

مسألة أسية رقم 03

(1) عيّن جميع الدّوال $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ التي تحقّق من أجل كل عدد حقيقي $x \notin \{-1, 1\}$ العلاقة:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x \dots (1)$$

(2) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{(2-2x^2)f(x)}$.

أ) أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) أحسب g' مشتقة الدالة g .

ج) إستنتج إتجاه تغير الدالة g . ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند النّقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.

(4) أرسم C_g التّمثيل البياني للدّالة g والمماس (T) في معلم O, i, j .

الإجابة النموذجية

(1) لتكن f هي حل المعادلة (1). من أجل كل عدد حقيقي $x \notin \{-1, 1\}$ ، نقوم بإجراء التّبدلين البسيطين التّالين للمتغير:

• نضع $t = \frac{x-3}{x+1}$ فنجد أنّ $x = \frac{3+t}{1-t}$ من أجل $t \notin \{-1, 1\}$ ، والمعادلة (1) تكتب على الشكل:

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t} \dots (*)$$

• نضع $t = \frac{x+3}{1-x}$ فنجد أنّ $x = \frac{t-3}{1+t}$ من أجل $t \notin \{-1, 1\}$ ، والمعادلة (1) تكتب على الشكل:

$$f(t) + f\left(\frac{t+3}{1-t}\right) = \frac{t-3}{1+t} \dots (**)$$

• بجمع المعادلتين (*) و (**) طرفاً لطرف نحصل على: $f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) + f(t) + f\left(\frac{t+3}{1-t}\right) = \frac{3+t}{1-t} + \frac{t-3}{1+t}$

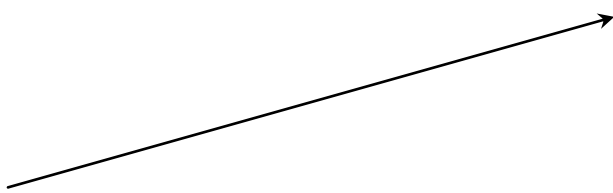
ومن كون $f\left(\frac{t+3}{1-t}\right) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = t$ (من المعادلة (1))، نحصل على $2f(t) + t = \frac{3+t}{1-t} + \frac{t-3}{1+t}$ ومنه

$$f(x) = \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{2} = \frac{x^3+7x}{2-2x^2} \text{ بـ: } \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

(2) أ) نهايات الدّالة g هي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3+7x} = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي لـ C_g في

جوار $-\infty$ ، كذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^3+7x} = +\infty$

- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $g'(x) = (3x^2 + 7)e^{x^3+7x}$ ، وكون $e^{x^3+7x} > 0$ و $3x^2 + 7 > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، وجدول تغيّرات الدالة f هو:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

- (3) معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ تُعطى بـ: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي: $(T): y = 7x + 1$

- (4) التمثيل البياني في الشكل الموالي:

