

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$
- (1) احسب u_1 ، u_2 و u_3
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$
- (3) (v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$
- (3) احسب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n
- حيث: $S''_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$
- II. نعتبر في هذا الجزء من أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$
- (1) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و v_n
- (2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 3
- (ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $v_n \equiv 0[3]$
- (ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما
- (3) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $S''_n \equiv S'_n[3]$

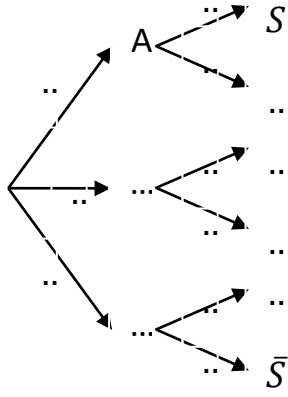
التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z :
- $$(E): \dots z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$$
- (أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه ،
- (ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، تعطى الحلول على الشكل الأسّي..
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D
- (3) التي لاحتقاتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6})}$ ، $z_C = 2i$ و $z_D = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$
- (أ) بين العددين المركبين z_A و z_B مترافقان واستنتج أن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث:
- $$z - z_A = \frac{1}{\bar{z} - z_B}$$
- (ب) برر وجود التشابه المباشر S الذي يحول النقطة A إلى النقطة B والنقطة O إلى النقطة D ، ثم جد العبارة المركبة له مستنتجا عناصره المميزة
- (ج) بين أن النقط A ، C و D في استقامية واستنتج العناصر المميزة للتحاكي h الذي مركزه C ويحول D إلى A وأن B هي صورة D بتشابه مباشر مركزه C محددا نسبته وزاوية له.
- (د) (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$
- عين صورة المجموعة (δ) بالتحويل S .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- يقوم متجر ببيع جزء من مدخراته من قطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع من السلع x ، y و z تمثل السلعة x ربع المدخرات بينما y ثلثها وتمثل z الباقي ، كانت السلعة تحوي عيوب تشمل 40% من السلعة x ، 75% من السلعة y و 24% من السلعة z ، أخذ زبون قطعة عشوائيا.
- لتكن الحوادث التالية:

الحادثة A : "أخذ الزبون القطعة من السلعة x "



- الحادثة B : " أخذ الزبون القطعة من السلعة y "
 الحادثة C : " أخذ الزبون القطعة من السلعة z "
 الحادثة S : " القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوباً "
 (1) أ) أتمم شجرة الاحتمالات لهذه التجربة

(ب) ما هو احتمال أن تكون السلعة تحوي عيباً ثم استنتج نسبة السلع السليمة
 (ج) القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوباً ، ما احتمال أن تكون القطعة من السلعة z
 (د) علماً أن 180 هو إجمالي عدد القطع المعروضة للبيع ، أنقل ثم أكمل الجدول التالي:

نوع القطعة	x	y	z	المجموع
عدد القطع				
عدد القطع ذات عيوب				81

- (2) بسبب العيوب الواضحة اضطر صاحب المتجر عزل هذه القطع وعرضها للبيع بتخفيضات هامة ، سعر القطعة x هو 65 DA ، سعر القطعة y هو 80 DA وسعر القطعة z هو 75 DA
 نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل من هذه الإمكانيات لبيع قطعتين معا مخفضتين سعرهما الإجمالي
 أ) ما هي عدد الطرائق الممكنة لبيع قطعتين معا من السلعة المخفضة
 ب) ما هي قيم X الممكنة (توجد ست قيم)
 ج) أكتب قانون احتمال للمتغير العشوائي X
 د) أحسب الأمل الرياضياتي ، التباين والانحراف المعياري

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$

- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم أنشئ جدول تغيراتها .
 (2) أثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$
 (3) استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

- (1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وفسرها هندسياً .
 (2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .
 (3) تعطى g دالة موجبة تماماً على المجال $[0; +\infty[$
 أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ ، ثم أعط حصرًا لـ $f(\alpha)$
 ب) استنتج أنه من أجل كل x من $[0; 1]$ فإن: $f(x) \in [0; 1]$
 ج) بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن: $f(x) - x = \frac{(1-x) \cdot g(x)}{e^x - x}$ ، عين دستور الدالة g
 د) استنتج وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x$ على المجال $[0; +\infty[$.
 (4) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نأخذ: $\|\vec{i}\| = 5 \text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = 10 \text{ cm}$
 أ) تحقق أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{1}{e-1}(x-1) + 1$
 ب) أنشئ (Δ) ، (T) و (C) في نفس المعلم
 ج) أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المغلق للمستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ)
 د) ناقش بيانياً وهذا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد الحلول ومجال انتمائها للمعادلة (E) التالية:

$$(E): f(x) = mx + 1 - m$$

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

- (1) بين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى وحدد اتجاه تغيرها
 (2) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أوجد نهايتها
 (ملاحظة: في هذا الجزء يمكنك توظيف نتائج السؤالين (3) ب) و (3) د) من الجزء II .)

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(3; 1; 0)$ ، $B(1; 2; 0)$ ، $C(3; 2; 1)$ و $D(0; 0; m)$ حيث m عدد حقيقي موجب.

- (1) أ) احسب الجداء السلمي $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ، ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\sin \widehat{ABC}$ و $\cos \widehat{ABC}$.
ب) احسب مساحة المثلث ABC .
- (2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1; 2; -2)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
- (3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، وأن حجمه $V_{ABCD} = \frac{2m+5}{6} u \cdot v$ (وحدة الحجم).
- (4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$.
أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m موجب، لدينا: (S_m) سطح كرة، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
ب) عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) .
ج) اكتب معادلة للمستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_2) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.
- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا: $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
 - (2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(k; k+1) = 1$.
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2$.
 - (3) أ) عين من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم $PGCD(2k+1; 2k+3)$.
ب) عين $PGCD(S_{2k+1}; S_{2k+2})$.
 - (4) أ) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n : $PGCD(S_n; S_{n+1})$.
ب) استنتج $PGCD(S_{2017}; S_{2018})$.
(ملاحظة: يمكن استعمال المبرهنة: $PGCD(a; b)$ يكافئ $PGCD(a^2; b^2)$)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) ليكن $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z والمعرف كما يلي: $p(z) = z^2 - \left(\frac{5+i}{2}\right)z + 1 + i$.
أ) احسب $p(2)$.
ب) عين العددين المركبين a و b حيث: $p(z) = (z-2)(az+b)$.
ج) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $p(z) = 0$ (نضع z_0 الحل الحقيقي و z' الحل الآخر).
- (2) نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. الوحدة 5 cm .
نضع $z_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $z_{n+1} = z' z_n$ (حيث z' حل المعادلة في السؤال الأول) ونسمي النقطة A_n صورة العدد المركب z_n .
أ) احسب الأعداد المركبة z_1, z_2, z_3 و z_4 .
ب) مثل النقط A_0, A_1, A_2, A_3 و A_4 .
ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_n = |z_n|$.
أ) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .
ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج حول تقارب المتتالية (u_n) ؟
د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.
- (3) استنتج طبيعة المثلث $OA_n A_{n+1}$.
- (5) من أجل كل عدد طبيعي n نسمي L_n طول الخط المنكسر المحدد بالنقط $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.

(أ) احسب الأطوال: A_0A_1 ، A_1A_2 و A_2A_3 .

(ب) تحقق أن: $\frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ج) عبر عن L_n بدلالة n ثم حدد نهاية L_n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) باستعمال قابلية اشتقاق الدالة $\ln$ عند 1، بين أن: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \right) = 1$ ، ثم استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 1$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x \geq 1)$ لدينا: $f(x) = \ln x + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$.

(ب) من أجل $(x \geq 1)$ ، بين أن: $x - 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left(x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right)$.

(ج) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1، وفسر النتيجة بيانياً.

(2) (أ) احسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، لدينا: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) ارسم المنحنى (C) .

(3) ليكن S مساحة الحيز D المستوي المحدد بالمنحنى (C) ، محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = 1$

و $x = 3$ ، ولتكن A و B نقطتان من المنحنى (C) فاصلتهما على الترتيب 1 و 3،

والنقطتان $P(1; 2 \ln(1 + \sqrt{2}))$ و $Q(3; 0)$ من المستوي.

(أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث ABQ .

(ب) استنتج أن $2 \ln(1 + \sqrt{2}) \leq S \leq 4 \ln(1 + \sqrt{2})$.

(III) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا: $g(x) \geq 1$.

(2) (أ) بين أن: $x = (g \circ f)(x)$ ، ثم بين أنه إذا كانت النقطة $M(x; y)$ من المنحنى (C) فإن النقطة $M'(y; x)$ من المنحنى (C_g) .

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C_g) ؟ أنشئ (C_g) في المعلم السابق.

(3) ليكن S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمتين التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$ و $y = 3$.

(أ) بين أن: $S' = 6 \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^{2 \ln(1 + \sqrt{2})} g(x) dx$.

(ب) احسب $\int_0^{2 \ln(1 + \sqrt{2})} g(x) dx$ ثم استنتج قيمة S .