

الدوال

①

الحالة 01: $u(x) = f(x) + 1$
نستنتج (E_u) من (E_f) بالنسبة
في الشعاع $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ أي $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

الحالة 02: $v(x) = \sqrt{x+2}$
نستنتج (E_v) بالنسبة
في الشعاع $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

الحالة 03: $q(x) = 1 + \sqrt{x-1}$
نستنتج (E_q) بالنسبة
في الشعاع $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

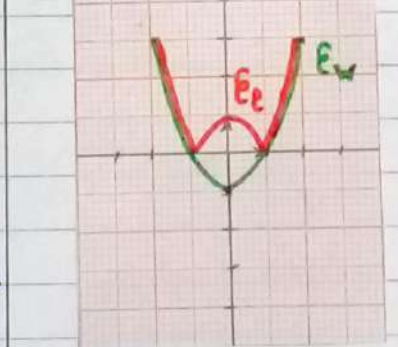
الحالة 04: $h(x) = \sqrt{-x}$
 $h(x) = f(-x)$

نستنتج أن (E_h) هو نظير (E_f)
بالنسبة لمحور الترتيب

الحالة 05: $K(x) = -\sqrt{x}$
نستنتج أن (E_K) هو نظير (E_f)
بالنسبة لمحور الفواصل

الحالة 06: $m(x) = -\sqrt{-x}$
نستنتج أن (E_m) هو نظير (E_f)
بالنسبة لمبدأ المعلم

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي



حالة: $L(x) = |w(x)|$
1- على المجالات التي يكون فيها $w(x) \geq 0$ أي يكون E_w على محور الفواصل أو فوقه.

المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس
ولتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على $[0, +\infty[$
عبارتها: $f(x) = \sqrt{x}$ ولتكن الدالة w
المعرفة على R بحيث: $w(x) = x^2 - 1$
ولتكن الدالة T المعرفة على R بالعلاقة:
 $T(x) = x^3 - 3x^2$.

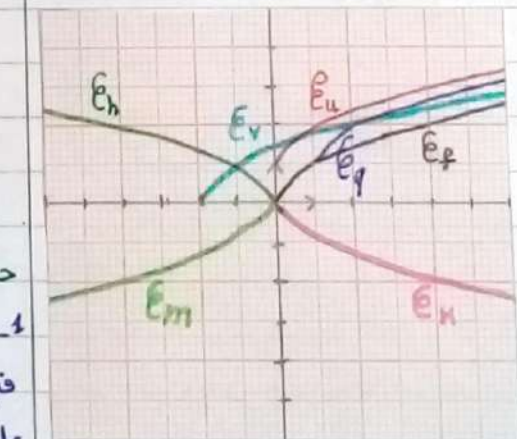
• انطلاقاً من المنحنى البياني للدالة f
استنتج رسم منحنيات الدوال الآتية
دون دراستها.

$q(x) = 1 + \sqrt{x-1}$	$v(x) = \sqrt{x+2}$	$u(x) = 1 + \sqrt{x}$
$m(x) = -\sqrt{x}$	$K(x) = -\sqrt{x}$	$h(x) = \sqrt{-x}$

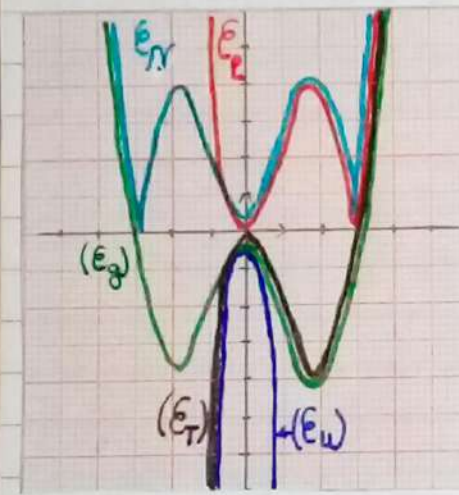
• انطلاقاً من منحنى الدالة w : أرسم
منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.
 $L(x) = |w(x)|$

• انطلاقاً من منحنى الدالة T : أرسم
منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$g(x) = T(x)$	$L(x) = T(x) $
$u(x) = T(- x)$	$N(x) = T(x) $



نحصل على $L(x) = w(x)$ ومنه (E_L)
ينطبق على (E_w) .
2- على المجالات التي يكون فيها $w(x) < 0$ أي يكون (E_w) تحت محور
الفواصل $L(x) = |w(x)|$
3- الدالة $L(x)$ لا تقبل الاشتقاق عند
 $x = 1$ و $x = -1$ لأن الدالة تقبل
نصفاً مماس.



الحالة 1: $g(x) = T(|x|)$

ملاحظة:
غالباً يطلب إثبات أن الدالة
زوجية أي: $f(-x) = f(x)$

1- إذا كان $x > 0$ و $x \in D_f$ (الجزء
الموجب من D_f) نحصل على:
 $g(x) = T(x)$ ومنه (E_g) ينطبق على (E_f)
2- نكمل الجزء المتبقي من (E_g)
بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب
لأن g زوجية.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\infty) \cdot (-2) = +\infty$$

أي

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1}) = \infty \text{ ع. ح.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty) (4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

-2

حساب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 1} + x - 4x) = \infty \text{ ع. ح.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 1} - 3x)$$

ملاحظة:

لما نجد $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + \dots} \pm bx + c)$
تحل بالمرافق.
إذا كان $|a| = \sqrt{|a|}$
والأصل بالتحليل.

$$\sqrt{9} = |3| = -3$$

تحل بالمرافق:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 - 1} - 3x)(\sqrt{9x^2 - 1} + 3x)}{(\sqrt{9x^2 - 1} + 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \left(\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}} + 3\right)} = \frac{-1}{x \cdot 6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = 0$$

فـ دالة معرفة على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x + \sqrt{9x^2 - 1}$$

البيان (E₁)

1. حدد نهايات عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (2x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (2x)]$$

3. استنتج أن (E₁) له مستقيمان

مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما.

ملاحظة:

نكتب الدالة بدون رمز
القيمة المطلقة لتسهيل
العمل عليها

كتابة دون رمز القيمة المطلقة:

	$-\infty$	$-1/3$	$1/3$	$+\infty$
$9x^2 - 1$	+	+	-	+

القيمة المطلقة تتبع لنا كالتالي:

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{9x^2 - 1} & \text{لما } x \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[\\ f(x) = x + \sqrt{1 - 9x^2} & \text{لما } x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \end{cases}$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1}) = \infty \text{ ع. ح.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + |x| \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$$

$$\begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x \leq 0 \end{cases}$$

عند $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

الحالة 2: $u(x) = T(-|x|)$

1. إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_T$ الجزء

السالب من D_T نحصل على:

$$u(x) = T(x) \text{ ومنه } (E_u) \text{ ينطبق على } (E_T).$$

2. نكمل الجزء المتبقي من (E_u)

بالتناظر بالنسبة إلى محور التناظر

لأن u زوجية.

الحالة 3: $L(x) = |T'(x)|$

1. على المجالات التي تكون فيها

$$T'(x) \geq 0 \text{ أي يكون فيها } (E_T) \text{ على محور الفواصل أو فوقه.}$$

نحصل على: $L(x) = T'(x)$

2. على المجالات التي تكون فيها

$$T'(x) < 0 \text{ يكون } (E_T) \text{ متناظرا لـ } (E_T)$$

بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 4: $N(x) = |T'(|x|)|$

1. (E_N) يقع فوق محور الفواصل

لأن $|T'(x)|$ الدالة N قيمها

كلها موجبة لأن: $N(x) \geq 0$

أي منحناها البياني (E_N) يقع

فوق محور الفواصل إلى الجزء

السالب يناظر بالنسبة إلى (x, x') .

2. الدالة N زوجية $T'(|x|)$

أي يكفي رسم الجزء من $[0, +\infty[$

والجزء الآخر يناظر بالنسبة

لمحور التناظر (y, y') .

طرق إزالة حالة عدم التعيين.

• بالإختزال.

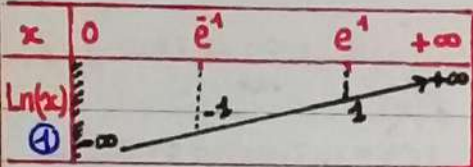
• بالتحليل.

• بالمرافق.

• بالعدد المشتق.

الحالة 2: $g'(x) = f(\ln x)$
 $g = f \circ u$ / $u(x) = \ln x$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	③	+	-	+

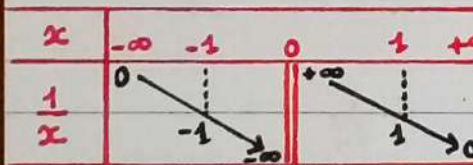


x	0	e^{-1}	e^1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-	+

الدالة g :
 متزايدة تمامًا على: $]0, e^{-1}] \cup [e, +\infty[$
 و متناقصة تمامًا على: $[e^{-1}, e]$

الحالة 3: $g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	+	+	-

الدالة g :
 متناقصة تمامًا على: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
 و متزايدة تمامًا على: $] -1, 0[\cup]0, 1[$

ملاحظة:

معادلة تفاضلية من الشكل:
 $y' = ay$ حلها $f(x) = ce^{ax}$ حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت حقيقي.
 معادلة تفاضلية من الشكل:
 $y' = ay + b$ حلها $f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$

(5)

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$
 وإشارتها:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	+	-	-	+

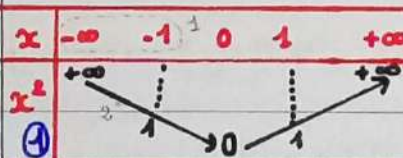
لتكن الدالة g المعرفة في كل حالة بـ D_g وعبارة مشتقتها
 $D_g = \mathbb{R} : g'(x) = f(x^2)$ ✓
 $D_g =]0, +\infty[: g'(x) = f(\ln x)$ ✓
 $D_g = \mathbb{R}^* : g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ✓

عين إشارة $g'(x)$ ثم اعط تغيرات g في كل حالة.

الخطوات

- جدول تغيرات البنت $u(x) = -x$
- استنتاج السوابق بالدالة البنت

الحالة 1: $g'(x) = f(x^2)$
 $g = f \circ u$ / $u(x) = x^2$



x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	②	+	-	+

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	-	+	+

الدالة g :
 متزايدة تمامًا على: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
 متناقصة تمامًا على: $] -1, 1[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x]$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{9x^2 - 1} + 3x] = 0$ ع. 2

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}} + 3)} = \frac{1}{x \cdot 6} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 0$

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
 سعيدة بانضمامكم لي

استنتاج أن f مستقيم مقاربان
 مائلان:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = 0$ أي:

$y = 4x$ (د) م.م. مائل بجوارب $+\infty$.

بما أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = 0$ أي:

$y = -2x$ (د) م.م. مائل بجوارب $-\infty$.

1- بين أنه يوجد مماس أو ألتز للمنفح في يعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.

نحل المعادلة:

$a \cdot f'(x_0) = -1$

(4)

2- بين أنه يوجد مماس أو ألتز للمنفح في يشمل النقطة ذات الإحداثيين (α, β) .

نحل المعادلة

$\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$

لتعين قيمة أو قيم x_0 .

6

حل المعادلة التفاضلية:

$$2y' + y = 0$$

(ب) عين الحل الخاص f الذي يحقق

$$f(\ln 4) = 1$$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 4$$

جد معادلة تفاضلية من الشكل

$$y' = ay + b$$

حيث تكون الدالة f

حلا لهذه المعادلة.

1

حل المعادلة التفاضلية:

$$f(x) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

(ب) الحل الخاص:

$$f(\ln 4) = 1$$

لدينا

أي

$$C \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln 4} = 1$$

$$C \cdot e^{\ln(4)^{-1/2}} = 1$$

$$C \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = 1$$

$$C = 2$$

أي

$$f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

2

إيجاد معادلة تفاضلية:

$$f(x) = C \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$f(x) = 3 \cdot e^{-2x} - \left(-\frac{8}{2}\right)$$

بالمطابقة:

$$C = 3; a = -2; b = -8$$

$$y' = -2y - 8$$

9

بين أن $f(x) = 3$ تقبل حل وحيد α

حيث $1,1 < \alpha < 1,2$

نحسب $f(1,1)$ و $f(1,2)$

نجد النتائج محصورة في 3.

التحقق:

$$f(x) = 3 \cdot e^{-2x} - 4$$

$$f'(x) = -6 \cdot e^{-2x}$$

$$-6 \cdot e^{-2x} = -2(3 \cdot e^{-2x} - 4) - 8$$

$$= -6 \cdot e^{-2x} + 8 - 8$$

$$= -6 \cdot e^{-2x}$$

العلاقة:

$$f(x) = 3 \cdot e^{-2x} - 4$$

حل للمعادلة

$$y' = -2y - 8$$

7

استنتج أنه يوجد تحويل نقطي

بسيط يحول E إلى E' .

حيث $g(x) = f(-x)$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

(E') يناظر (E) بالنسبة إلى

محور الترتيب.

8

M و N نقطتان من (E') ذواتا

الفاصلتين x و $-x$ على الترتيب

مع $x \in \mathbb{R}^*$

بين أن المستقيمين (MN) و (T)

متوازيان.

$$(T): y = -\frac{1}{6}x + \ln 2$$

ولدينا:

$$M(x; \ln(1+e^x) - \frac{2}{3}x)$$

$$N(-x; \ln(1+e^x) - \frac{1}{3}x)$$

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-1/3x}{2x} = -\frac{1}{6} = f'(0)$$

أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

المتتاليات

العبارة صعبة إذن:

الخطة البديلة

بما أن الدالة المرفقة في متزايدة
تماما على $[0, 3]$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$$

الهدف

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{18}{7} \leq 3$$

ومنه

$$0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

أي:

$P(n+1)$ محققة و

$$0 \leq u_n \leq 3$$

أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$4^n + 2 \text{ مضاعف للعدد } 3$$

من أجل $n=0$

$$4^0 + 2 = 3$$

$P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل n :

$$4^n + 2 = 3K \Rightarrow 4^n = 3K - 2$$

ونبرهن صحة: $P(n+1)$

$$4^{n+1} + 2 = 3K$$

أي

الفكرة تبدا ب:

$$4^{n+1} + 2 = 4^n \cdot 4 + 2$$

$$= 4(3K - 2) + 2$$

$$= 12K - 8 + 2$$

$$= 12K - 6$$

$$= 3(4K - 2)$$

$$4^{n+1} + 2 = 3K' \mid K' = 4K - 2$$

الهدف

ومنه $P(n+1)$ محققة

$$4^n + 2 = 3K \text{ أي}$$

$$v_n = 3$$

لدينا

الفكرة تبدا ب:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) \left[u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + 1$$

الهدف

$$= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot v_n + 1$$

$$= \frac{2}{3} \times 3 + 1$$

أي

$$v_{n+1} = 3$$

ومنه:

$P(n+1)$ محققة أي:

v_n متتالية ثابتة.

الدالة f معرفة على $[0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$$

ومتزايدة تماما على مجال $[0, +\infty[$

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ

$$u_0 = 3 \text{ ومن أجل } n \in \mathbb{N} \text{ لدينا}$$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

برهن بالتراجع أنه من أجل

$$0 \leq u_n \leq 3 : n \in \mathbb{N} \text{ كل}$$

من أجل $n=0$

$$0 \leq 3 \leq 3$$

محققة.

نفرض أن $P(n)$ محققة من

$$0 \leq u_n \leq 3 : n \in \mathbb{N}$$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

ضع تخمين حول اتجاه تغير u_n وتقاربها.

المتتالية (متناقصة/متزايدة) و
تتقارب نحو فاصلة تقاطع (x)

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + 1$$

u_n معرفة بحددها الأول $u_0 = 2$

① أحسب u_1, u_2, u_3

② (v_n) المتتالية العددية المعرفة من

أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

برهن بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة.

البرهان بالتراجع:

نكون v_n ثابتة إذا كانت جميع

حدودها متساوية أي: $u_{n+1} = u_n$

معناه نفس القيمة $v_{n+1} = v_n = v_0$

$$v_0 = u_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3$$

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_1 = 3 \end{cases}$$

من أجل $n=0$

$P(0)$ محققة

$$v_1 = v_0$$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل

$$v_n = 3$$

n :

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$v_{n+1} = 3$$

أحسب نهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ مع العلم $3 < U_n < 4$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l.$$

$$3 + \sqrt{l-3} = l$$

$$\sqrt{l-3} = l-3$$

شروط ضروري: $l-3 > 0$

$$l-3 = (l-3)^2$$

$$-l^2 + 7l - 12 = 0$$

$$\begin{cases} l=3 \text{ مرفوض } \times \\ l=4 \text{ مقبول } \checkmark \end{cases}$$

$$f(U_n) = \frac{2U_n^2}{U_n+4} = U_{n+1} \quad \text{لدينا}$$

$$0 < U_n < 3$$

$$7U_{n+1} - 6U_n = 7 \left(\frac{2U_n^2}{U_n+4} \right) - 6U_n$$

و استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$0 < U_{n+1} < \frac{6}{7} U_n$$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$0 < U_n < 3 \cdot \left(\frac{6}{7} \right)^n$$

ج- أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما

يوؤول n إلى $+\infty$.

ل- دراسة الإشارة:

$$7U_{n+1} - 6U_n = 7 \left(\frac{2U_n^2}{U_n+4} \right) - 6U_n$$

$$= \frac{8U_n^2 - 24U_n}{U_n+4}$$

$$0 < U_n < 3 \quad \text{المقام:}$$

$$4 < U_n+4 < 7$$

موجب على مجال $[0, 3]$

البسط:

$$U_n(8U_n - 24)$$

U_n	$-\infty$	0	3	$+\infty$
	$+$	0	$-$	$+$

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
	$-$	0	$+$	0

$$0 < U_n < 3$$

من الجدول U_n متزايدة تقارباً أعلى مجال $]0, 3[$.

2- حساب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2U_n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

متقاربة نحو نهاية l .

$$\sqrt{2l+3} = l \quad l > 0$$

$$2l+3 = l^2$$

$$-l^2 + 2l + 3 = 0$$

حليين مع U_n متزايدة

$$\begin{cases} l_1 = 3 \checkmark \\ l_2 = -1 \times \end{cases}$$

$$U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n-3}$$

برهن من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n-3} + U_n - 3}$$

لبرهان:

$$U_{n+1} - U_n = 3 + \sqrt{U_n-3} - U_n = \sqrt{U_n-3} - (U_n-3)$$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$$\frac{(\sqrt{U_n-3} - (U_n-3))(\sqrt{U_n-3} + (U_n-3))}{(\sqrt{U_n-3} + (U_n-3))}$$

$$\frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n-3} + (U_n-3)}$$

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

1) ندرس إشارة $U_{n+1} - U_n$.

2) نقارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1.

التقارب:

تقبل دون برهان

إذا كانت U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

إذا كان U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

لدينا: $U_n = 1$ / $0 < U_n < 3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = \sqrt{2U_n+3}$$

أدرس اتجاه تغير المتتالية.

أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

1. اتجاه التغير:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n+3} - U_n$$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$$\frac{(\sqrt{2U_n+3} - U_n)(\sqrt{2U_n+3} + U_n)}{(\sqrt{2U_n+3} + U_n)}$$

$$\frac{(\sqrt{2U_n+3})^2 - U_n^2}{\sqrt{2U_n+3} + U_n}$$

$$0 < U_n < 3 \quad \text{جذر موجب}$$

معناه

$$\sqrt{2U_n+3} + U_n > 0$$

ومنه:

إشارة الفرق من إشارة البسط.

$$-U_n^2 + 2U_n + 3 = 0$$

نضع $x = U_n$ (للتسهيل).

$$0 \times \frac{1}{4} \leq \frac{2 - U_n}{2 + \sqrt{U_n + 2}} \leq \frac{2 - U_n}{2}$$

من (A):

$$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$$

أي

$$2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$$

في البرهان:

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

الفكرة: البرهان بالتراجع:

التحقق P(1).

$$0 \leq 1 \leq 1$$

محققة.

نفرض أن P(n) محققة:

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ونبرهن صحة P(n+1)

$$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

نضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$0 \leq \frac{2 - U_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ولدينا:

من الجواب السابق: الفكرة.

$$2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$$

ومنه

$$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إذن

$$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

معناه

محققة P(n+1)

ومنه

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

إستنتاج.

لدينا:

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq 0$$

ومنه

حسب نظرية الحصر.

نجد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

لدينا:

ولدينا:

$$0 \leq U_n \leq 2$$

متتالية متزايدة ومحدودة من

الأعلى $U_n \leq 2$.

$$2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$$

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ثم إستنتج: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

1- البرهان: مهم.

$$2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$$

لدينا:

$$2 - U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n + 2} = \frac{(2 - \sqrt{U_n + 2})(2 + \sqrt{U_n + 2})}{2 + \sqrt{U_n + 2}} = \frac{2 - U_n}{2 + \sqrt{U_n + 2}}$$

إذن

$$2 - U_{n+1} = \frac{2 - U_n}{2 + \sqrt{U_n + 2}} \dots (A)$$

لدينا:

$$0 \leq \sqrt{U_n + 2} \leq 2$$

$$2 \leq 2 + \sqrt{U_n + 2} \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{U_n + 2}} \leq \frac{1}{2}$$

ولدينا من جعة أخرى

$$0 \leq U_n \leq 2$$

$$0 \leq 2 - U_n \leq 2 \dots (2)$$

الفكرة: نضرب (2) في (1)

$$U_n(8U_n - 24) \leq 0$$

ومنه

$$7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$$

الإستنتاج:

لدينا:

$$7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$$

$$7U_{n+1} \leq 6U_n$$

$$U_{n+1} \leq \frac{6}{7} U_n$$

وأنبتنا سابقاً أن

$$0 \leq U_{n+1} \leq 3$$

ومنه

$$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7} U_n$$

ب- البرهان بالتراجع:

P(0) محققة

$$0 \leq 3 \leq 3$$

نفرض P(n) محققة

$$0 \leq U_n \leq 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

ونبرهن صحة P(n+1) أي:

$$0 \leq U_{n+1} \leq 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$$

$$0 \leq U_n \leq 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$0 \leq \frac{6}{7} U_n \leq 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^1$$

من سؤال السابق: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7} U_n$

ومنه:

$$0 \leq U_{n+1} \leq 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$$

معناه

P(n+1) محققة

إذن

$$0 \leq U_n \leq 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

ج- حساب نهاية U_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$$

قيمة البرمجة: (هـ) ↑ قيمة أمغر من 1 (0)

$$\begin{cases} U_1 = 2 \cdot q \\ U_2 = 2 \cdot q^2 \end{cases}$$

$$9(2q) = 2q^3 \\ q^3 = 9$$

$$\begin{cases} q = 3 \quad \checkmark \\ q = -3 \quad \text{مرفوض} \end{cases}$$

العدد موجب إذن الأساس موجب.

$$q = 3$$

$$U_n = 2 \cdot 3^n$$

② حساب U_n :

③ المجموع:

الحالة 01:

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n \\ S = U_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \\ = 2 \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$$

$$S = 3^{n+1} - 1$$

الحالة 02:

$$S' = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2$$

الفكرة: ثابت.

$$(U_1)^2 = (U_0 \cdot q^1)^2$$

$$(U_2)^2 = (U_0 \cdot q^2)^2$$

$$(U_3)^2 = (U_0 \cdot q^3)^2$$

$$(U_4)^2 = (U_0 \cdot q^4)^2$$

$$S' = U_0^2 + (U_0 \cdot q)^2 + (U_0 \cdot q^2)^2 + \dots + (U_0 \cdot q^n)^2 \\ = U_0^2 + U_0^2 \cdot q^2 + U_0^2 \cdot q^4 + \dots + U_0^2 \cdot q^{2n} \\ = U_0^2 [1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n}]$$

متتالية حسابية جديدة.

$$S' = U_0^2 \cdot \left[1 + \frac{(q^2)^{n+1} - 1}{q^2 - 1} \right]$$

$$S' = \frac{9^{n+1} - 1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$$

ومنه

المتتالية الهندسية

المجاميع: $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$$q \neq 1: S = U_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$q = 1: S = (n+1) \cdot U_0$$

أحسب نهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \right)^n - 6$$

استنتج أن (U_n) متقاربة.

1. حساب النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \right)^n - 6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$$

فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 6$$

2. استنتج أن U_n متقاربة:

لأن نهايتها منتهية.

(U_n) متتالية هندسية غير منتهية

حدودها الموجبة نقاما حيث:

$$U_3 = 9U_1 \quad \text{و} \quad U_0 = 2$$

① عين أساس المتتالية U_n .

② أحسب U_n بدلالة n .

③ احسب بدلالة n المجموع (S_n) .

حيث: $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

④ تعيين أساس U_n (هندسية):

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

$$\begin{cases} U_1 = U_0 \cdot q^1 \\ U_3 = U_0 \cdot q^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 2 \cdot q \dots (1) \\ U_3 = 2 \cdot q^3 \dots (2) \end{cases}$$

الفكرة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - U_n) = 0 \quad \text{ومنه: أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \quad \text{و} \quad U_0 = -1$$

وتعتبر المتتالية (v_n) حسابية.

عين حدها الأول وأساسها $v_n = \frac{1}{U_n - 2}$

البرهان أن (v_n) متتالية حسابية:

$$v_{n+1} = v_n + r$$

لدينا

$$v_n = \frac{1}{U_n - 2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{U_{n+1} - 2} - \frac{1}{U_n - 2}$$

$$= \frac{4 - U_n}{2(U_n - 2)} - \frac{1}{U_n - 2}$$

$$= \frac{2 - U_n}{2(U_n - 2)}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{U_n - 2}{U_n - 2} \right)$$

ومنه

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2}$$

حدها الأول:

$$v_0 = -\frac{1}{3}$$

ومنه

$$v_{n+1} = -\frac{1}{3} - \frac{n}{2}$$

أحسب نهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{\ln 3 - n \ln 3} + 3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln 3 - n \ln 3} + 3$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln 3}}{e^{n \ln 3}} + 3$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^1}{e^n} \right)^{\ln 3} + 3$$

والمتتاليات أحدهما متزايدة والأخرى متناقصة فهما متجاورتان.

d. عدد حقيقي غير معدوم

من أجل $n \in \mathbb{N}$ نضع:

$$v_n = u_n + \alpha$$

عين قيمة العدد α التي يكون من أجلها (v_n) متتالية هندسية

$$v_n = u_n + \alpha$$

لدينا:

ومنه:

$$u_n = v_n - \alpha$$

$$v_{n+1} = v_n \cdot q$$

ولدينا

إذن:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$$

$$= \frac{u_n - 1}{2} + \alpha$$

$$= \frac{v_n - \alpha - 1}{2} + \alpha$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \alpha$$

الهدف (متتالية)

$$-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \alpha = 0$$

ومنه

$$\alpha = 1$$

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان

من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ب:

$$u_n = \frac{n-1}{n}; v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n)

متجاورتان ثم جد نهايتهما

المشتركة.

إشارة u_n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

إشارة v_n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$$

وبما أن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

الحالة 03:

$$T_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$$

$$u_1 = u_0 \cdot q$$

$$u_2 = u_0 \cdot q^2$$

$$u_3 = u_0 \cdot q^3$$

أي

$$T_n = u_0 \cdot (u_0 \cdot q) \cdot (u_0 \cdot q^2) \cdots (u_0 \cdot q^n)$$

$$T_n = (u_0 \cdot u_0 \cdot u_0 \cdots u_0) (q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdots q^n)$$

فكرة: الفصل

$$T_n = u_0^{n+1} (q^{1+2+3+\cdots+n})$$

متتالية حسابية.

$$T_n = 2^{n+1} \left(3^{\frac{n-1+1}{2} \cdot (1+n)} \right)$$

$$T_n = 2^{n+1} \left(3^{\frac{n}{2} \cdot (n+1)} \right)$$

الحالة 04:

$$S'' = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$

$$(u_1) = u_0 \cdot q^1$$

$$(u_2) = u_0 \cdot q^2$$

$$(u_3) = u_0 \cdot q^3$$

أي

$$S'' = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 \cdot q} + \cdots + \frac{1}{u_0 \cdot q^n}$$

فكرة: $\frac{1}{u_0}$ عامل مشترك

$$S'' = \frac{1}{u_0} \left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n} \right]$$

$$S'' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right)$$

$$S'' = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3} \right)^1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

متتالية هندسية.

$$S'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{3} \right) - 1} \right)$$

$$S'' = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} - 1 \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2} \end{cases}$$

الإحتمالات

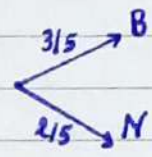
قاعدة:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

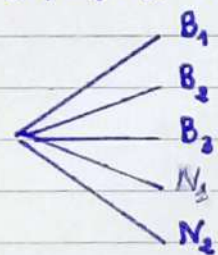
يحتوي كيس على 5 كريات (3 بيضاء و سوداوين) [لا نفرق بينها باللمس]
نسحب كرية عشوائيا ونسجل لونها
[B أبيض، N أسود].

$$\Omega = \{B, N\}$$

$$P(B) = \frac{3}{5}; P(N) = \frac{2}{5}$$



$$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}$$



كيس A به أقلام: 6 زرقاء و 4 حمراء.
كيس B به أقلام: 3 زرقاء و 5 حمراء.
نسحب بطريقة عشوائية قلما
من كل كيس
④ عدد الحالات الممكنة Ω
② أحسب احتمال كل حادثة من
الحوادث التالية:

E: "الحصول على قلمين حمراوين"
F: "الحصول على قلم واحد أحمر"
G: "الحصول على الأقل على قلم
أحمر".

عدد العناصر الممكنة:

$$10 \times 14 = 140$$

الإحتمالات:

احتمال E:

$$P(E) = \frac{4 \times 5}{140} = 0,14$$

احتمال F:

$$P(F) = \frac{4 \times 9 + 5 \times 6}{140} = 0,47$$

احتمال G:

$$P(G) = P(E) + P(F) = 0,14 + 0,47 = 0,61$$

$$P(G) = 0,61$$

صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5.
نسحب على التوالي 3 كريات بالرجاع.
④ ما هو عدد الحالات الممكنة؟
نعيد التجربة دون إرجاع.
④ ما هو عدد الحالات الممكنة؟
② ما هو احتمال الحادثة "A".
"الكرية الثانية المسحوبة تحمل
الرقم 4.

عدد القوائم الممكنة دون إرجاع:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

عدد القوائم الممكنة بالرجاع:

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

احتمال:

$$P(A) = \frac{4 \times 3}{60} = \frac{1}{5}$$

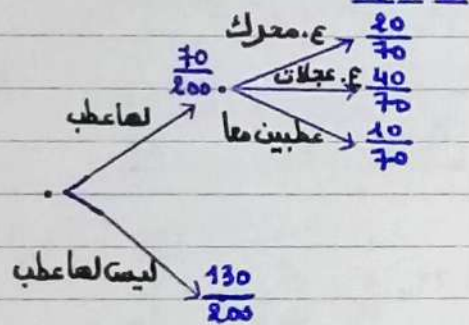
A: هي الحادثة "سيارة فيها في محرك"

B: هي الحادثة "سيارة فيها عطب في
العجلات"

④ ما هو احتمال أن السيارة يوجد فيها
على الأقل واحد من العطبين.

② ما هو احتمال أن السيارة لا يوجد فيها
أي عطب.

الرسم:



1. ما هو احتمال أن السيارة يوجد فيها
على الأقل واحد من العطبين.

من الرسم:

$$= \frac{7}{20} \times \frac{2}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{4}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{1}{7} = 0,35$$

من الحساب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{20}{200} = 0,1$$

$$P(B) = \frac{40}{200} = 0,2$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{200} = 0,05$$

$$P(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,05$$

2. ما هو احتمال أن السيارة لا يوجد
فيها أي عطب

$$= \frac{130}{200} = 0,65$$

من الحساب:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

في حظيرة للسيارات توجد 200
سيارة. 20 منها لها عطب في
المحرك و 40 منها لها عطب في
العجلات و 10 منها فيها العطبين
نختار عشوائيا سيارة من الحظيرة

نرد 1 نرد	1	2	3	4
1	+2	-3	+4	-5
2	-3	+4	-5	+6
3	+4	-5	+6	-7
4	-5	+6	-7	+8

عدد الحالات الممكنة: 16 حالة.
قيم المتغير العشوائي.

$I = \{-7, -5, -3, +2, +4, +6, +8\}$
(2) تعيين قانون الاحتمال:

x_i	-7	-5	-3	+2	+4	+6	+8
$P(x = x_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

زهرة نرد ذات أربعة أوجه $\{4, 3, 2, 1\}$
نرمز بالرمز P_i لاحتمال ظهور الوجه
ذي الرقم i $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
نعلم أن $P_i = \frac{1}{5}$
الحدود P_4, P_3, P_2, P_1 تشكل حدود
متتالية حسابية بهذا الترتيب.
(1) أحسب P_4, P_3, P_2, P_1
(2) أحسب احتمال ظهور رقم فردي.

(1) حساب الحدود: (متتالية حسابية)

$$U_2 = U_1 + r$$

$$P_2 = P_1 + r \Rightarrow P_1 = P_2 - r$$

$$P_3 = P_2 + r$$

$$P_4 = P_3 + r \Rightarrow P_4 = P_2 + 2r$$

الفكرة:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

$$\frac{1}{5} - r + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + r + \frac{1}{5} + 2r = 1$$

$$r = \frac{1}{10}$$

$$P_1 = \frac{1}{10}$$

$$P_2 = \frac{1}{5}$$

$$P_3 = \frac{3}{10}$$

$$P_4 = \frac{4}{10}$$

ومنه:

x_i	1	3	10
$P(x = x_i)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$

(3) حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i$$

$$= \sum_{i=1}^3 1 \left(\frac{10}{17} \right) + 3 \left(\frac{4}{17} \right) + 10 \left(\frac{3}{17} \right)$$

$$E(x) = 3,06$$

(4) حساب التباين:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2 \cdot P_i$$

$$= \sum_{i=1}^3 (x_i - E(x))^2 \cdot P_i$$

$$= (1 - 3,06)^2 \cdot \frac{10}{17} + (3 - 3,06)^2 \cdot \frac{4}{17} + (10 - 3,06)^2 \cdot \frac{3}{17}$$

$$V(x) = \frac{3178}{289}$$

(5) حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{3178}{289}} = 3,32$$

يرمي لاعب زهري نرد رباعي الوجه
 $\{4, 3, 2, 1\}$

نعرّف المتغير العشوائي X .

مجموع الرقمين زوجيا $\rightarrow$ يربح.

نفس مجموع الرقمين بالدينار.

مجموع الرقمين فرديا $\rightarrow$ يخسر.

نفس مجموع الرقمين بالدينار.

(1) عين قيم المتغير العشوائي X .

(2) عين قانون الاحتمال للمتغير.

(1) تعيين قيم المتغير X

الفكرة:

إنشاء جدول

Bac Rygo
www.facebook.com/bac.rygo
سعيدة بانضمامكم لي

www.dzexams.com

يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء، 4 كريات حمراء، و 10 كريات سوداء، لا تميز بينها باللمس.

- نسحب عشوائيا كرية من الصندوق فيربح صاحب:

• دينار واحد إذا كانت كرية سوداء.

• ثلاثة دنانير إذا كانت كرية حمراء.

• 10 دنانير إذا كانت كرية بيضاء.

نعرّف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربع المحتمل في اللعبة.

1- عين القيم الممكنة للمتغير X .

2- عين قانون الاحتمال للمتغير X .

3- أحسب الأمل الرياضي.

4- أحسب التباين ثم الانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

الأمل الرياضي:

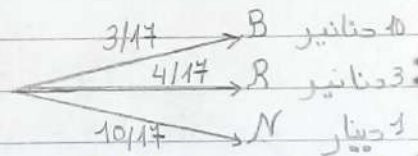
$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i$$

التباين:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2 \cdot P_i$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$



(1) قيم المتغير العشوائي x :

$\{1, 3, 10\}$

1 DA $\rightarrow N$

3 DA $\rightarrow R$

10 DA $\rightarrow B$

(2) قانون الاحتمال للمتغير x :

$$x = 1 \quad P(x = 1) = \frac{10}{17}$$

$$x = 3 \quad P(x = 3) = \frac{4}{17}$$

$$x = 10 \quad P(x = 10) = \frac{3}{17}$$

الاحتمالات الشرطية

القانون:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

احتمال B علماً أن A محققة:

$$P_A(B) = P(A|B)$$

$$x = \{0, 1, 2\}$$

② تعيين قانون الاحتمال:

$$x = \{0, 1, 2\}$$

$$P(x=0) = \frac{6}{30}$$

$$P(x=1) = \frac{18}{30}$$

$$P(x=2) = \frac{6}{30}$$

8- حساب احتمال ظهور رقم فردي لتكن A الحادثة.

"ظهور رقم فردي"

$$P(A) = P_1 + P_3$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10}$$

$$P(A) = \frac{4}{10}$$

كيس يحتوي على كرتين حمراوتين وثلاث كرات سوداء وكرة بيضاء نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون ارجاع، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء المسحوبة.

④ مثل النتائج باستعمال

أ- شجرة الاحتمالات.

ب- جدول.

② عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

قسم فيه 35 تلميذ. منهم 15 بنت، يختار كل تلميذ نوع الرياضة.

للأولاد: 75% كرة قدم، 15% كرة يد، 10% كرة طائرة

للبنات: 60% كرة يد، 40% كرة طائرة

الرموز:

G: "التلميذ المختار ولد"

F: "التلميذة المختارة بنت"

T: "تلميذ يمارس كرة القدم"

M: "تلميذ يمارس كرة اليد"

V: "تلميذ يمارس كرة الطائرة"

المطلوب:

رسم الشجرة.

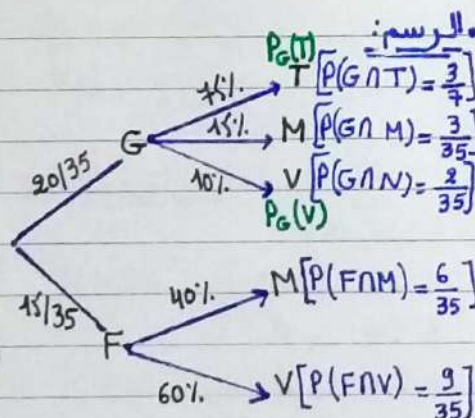
أحسب احتمال P(V) احتمال أن تتحقق

الحادثة V.

أحسب الاحتمال الشرطي P_V(G)

أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار

لا يمارس كرة القدم.



$$P(V) = \frac{2}{35} + \frac{9}{35} = \frac{11}{35}$$

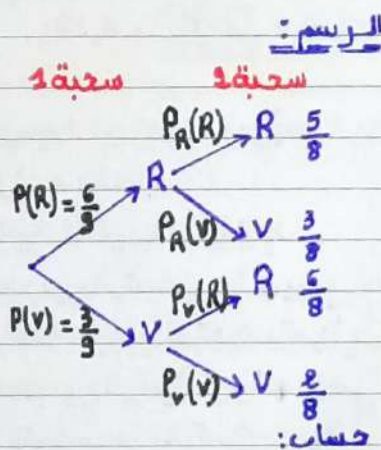
x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	6/30	18/30	6/30

يحتوي صندوق على كريات حمراء و3 كريات خضراء. لا نميز بينها عند اللمس. نسحب كرتين على التوالي ودون ارجاع.

لتكن الحادثة A: "الكرة المسحوبة الاولى حمراء".

والحادثة B: "الكرة المسحوبة الثانية خضراء".

أحسب P(A), P(B), ثم استنتج P(A ∩ B)



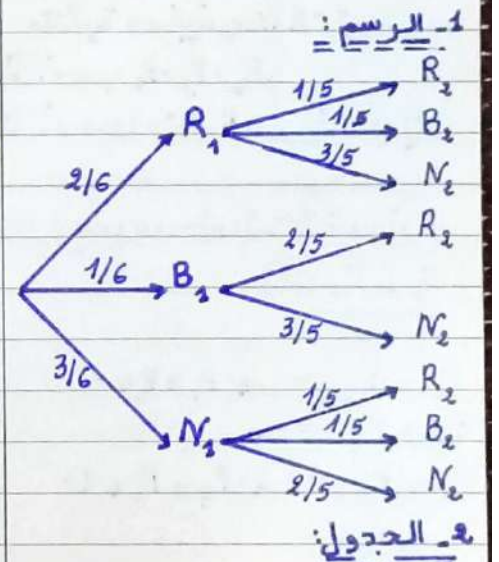
$$P(A) = P(R) = \frac{5}{8}$$

$$P_B(B) = P_R(V) = \frac{3}{8}$$

استنتاج:

$$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$$

$$P(R \cap V) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$$



2- الجدول:

	R ₁	R ₂	B ₁	N ₁	N ₂	N ₃
R ₁	X	0	0	1	1	1
R ₂	0	X	0	1	1	1
B ₁	0	0	X	1	1	1
N ₁	1	1	1	X	2	2
N ₂	1	1	1	2	X	2
N ₃	1	1	1	2	2	X

• الاحتمال الشرطي:

$$P_v(G) = \frac{P(G \cap v)}{P(v)} = \frac{2/35}{11/35}$$

$$P_v(G) = \frac{2}{11}$$

• $\bar{T}$ تلميذ لا يمارس كرة القدم:

$$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{3}{7} \\ = \frac{4}{7}$$

ملاحظة:

ما احتمال أن يكون التلميذ

ضعيف في الفيزياء أو في الرياضيات

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

أو

Bac Rym

www.facebook.com/bac.rym

سعيدة بانضمامكم لي

أفكار فيديو هات الأستاذ نور الدين

الأعداد المركبة

نستنتج أن النقط تنتمي إلى نفس الدائرة
التي مركزها 0 ونصف قطرها $r=2$.

1. مجموعة النقط حتى يكون z حقيقي
يجب: $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} = 0$

ليكن z و z' عدنان مركبان حيث:
 $z' = \frac{2-i}{1+i}$ و $z = \frac{2+i}{1-i}$

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z

ومنه $\begin{cases} -2y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$

بين بدون حساب أن $\overline{z+z'}$ حقيقي
و $\overline{z-z'}$ تخيلي صرف.

$$|z+1+2i| = |z+4|$$

أي $\begin{cases} y = 0 \\ (1,0) \neq 0 \end{cases}$

لدينا $\overline{z} = \frac{2-i}{1+i} = z'$

$$|2z-i| = 2$$

مجموعة النقط هي المستقيم ذو
المعادلة $y=0$ أي مواز لـ (x')
ماعدا $A(1,0)$

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} = z' + \overline{z'} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'} = z' - \overline{z'} = 2i \operatorname{Im}(z')$$

$$|z+i| = 2$$

$$|z - (-1-2i)| = |z-4|$$

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

حيث: $\begin{cases} z_A = -1-2i \\ z_B = 4 \end{cases}$

2. مجموعة النقط حتى يكون z تخيلي
يجب: $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 0$

حل في C المعادلة:

$$AM = BM$$

ومنه $\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$

$$z\overline{z} + z - \overline{z} - 5 - 2i = 0$$

مجموعة النقط M هي مستقيم متواري
للقطعة $[AB]$.

الفكرة:

الفكرة:
نضع

$$|2z-i| = 2$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases}$$

$$|2(z - \frac{1}{2}i)| = 2$$

$$(x-0)^2 - (y-0)^2 = 1^2$$

$$(x+iy)(x-iy) + x+iy - x +$$

$$|2(z - \frac{1}{2}i)| = 2$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها
 $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$

$$iy - 5 - 2i = 0$$

$$|z - \frac{1}{2}i| = 1$$

باستثناء $A(1,0)$

$$x^2 + y^2 - 5 - 2yi - 2i = 0$$

$$|z - z_A| = 1$$

حيث $z_A = \frac{1}{2}i$

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 5}_{\operatorname{Re}} - \underbrace{2yi - 2i}_{\operatorname{Im}} = 0$$

$$z_A = \frac{1}{2}i$$

أي:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ -2y - 2 = 0 \end{cases}$$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A

لدينا: $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -\sqrt{3} - i$

$$S = \{2+i; -2+i\}$$

ونصف قطرها $r=1$ مع $A(0, \frac{1}{2})$

$z_C = 2i$; $z_D = \sqrt{3} + 3i$

$$z = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} i$$

$$|z+i| = 2$$

أحسب $|z_A|$, $|z_B|$, $|z_C|$

ماذا تستنتج؟

$$|z+i| = 2$$

الحساب:

عين مجموعة النقط M حيث يكون z

$$|z+i| = 2$$

$$|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$

حقيقي.

$$|z+i| = 2$$

$$|z_B| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

عين مجموعة النقط M حيث يكون z

$$|z+i| = 2$$

$$|z_C| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$$

تخيلي صرف.

$$|z+i| = 2$$

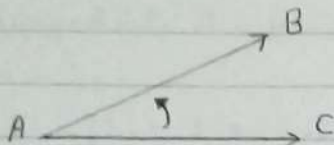
ومنه:

$$|z_A| = |z_B| = |z_C|$$

$$|z+i| = 2$$

القاعدة

القاعدة



$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\vec{O\vec{I}}, \vec{AB}) - (\vec{O\vec{I}}, \vec{AC}) = (\vec{AC}, \vec{AB})$$

2- طبيعة المثلث ABC:

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 = \frac{AB}{AC}$$

حساب العمدة:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi \mid K \in \mathbb{Z}$$

ومنه:

المثلث ABC متقايمت الأضلاع.

ما هي مجموعة النقط لعمدة:

$$\arg(z - 1) = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2K\pi \mid K \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z - 1) = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \mid K \in \mathbb{Z}$$

مجموعة النقط M هي نصف مستقيم

$\{AM\} - \{A\}$ ويميل بدرجة 90° .

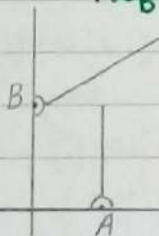
$$z_A = 1 \text{ و}$$

$$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$$

مجموعة النقط M هي نصف مستقيم

$\{BM\} - \{B\}$ ويميل بدرجة 45° .

$$z_B = 2i \text{ و}$$



$$\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \cos \frac{1111\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{1111\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$-x$

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$\pi + x$

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$

$\pi - x$

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

في مستوى $(\vec{O\vec{I}}, \vec{O\vec{J}})$ لدينا النقط:

$$z_A = -i\sqrt{3}; z_B = 3 + 2i\sqrt{3}$$

$$z_C = -3 + 2i\sqrt{3}$$

1. أعط تفسيرا هندسيا للطويلة و

عمدة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2. ما طبيعة المثلث ABC.

1. التفسير الهندسي للطويلة

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC}$$

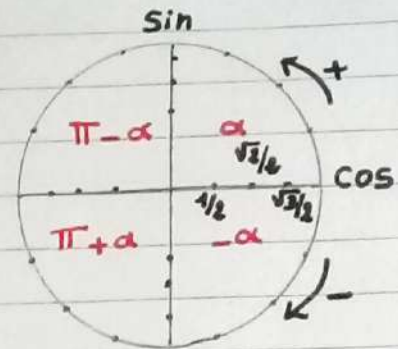
التفسير الهندسي للعمدة:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A)$$

معناه:

$$(\vec{AC}, \vec{AB})$$

الفكرة: الزاوية الموجبة (المقام ثم البسط)



مثل على الدائرة المثلثية النقط:

$$\frac{1111\pi}{3}; -\frac{1111\pi}{2}$$

$$\frac{1111\pi}{3}$$

(1)

لدينا:

$$1111 = 370(3) + 1$$

معناه:

$$(3(370) + 1)\pi \div 3$$

أي:

$$\frac{3(370)\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{370\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

الفكرة:

لأنه زوجي

$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\begin{cases} \cos \frac{1111\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{1111\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1111\pi}{2}$$

(2)

لدينا:

$$-1111 = -555(2) - 1$$

معناه:

$$-(-2(555) - 1)\pi \div 2$$

أي:

$$-\frac{2(555)\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$-555\pi - \frac{\pi}{2}$$

الفكرة: تفكك

$$(-556 + 1)\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$-556\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

لدينا: $z = z_0 + K e^{i\theta}$

حالة: لما يكون θ متغير

يمسح $\theta = [0, 2\pi]$

$$z = 1 + i + 5e^{i\theta}$$

مجموعة النقط M هي دائرة

مركزها A نصف قطرها $r = 5$

حالة: لما يكون K متغير

يمسح $K \in \mathbb{R}_+^*$

$$z = 1 + i + K e^{i\frac{\pi}{4}}$$

مجموعة النقط M هو نصف

مستقيم مبدؤه A وسيل $\frac{\pi}{4}$

$$z = \sqrt{5} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right)$$

بين مجموعة النقط M من المستوي
حيث:

$$z = \sqrt{5} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$$

$$z = \sin\frac{\pi}{6} - i \cos\frac{\pi}{6}$$

$$|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$$

$$z = -i \sin\frac{\pi}{6} - i \cos\frac{\pi}{6}$$

$$|z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|$$

$$z = (-i) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

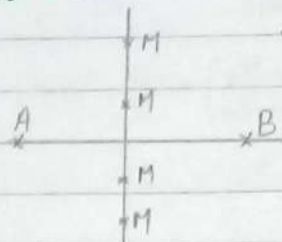
$$z = i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$AM = BM$$

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

مجموعة النقط M هو محور القطعة
[AB]

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$



أعط الشكل الجبري:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{1111\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{1111\pi}{4}\right) \right)$$

دستور مواضع

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i \sin\theta)^n$$

من أجل $\theta \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$

$$(e^{i\theta})^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

الفكرة: هي التبسيط.

$$\frac{1111\pi}{4} = 277\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$= 276\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$= 7\pi + \frac{3\pi}{4} = 315^\circ + 67.5^\circ$$

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

عين لمؤيلة وعمدة العدد المركب z :

$$z = -3 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = \sqrt{5} \left(\sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = \sin\frac{\pi}{6} - i \cos\frac{\pi}{6}$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$$

عين قيم الصحيحة n في كل حالة:

أ. z^n حقيقيا

ب. z^n تخيليا صرفا

$$z = -3 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right)$$

الفكرة:

$$-3 = 3(\cos\pi + i \sin\pi)$$

ومنه

$$z = 3(\cos\pi + i \sin\pi) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = 3 \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$z = 3 \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} \right)$$

أ. z^n حقيقيا:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$$

$$z^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4} \right)$$

حتى يكون z^n حقيقيا يجب أن تكون

$$\sin\frac{n\pi}{4} = 0$$

الفكرة:

$$\frac{n\pi}{4} = k\pi \quad | k \in \mathbb{Z}$$

ب. z^n تخيليا صرف:

$$\cos\frac{n\pi}{4} = 0$$

الفكرة:

$$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + k$$

$$n = 4k + 2 \quad | k \in \mathbb{Z}$$

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد

المركبة التالية:

$$z_1 = -\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = -\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

الفكرة هي: $e^{i\pi}$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$z = \sqrt{5} \left(\sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6} \right)$$

فكرة 1: $1 = -i^2$

نعوضها أمام $(\sin\frac{\pi}{6})$:

$$z = \sqrt{5} \left(-i^2 \sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6} \right)$$

ومنه

$$z = i\sqrt{5} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$i = 1 \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right)$$

ومنه:

$$z = \sqrt{5} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$-8 + 6i = \omega^2$$

$$= (x + iy)^2$$

$$-8 + 6i = \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{Re}} + \underbrace{2xyi}_{\text{Im}}$$

الفكرة: الطويلة. $| -8 + 6i | = 10$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \dots (2) \\ 2xy = 6 \dots (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 & y_1 = 3 \\ x_2 = -1 & y_2 = -3 \end{cases}$$

ومنه

لك عدد مركب يقبل جذرين تربيعيين متناظرين

$$\begin{cases} \omega_1 = 1 + 3i \quad (x_1 + iy_1) \\ \omega_2 = -1 - 3i \end{cases}$$

ليكن لدينا

$$P(z) = z^4 - 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 - 8\sqrt{2}z + 16$$

$$\overline{P(z)} = P(\overline{z})$$

وتقبل الحلين: $P(\sqrt{3} + i) = P(-2i) = 0$

استنتج الحلين الآخرين.

$$\overline{P(z)} = P(\overline{z})$$

$$\overline{P(-2i)} = P(2i)$$

$$P(z) \text{ جذر } 2i$$

$$P(\sqrt{3} + i) = P(\sqrt{3} - i)$$

$$P(z) \text{ جذر } \sqrt{3} - i$$

ومنه:

$$S = \{2i; -2i; \sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i\}$$

$$\text{لدينا: } z_B = -4 + 3i; z_A = -1 + 2i$$

$$z_C = 3i; z_D = 4 - 3i$$

$$\text{مع: } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{-i}{5}; \frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = \frac{-2i}{3}$$

المثلثين: ACD قائم في A

BCD قائم في B

لدينا: $P(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$

بين أن المعادلة $P(z) = 0$ لها حل حقيقي.

الفكرة نضع (a) ثم نحل Re و Im:

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - i\alpha + 3 - i = 0$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3 + (-\alpha - 1)i = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha^2 + 3 = 0 \\ -\alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

ومنه: $\alpha = -1$

أي أن الحل حقيقي.

وهو جذر للمعادلة:

$$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$$

لدينا: $P(z) = z^3 - iz^2 + 3z - 3i$

بين أن المعادلة $P(z) = 0$ لها حل تخيلي صرف.

الفكرة نضع (a) (حل تخيلي صرف)

$$(ai)^3 - i(ai)^2 + 3(ai) - 3i = 0$$

$$-a^3i + a^2i + 3ai - 3i = 0$$

$$i(-a^3 + a^2 + 3a - 3) = 0$$

مع $i \neq 0$

الفكرة: مجموع المعاملات = 0.

$$-1 + 1 + 3 - 3 = 0$$

إذن للمعادلة جذر وهو: 1 .

ومنه نجد:

$$ai = 1 \cdot i$$

$$ai = i$$

إذن عدد تخيلي وهو جذر

للمعادلة:

$$P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$$

عين الجذرين التربيعيين للأعداد

المركبة التالية: $z = -8 + 6i$

الفكرة: نضع

$$\begin{cases} z = \omega^2 \\ \omega = x + iy \end{cases}$$

لدينا: $\begin{cases} z = (3 + \sqrt{3}) + i(-3 + \sqrt{3}) \\ z = 2\sqrt{6} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}} \end{cases}$

$$\begin{cases} u = 3 + i\sqrt{3} \\ u = 2\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 1 - i \\ v = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

الإستنتاج

$$z = 2\sqrt{6} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{6} (\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12}))$$

الفكرة: المطابقة بين

$$\begin{cases} z = 2\sqrt{6} (\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12})) \\ z = (3 + \sqrt{3}) + i(-3 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} \cos(-\frac{\pi}{12}) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \\ \sin(-\frac{\pi}{12}) = -\frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{12}) \\ \sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin(\frac{\pi}{12}) \end{cases}$$

حل المعادلة:

$$z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0$$

المعادلة

$$\Delta = [-2 \cdot \cos(\theta)]^2 - 4(1)(1)$$

$$= 4 \cos^2 \theta - 4$$

$$= 4(\cos^2 \theta - 1)$$

الفكرة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$= -4 \sin^2 \theta$$

$$= 4i^2 \sin^2 \theta$$

الحلول:

$$z_1 = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$z_2 = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} &= \vec{MA} + 2\vec{BM} + \vec{MC} \\ &= \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{BM} + \vec{MC} \\ &= \vec{BC} - \vec{AB} \\ &= \vec{BC} + \vec{BA} \\ 1+1 &\neq 0\end{aligned}$$

الجملة تقبل مرجع.

$$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{BH}\|$$

ثاني جزء:

$$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

$$1 - 4 + 1 \neq 0$$

الجملة تقبل مرجع

$$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MG}\|$$

$$\|2\vec{MG}\| = \|2\vec{BH}\| \quad \text{إذن}$$

$$MG = BH$$

دائرة مركزها G نصف قطرها BH

حالة 4:

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MC}\|$$

$$\|4\vec{MG}\| = 2\|2\vec{MH}\|$$

$$4MG = 4MH$$

$$MG = MH$$

مستقيم محوري للقطعة [GH]

حالة 5:

$$(\vec{MD} + \vec{MA} + 3\vec{MC}) \cdot (\vec{MD} + \vec{MA} - 3\vec{MC}) = 0$$

$$(5\vec{MG}) \cdot (-\vec{MH}) = 0$$

$$-5(\vec{MG} \cdot \vec{MH}) = 0$$

$$-5 \neq 0$$

دائرة قطرها [GH]

المناقشة

ناقش وجود النقطة G مرجع الجملة:

$$\{(A; m^2 + 2); (B; m^2 + m - 3)\}$$

المرجع ومجموعة النقط:

حالة 1:

$$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \sqrt{5}$$

$$-2 + 1 - 3 = -4 \neq 0$$

الجملة تقبل مرجع H

$$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|4\vec{MH}\|$$

ومن:

$$\|4\vec{MH}\| = \sqrt{5}$$

$$MH = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

دائرة مركزها H حيث:

$$x_H = \frac{-2x_A + x_B - 3x_C}{-2 + 1 - 3}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

حالة 2:

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MD} - \vec{ME}\|$$

لا تقبل مرجع تقبل مرجع

ومن:

$$\|\vec{MG}\| = \|\vec{DM} - \vec{ME}\|$$

$$= \|-(\vec{DM} + \vec{ME})\|$$

$$= \|\vec{DE}\|$$

$$MG = DE$$

دائرة مركزها G ونصف قطرها

$$r = DE$$

حالة 3:

$$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

الفكرة نفك وندرس كل

جزء على حدى.

أول جزء:

$$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

$$1 - 2 + 1 = 0$$

الجملة لا تقبل مرجع.

الفكرة:

برهان أن الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$

مستقل على النقطة M.

بين أن النقط A, B, C, D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

بما أن ACD قائم في A

فإن النقط A, D, C تنتمي إلى

الدائرة (C) التي مركزها I منتصف القطعة [DC].

الفكرة ربط إستنتاج 1 بإستنتاج 2. لكن

لكي تنتمي B إلى الدائرة (C)

يكفي أن نبين $(IB = IA)$

$$x_I = \frac{x_C + x_D}{2} = 2$$

$$\begin{cases} IB = \sqrt{13} \\ IA = \sqrt{13} \end{cases} \quad \text{ومن:}$$

إذن B ينتمي إلى (C).

وعليه:

A, B, C, D نقط تنتمي لنفس الدائرة.

A و B نقطتان متمايزتان.

لتكن النقطة K حيث أن:

$$\vec{AK} = -\frac{8}{3}\vec{AB}$$

أثبت أن K مرجع النقطتين A و B

مرفقتين بمعاملين صحيحين يطلب

تعيينهما.

لدينا

$$3\vec{AK} = -8\vec{KB}$$

$$-3\vec{KA} + 8\vec{KB} = \vec{0}$$

$$-3 + 8 \neq 0$$

الجملة تقبل مرجع $\{(A, -3); (B, 8)\}$

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG}$$

إحداثيات مرجع:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ نضع:

$$\Delta_n = |z_{n+1} - z_n|$$

أحسب Δ_{n+1} بدلالة Δ_n .

$$\Delta_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(1+i)z_{n+1} - \frac{1}{2}(1+i)z_n \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(1+i) \right| |z_{n+1} - z_n|$$

$$\Delta_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Delta_n$$

بين أن المتتالية (Δ_n) هندسية يطلب إيجاد حدها الأول وأساسها.

لدينا المساواة:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومن هنا نستنتج:

أن (Δ_n) متتالية هندسية أساسها $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها الأول:

$$\Delta_0 = |z_1 - z_0|$$

$$\Delta_0 = 2\sqrt{2}$$

أحسب (Δ_n) بدلالة n

لدينا (Δ_n) متتالية هندسية

$$\Delta_n = \Delta_0 \cdot r^n = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

استنتج $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث لما $n \geq n_0$ يكون $\Delta_n < 10^{-2}$

$$\Delta_n < 10^{-2}$$

$$2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 10^{-2}$$

$$2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$$

$$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^n \cdot 2^{-n} < 10^{-2}$$

$$2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{n/2} \cdot 2^{-n} < 10^{-2}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2})^2 = x^2 + (y-2)^2$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = (\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2})^2 = (x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2$$

ومن هنا

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 1$$

$$2x\sqrt{3} - 4y - 4 = 0$$

مستقيم

(z_n) متتالية الأعداد المركبة معرفة:

$$\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i) \cdot z_n \end{cases}$$

أوجد طويلة وعمدة كل من:

$$z_1, z_2$$

$$\begin{cases} |z_0| = 4 \\ \arg(z_0) = 0 \end{cases}$$

① نحسب

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+i)$$

نضع:

$$\begin{cases} |\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$z_1 = \alpha \cdot z_0$$

الطويلة:

$$|z_1| = |\alpha| \cdot |z_0| = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

العمدة:

$$\begin{aligned} \arg(z_1) &= \arg(\alpha \cdot z_0) \\ &= \arg(\alpha) + \arg(z_0) \\ &= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

ومن هنا:

$$\begin{cases} |z_1| = 2\sqrt{2} \\ \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

$$|z_2| = 2$$

$$\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$m^2 + 2 + m^2 + m - 3 \neq 0$$

$$2m^2 + m - 1 \neq 0$$

$$m_1 \neq -1 \quad m_2 \neq \frac{1}{2}$$

حتى تقبل الجملة مرجع يجب:

$$m \neq \frac{1}{2} \quad m \neq -1$$

أي

$$S = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

حالة 6:

$$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$(-\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$(-\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

مستقيم MG ويتعامد الشعاع $\overrightarrow{BC}$

عبارتي لا يبتز

$$\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = 4$$

لدينا: عين مجموعة النقط

فكرة ①: تفكيك الجزء (1)

$$\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = 5\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2$$

فكرة ②:

$$5\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2 = 4$$

$$5\overrightarrow{MG}^2 = 4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)$$

$$\overrightarrow{MG}^2 = \frac{4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)}{5}$$

نأخذ الجذر:

$$\overrightarrow{MG} = \sqrt{\frac{4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)}{5}} > 0$$

$$\overrightarrow{MG} = K$$

دائرة مركزها G و $r = K$

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

الجملة لا تقبل مرجع نستعمل طريقة

حساب الأطوال

$$\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$$

الفكرة

مجموعة النقط هي نصف الدائرة التي
قطرها $[AB]$ في الاتجاه المباشر (العلوي) (أ)

الحالة 6:
تخليفي صرف سالب $\frac{z_A - z}{z_B - z}$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة التي
قطرها $[AB]$ في الاتجاه العكسي (ب)

التحويلات النقطية:
الانسحاب:

الشرط $a = 1$
شعاعه b

مثل: $z' = z + 1 - 2i$

الشعاع $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
أو $z'_u = 1 - 2i$

التكالي:

الشرط $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

مركزه $z_w = \frac{b}{1-a}$
ونسبته $H = a$

مثل: $z' = 3z - 5i$

المركز $z_w = -\frac{5}{2}i$
نسبته $H = 3$

الدوران:

الشرط $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$

زاويته $\arg(a)$
مركزه $z_w = \frac{b}{1-a}$

مثل:

$z' = iz + 1 - i$

$|a| = |i| = 1$
 $z_w = \frac{b}{1-a} = 1$
 $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

التشابه:

الشرط $a \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$

نسبته $K = |a|$
زاويته $\arg(a)$
مركزه $z_w = \frac{b}{1-a}$

الاقطار متناصفة ومتقايسة و
متعامدة: $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$
 $|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$
 $(AC) \perp (BD)$

شبه المنحرف:
يجب اثبات: $(CB) \parallel (DA)$

النسبة ومجموعة النقط:

حالة 1:
حقيقي $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^*$

مجموعة النقط مستقيم (AB)
باستثناء النقطه B أي $(AB) - \{B\}$

حالة 2:
حقيقي موجب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}_+^*$

مجموعة النقط مستقيم (AB)
باستثناء القطعة $[AB]$ أي $(AB) - [AB]$



حالة 3:
حقيقي سالب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^-$

مجموعة النقط القطعة المفتوحة $]AB[$
لا تحقق $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^-$ تحقق



حالة 4:
تخليفي صرف $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{C}$

مجموعة النقط دائرة التي
قطرها $[AB]$ باستثناء النقطه B .

حالة 5:
تخليفي صرف موجب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{C}$

$2^{1-n} \cdot 2^{\frac{1+n}{2}} < 10^{-2}$
 $2^{-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}} < 10^{-2}$

$\ln 2^{-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}} < \ln 10^{-2}$
 $(-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}) \ln 2 < -2 \ln 10$

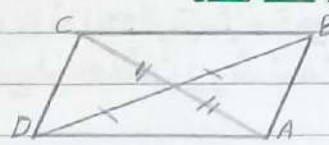
$-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2} < -2 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2}$

$-\frac{1}{2}n < -8,15$

$n > 17$

ومنه:

الأعداد المركبة وطبيعة الرباعي:
متوازي الأضلاع:



الاقطار متناصفة:

$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

المعين:



الاقطار متناصفة ومتقايسة:

$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

$(AC) \perp (BD)$

المستطيل:

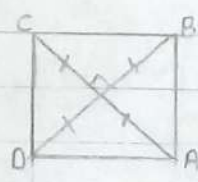


الاقطار متناصفة ومتقايسة:

$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

المربع:



مثال :

$$z' = (1+i)z + i$$

$$\begin{cases} |a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1 \\ k = |a| = \sqrt{2} \\ \arg(a) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

نسبته

زاويته

نعتبر التشابه المستوى المباشر S الذي يرفق بالنقطة A ذات الاحقة $1+2i$ ،

النقطة A' ذات الاحقة $4+2i$ وبالنقطة B ذات الاحقة $i + \sqrt{3}$ النقطة B' ذات الاحقة $2 + \sqrt{3} + 2i$.

1. عرف عبارة التشابه في المستوى المركب معيناً عناصره المميزة .

2. عين عبارة التشابه باستعمال الشكل الأسّي .

3. أكتب العبارة التحليلية لهذا التشابه .

1. عبارة التشابه :

$$z' = a z + b$$

التعيين :

$$\begin{cases} z'_A = a z_A + b \\ z'_B = a z_B + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+2i = a(1+2i) + b \\ -2+2i\sqrt{3} = a(\sqrt{3}+i) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+2i = a(1+2i) + b \\ -2+2i\sqrt{3} = a(\sqrt{3}+i) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+2i = a(1+2i) + b \\ -2+2i\sqrt{3} = a(\sqrt{3}+i) + b \end{cases}$$

بالطرح نجد (بالحساب)

$$a = 2i$$

ثم نعوض

$$-4+2i = (2i)(1+2i) + b$$

$$b = -4+2i - 2i + 4$$

$$b = 0$$

إذن العبارة هي :

$$z' = 2i z$$

عناصرها المميزة :

$$\begin{cases} |a| = |2i| = 2 \\ \theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

نسبته

زاويته

مركزه

2. الشكل الأسّي :

$$z' = 2i z$$

$$z' = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$$

3. العبارة التحليلية :

$$z' = 2i z$$

$$x' + iy' = 2i(x + iy)$$

$$x' + iy' = 2ix - 2y$$

$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

نعتبر التحويل النقطي S الذي

يرفق بالنقطة M(x,y) . النقطة M'(x',y')

$$x' = x + y + 1$$

$$y' = -x + y + 1$$

أدرس طبيعة التحويل S .

لدينا :

$$z' = a z + b$$

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = x' + iy' \\ z = x + iy \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = x' + iy' \\ z = x + iy \end{cases}$$

$$z' = [x+y+1] + i[-x+y+1]$$

$$= (x+y+1) - xi + yi + i$$

$$= z + y + 1 - xi + i$$

$$= z - i^2 y + 1 - xi + i$$

$$= z - i(x + iy) + 1 + i$$

$$= z - iz + 1 + i$$

$$\begin{cases} z' = (1-i)z + 1+i \\ z' = a z + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = (1-i)z + 1+i \\ z' = a z + b \end{cases}$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} a = 1-i \\ b = 1+i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1-i \\ b = 1+i \end{cases}$$

العبارة المركبة لتحويل نقطي :

$$z' - z_0 = k \cdot e^{i\theta} (z - z_0)$$

لدينا العبارة : L (S) التشابه المباشر

$$z' = (1+i)z + 2 - i$$

عين صورة التشابه (S) لـ

الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(2,2)$

ونصف القطر 3.

لايجاد صورة دائرة بتحويل نقطي :

مركزها صورة المركز الأول

بالتحويل (S)

$$z'_\Omega = (1+i) \cdot z_\Omega + 2 - i$$

$$= (1+i)(2+2i) + 2 - i$$

$$= 2 + 3i$$

ومنه $\Omega'(2,3)$

ونصف قطرها :

$$r' = k \cdot r$$

$$r' = \sqrt{2} \cdot 3$$

$$r' = 4,24$$

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي