$2\|3\vec{MG}\| = 3\|2\vec{MH}\| \text{ ونجد ان}$$

$$MG = MH \text{ أي}$$

اذن (E) هي المستقيم المحوري للقطعة $[GH]$

(4) أ) تعين القيم الحقيقي m حتى تقبل الجملة مرجح.

$$m + 1 + m^2 + m + 3 \neq 0 \quad \text{هذا يعني}$$

$$m^2 + 2m + 4 \neq 0 \quad \text{أي (المعادلة ليس لها حل)}$$

اذن مهما يكن $m \in \mathbb{R}$ الجملة التالية تقبل مرجح.

(ب) تعيين احداثيات I_m بدلالة m .

$$x_{I_m} = \frac{(m+1)x_A + m^2x_B + (m+3)x_C}{m+1+m^2+m+3} = \frac{(m+1)(-1) + m^2(-2) + (m+3)(2)}{m^2+2m+4}$$

$$y_{I_m} = \frac{(m+1)y_A + m^2y_B + (m+3)y_C}{m+1+m^2+m+3} = \frac{(m+1)(-1) + m^2(3) + (m+3)(-3)}{m^2+2m+4}$$

بعد النشر والتبسيط نجد

$$x_{I_m} = \frac{-2m^2 + m + 5}{m^2 + 2m + 4}$$

$$y_{I_m} = \frac{3m^2 - 4m - 10}{m^2 + 2m + 4}$$

$$I_m \left(\frac{-2m^2 + m + 5}{m^2 + 2m + 4}, \frac{3m^2 - 4m - 10}{m^2 + 2m + 4} \right) \quad \text{اذن}$$

(ج) في $I(3,2)$ تكون مرجح للجملة هذا يعني المعادلتين (1) و (2) تقبلان حل مشترك.

$$\begin{cases} 3 = \frac{-2m^2 + m + 5}{m^2 + 2m + 4} \dots (1) \\ 2 = \frac{3m^2 - 4m - 10}{m^2 + 2m + 4} \dots (2) \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} 3(m^2 + 2m + 4) = -2m^2 + m + 5 \dots (1) \\ 2(m^2 + 2m + 4) = 3m^2 - 4m - 10 \dots (2) \end{cases}$$

بعد النشر والتبسيط نجد

$$\begin{cases} 5m^2 + 5m + 7 = 0 \dots (1) \\ -m^2 + 8m + 18 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

المعادلة (1) ليس لها حل لأن $\Delta = S^2 - 4(5)(7) < 0$ اذن مستحيل توجد قيمة ل m مشتركة بين المعادلة (1) و (2)

ومنه نجد ان $I(3,2)$ مستحيل تكون مرجح للجملة المثقلة التالية.