

تمارين الأعداد المركبة

في البكالوريا

من 2008 إلى 2019

شعبة : علوم تجريبية

كتابة : خالرجا خاشة

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$.

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$. بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: 1 ، z_1 و z_2 .

ليكن z العدد المركب حيث: $z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$.

أ- إنطلاقاً من التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ومن الخاصية $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

ب- أكتب z على الشكل الأسّي.

ج- أكتب z على الشكل المثلثي واستنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين نسبته وزاويته.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

(2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على

الترتيب حيث: $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$.

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

(3) لتكن C النقطة ذات الاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4 - i}{1 + i}$.

أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

(4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$

النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

ب- تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$.

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ و z عدد مركب.

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$.

(2) نضع: $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

ب- أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج- استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) أ- n عدد طبيعي، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً.

ب- أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$.

(2) نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

ب- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3})$$

أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- جد الطويلة وعمدة للعدد المركب z حيث: $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

د- أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحتيتهما على الترتيب: $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$

(1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

(2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث: $z' = 2iz + 6 + 3i$

أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب- عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -2); (C, 2)\}$.

أ- عين z_D لاحقة النقطة D .

ب- عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

(4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي

يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

ب- أعط تفسيراً هندسياً لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ) .

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي.

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقتها على الترتيب:

$$z_D = -z_B \quad \text{و} \quad z_C = -z_A \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = 3 + 3i$$

أ- بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O .

ب- عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B .

ج- بين أن النقط A ، O و C في استقامة وكذلك النقط B ، O و D .

د- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطة A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_C = -4 + i \quad \text{و} \quad z_B = 2 + 3i \quad , \quad z_A = -i$$

(1) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب- عيّن طوليلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) نعتبر التحويل النقطي T في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب- ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

(3) لتكن D ذات الاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- بين أن النقطة A ، C و D في استقامة.

ب- عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

ج- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

التمرين الثامن

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطة A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_C = 4i \quad \text{و} \quad z_B = 3 + 2i \quad , \quad z_A = 3 - 2i$$

(1) أ- علم النقطة A ، B و C .

ب- ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك.

ج- عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

(2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقاط M من المستوى التي تحقق : $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$

(3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب- لتكن M نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب z .

ج- عيّن مجموعة النقطة M من المستوى التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

التمرين التاسع

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$ (حيث $z \neq 2 - 3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

(2) ينسب المستوى المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$$z_B = 1 - i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_A = 1 + i\sqrt{5}$$

- تحقق أن A و B تنتمي إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(3) نرفق بكل نقطة M من المستوى لاحقتها z ، النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف

قطرها . تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

$$(1) \quad P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72 \text{ حيث: } z \text{ كثير حدود للمتغير المركب } z$$

أ. تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب. حدد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

ج. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 6, \quad z_B = 3 + i\sqrt{3}, \quad \text{و} \quad z_C = 3 - i\sqrt{3}$$

أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب. أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

ج. استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ. جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب. عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

ج. بين أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$$(I) \quad z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \text{ حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي.}$$

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_B = 1 - i\sqrt{3}, \quad \text{و} \quad z_C = 4 + i\sqrt{3}$$

أ. أنشئ النقط A ، B و C .

ب. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي

مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج. عين لاحقة النقطة G مرجع الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$ ، ثم أنشئ G .

د. أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: $(E) \quad z^2 + 4z + 13 = 0$

(1) تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر.

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب.

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

$$\text{أ. بين أن: } z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

ب. أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

(3) لتكن النقطة D حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$.

أ- بين أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب- أحسب z_D لاحقة النقطة D .

ج- بين أن $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثالث عشر

[باك 2014] [1م]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

ب- أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

ج- بين أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

د- أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- أكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب- عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A ، C و C' في إستقامة.

ج- عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الرابع عشر

[باك 2014] [2م]

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_C = 1 - 2i$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

ب- جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

ج- أحسب مساحة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- عين الكتابة المركبة للتشابه S .

ب- بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

(4) M نقطة لاحقتها z ، عين مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz + 1 + 2i|$.

(I) عين العددين المركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$
 مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) أـ أكتب z_C و z_A على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

بـ تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي .

(2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$

أـ حدد النسبة وزاوية التشابه S الذي مركزه O ويحول D إلى A .

بـ أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يسمح $\mathbb{R}^+$.

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_C = -(z_A + z_B), \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ حيث } z_C \text{ و } z_B, z_A$$

(1) أـ أكتب كلا من العددين المركبين z_C و z_B على الشكل الأسّي .

بـ استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

جـ أنشئ الدائرة (γ) والنقط A ، B و C .

(2) أـ تحقق أن : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

بـ استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

جـ عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

(3) أـ عين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .

بـ أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحققتها العدد المركب z

حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحققتها العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z-2}{z-1}$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

(2) النقطتان A و B لاحقتهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث: $z_1 = 1-i$, $z_2 = \overline{z_1}$.

أ. أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.

ب. بين أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يطلب تعيين زاوية له.

(3) نضع: $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتهما 2 و 1 على الترتيب.

عين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور الترتيب ثم أنشئ (Γ) .

(4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ. عين طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ وعناصره المميزة.

ب. أكتب العبارة المركبة للتحويل S .

ج. عين ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A , B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب: $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$.

أ. أكتب z_A , z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب. بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) أ. عين لاحققة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم حدد بدقة طبيعته.

ب. عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_A| = |z - z_B|$.

ج. عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على، ثم تحقق

$A \in (\Gamma)$ أن

(1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

أ. تحقق أن: $P(2\sqrt{3}) = 0$.

ب. جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$.

ج. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A , B و C نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب:

$z_A = -\sqrt{3} + 3i$, $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ و $z_C = 2\sqrt{3}$

أ. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب. بين أنه يوجد دوران R مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته.

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC .

د- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

(3) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث: $\arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين العشررون

[باك 2016] [د2] [م2]

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(E) \quad 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

(1) أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب:

$$z_D = -\frac{5}{2}, \quad z_C = -1, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بدأكتب كلا من العددين z_B و z_A على الشكل الأسّي.

ب- أنشئ النقط A, B, C و D .

ج- أثبت أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$.

د- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ولتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC .

(4) عين طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 = kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين الواحد والعشرون

[باك 2017] [دع] [م1]

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$.

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها: $z_A = 2 - 2i$, $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$.

(1) أكتب كلا من العددين z_B و z_A على الشكل الأسّي.

(2) عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث: $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

(4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h .

عين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

التمرين الثاني والعشرون

[باك 2017] [دع] [م2]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

(1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي: $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$.

$$(2) \text{ من أجل كل عدد مركب } z, (z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2.$$

$$(3) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1.$$

$$(4) S \text{ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة } \Omega \text{ ذات اللاحقة } 1 \text{ ونسبته } 3 \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2}.$$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

$$(5) \text{ من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان } z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha) \text{ فإن } \arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح.}$$

[باك 2017] [د إ] [م1]

التمرين الثالث و العشرون

$$(I) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } (z-2)(z^2+2z+4)=0.$$

$$(II) \text{ المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{u}, \vec{v}) \text{ حيث : } \|\vec{u}\| = 2cm.$$

$$\text{نعتبر النقط } A, B \text{ و } C \text{ التي للاحقاتها : } z_A = 2, z_B = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = \bar{z}_B.$$

$$(1) \text{ أ- أكتب } z_B \text{ على الشكل الأسّي، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد المركب } z_C.$$

$$\text{ب- عين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث } ABC, \text{ ثم أنشئ النقط } A, B \text{ و } C.$$

$$(2) \text{ ليكن } S \text{ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة } O \text{ ونسبته } \frac{1}{2} \text{ وزاويته } \frac{2\pi}{3} \text{ ولتكن } F \text{ صورة } A \text{ بالتحويل } S.$$

$$\text{أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه } S \text{ ثم عين لاحقة كل } A', B' \text{ و } C' \text{ من صور النقط } A, B \text{ و } C \text{ على الترتيب}$$

$$\text{بالتشابه } S, \text{ ثم أنشئ في المعلم السابق النقط } A', B' \text{ و } C'.$$

$$\text{ب- أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة المثلث } A'B'C'.$$

[باك 2017] [د إ] [م2]

التمرين الرابع و العشرون

$$\text{المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{u}, \vec{v}).$$

$$\text{نعتبر النقط } A, B \text{ و } C \text{ التي للاحقاتها على الترتيب :}$$

$$z_A = -3 - 2i, z_B = 1 + i \text{ و } z_C = 4 - 3i$$

$$(1) \text{ عين النسبة وزاوية التشابه } S \text{ المباشر ذي المركز } A \text{ والذي يحول النقطة } B \text{ إلى النقطة } C.$$

$$(2) \text{ أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب } \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}, \text{ ثم استنتج طبيعة المثلث } ABC.$$

$$(3) \text{ نرمز بـ } G \text{ إلى مركز ثقل المثلث } ABC \text{ وبـ } I \text{ إلى منتصف القطعة } [AC].$$

$$\text{عين كلا من } z_G \text{ و } z_I \text{ لاحقتي النقطتين } G \text{ و } I, \text{ ثم بين أن النقط } B, G \text{ و } I \text{ في إستقامية.}$$

$$(4) \text{ نعتبر النقطة } D \text{ نظيرة النقطة } B \text{ بالنسب إلى } I. \text{ حدد بدقة طبيعة الرباعي } ABCD.$$

$$(5) \text{ نعتبر } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق : } \|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{أ- تحقق أن النقطة } C \text{ تنتمي إلى } (\Gamma).$$

$$\text{ب- عين طبيعة المجموعة } (\Gamma) \text{ ثم أنشئها.}$$

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$
- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
- (3) أ. تحقق أن : $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .
- ب. استنتج أن : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .
- (4) نسمي (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z| = \left| \overline{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$.
- عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r .

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :
- $z_A = 2 + i$ ، $z_B = 4 + i$ و $z_C = \overline{z_A}$.
- (1) تحقق أن : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .
- (2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث : $\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$
- بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع وأحسب z_D .
- (3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D .
- (4) عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$.
- (II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها : i ، $2 - i$ و $2 + i$ على الترتيب .
- (1) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2 + i$ نضع : $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$.
- أ. عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $|f(z)| = \frac{1}{2}$.

بـ بين أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

(3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أـ عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r وبين أن النقط D ، A و C في إستقامية .
بـ استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين الرابع عشر

[باك 2019] [2م]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2z_A$.
(1) أـ أكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي .

بـ أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

(2) أـ T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T .
بـ استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

(3) أكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي .

(4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا .

(5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A وتختلف عن C .

عين (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما