

الاهتزازات الكهربائية

الدائرة الكهربائية RLC

نحقق الدائرة الكهربائية الممثلة في (الشكل-1) باستعمال

العناصر الكهربائية التالية :

-ت شحن المكثفة عند وضع البادلة في الوضع (1).

الوضع (2)

-تفرغ المكثفة في الناقل الاومي والوشيعة عند وضع البادلة في

الوضع (2) عند اللحظة $t = 0$.

-الطاقة المخزنة في المكثفة في هذه اللحظة هي : $E_C = \frac{1}{2}CE^2$

-تفرغ هذه الطاقة على شكل :

- طاقة مغناطيسية في الوشيعة $E_L = \frac{1}{2}LI_0^2$

-طاقة ضائعة بفعل جول في R_0 و r

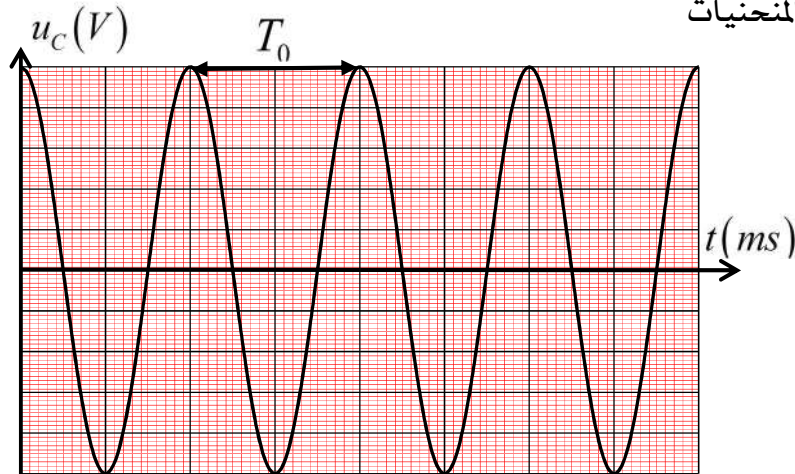
II. الاهتزازات الحرة لجملة كهربائية

1. الجملة الكهربائية المهتزة:

ندعو جملة كهربائية مهتزة كل دائرة تحتوي على وشيعة ، مكثفة مشحونة ومقاومة

2. حالة اهتزازات حرة متخامدة:

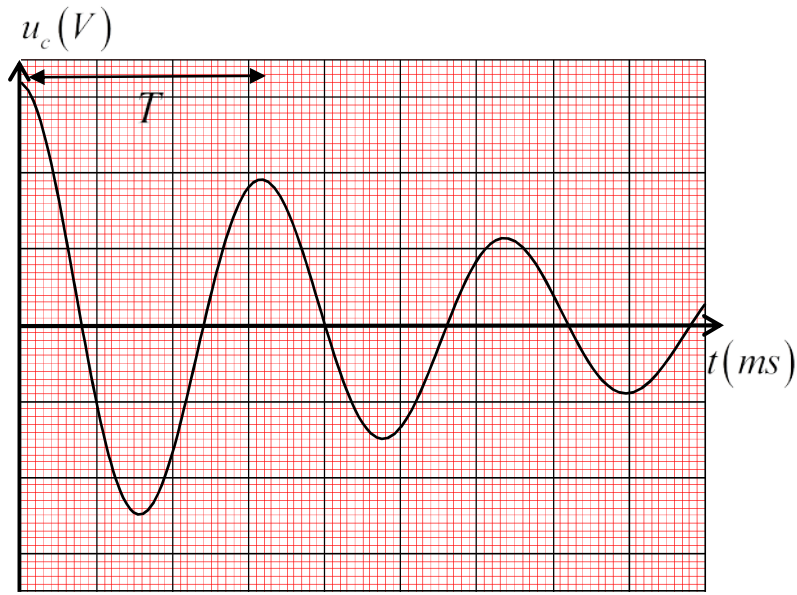
(الدائرة RLC) نحقق دائرة كهربائية كما بالشكل المقابل: نعتبر مقاومة الدائرة $R = R_0 + r$ بواسطة الدائرة (1) نحقق شحن المكثفة وعند تمام الشحن نحول البادلة إلى الوضع (2) نوصل راسم اهتزاز بين طرفي المكثفة نلاحظ المنحنيات



(اهتزازات حرة غير متخامدة)

نظام دوري $R = 0$

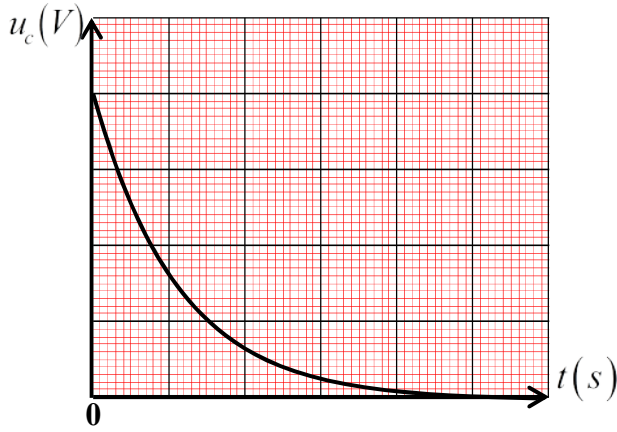
الدور الذاتي $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$



(اهتزازات حرة متخامدة)

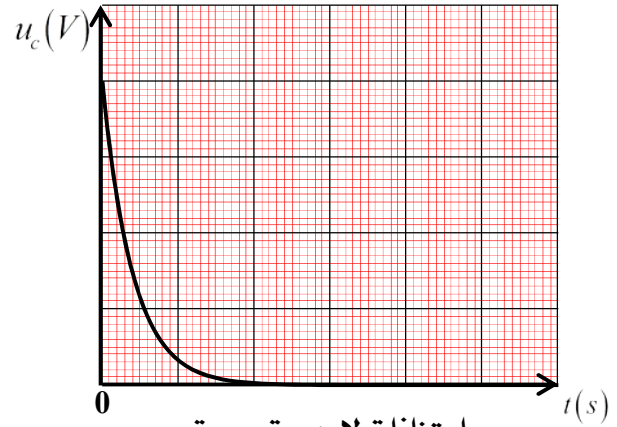
نظام شبه دوري $R \neq 0$ و $R < R_C$

شبه الدور $T_0 \approx T$



اهتزازات لادورية فوق حرجة

$R > R_C$



اهتزازات لادورية حرجة

$R = R_C$

نسعى المقاومة الحرجة للدائرة R_C , حيث $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (تقبل بدون برهان)

المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ للدائرة الحقيقية RLC

حسب قانون جمع التوتورات $u_c + u_B + u_R = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + ri + Ri = 0$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + (R+r)i = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} + (R+r) \frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad \dots\dots\dots(1) \quad R = R_0 + r \quad \text{وبوضع تصبح المعادلة}$$

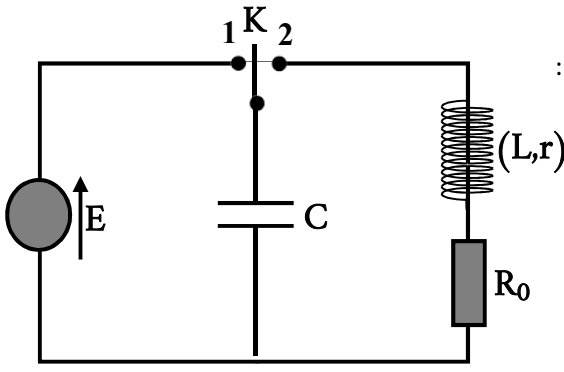
وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها خارج المنهاج

الاهتزازات الحرة غير المتخامدة (الدائرة المثالية LC)

نستعمل وشيعة مقاومتها صغيرة جدا حتى يمكن اهمال الطاقة الضائعة بفعل جول في الدائرة امام الطاقة التي تخزنها المكثفة.

المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ (الدائرة المثالية LC)

بوضع $R = 0$ في المعادلة التفاضلية (1) ونكتب :



هذه المعادلة التفاضلية حلها من الشكل : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \dots (2)$

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث :

$$Q_0 = CE \text{ (الشحنة العظمى)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (النبض الذاتي)}$$

البرهان :

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2 Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2 q, \quad \frac{dq}{dt} = -Q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (2) نجد : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \text{ لدينا عبارة الدور الذاتي } T_0 \text{ (للإمتزازات الحرة الغير المتخادمة)}$$

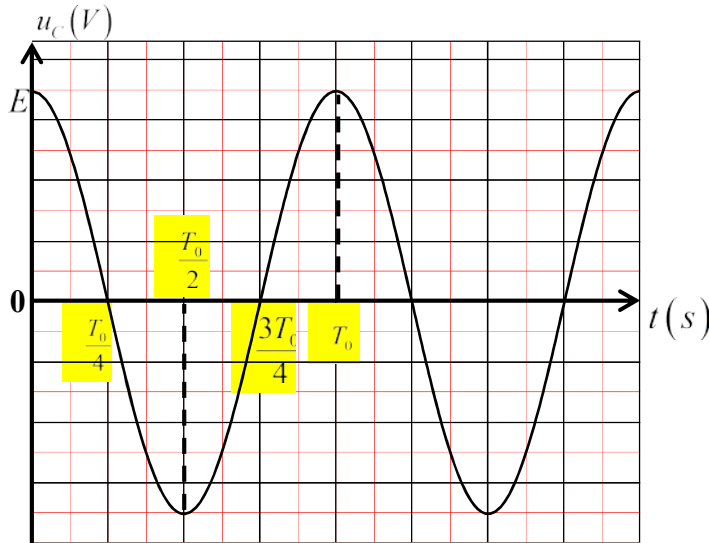
العبارة اللحظية لشدة $i(t)$

$$I_0 = Q_0 \omega_0 \text{ حيث } i = \frac{dq(t)}{dt} = -Q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow i(t) = -I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

العبارة اللحظية لـ $u_c(t)$

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{CE}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow u_c(t) = E \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

الشروط الابتدائية :



نعتبر اللحظة $t=0$ وضع البادئة على الوضع (2)
أي لحظة بدأ التفريغ يكون لدينا :

$$E_C = \frac{1}{2} CE^2 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

$$E_L = 0$$

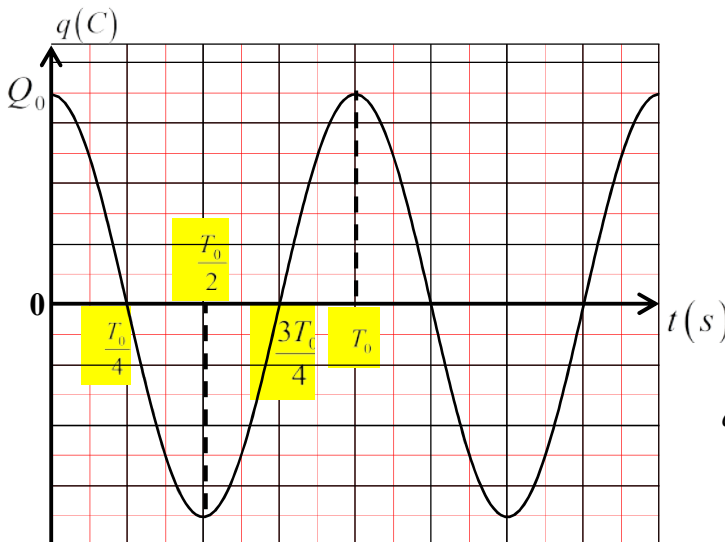
$$i = 0$$

تمثيل التوتربين طرفي المكثفة

للتبسيط نعتبر الصفحة الابتدائية $\varphi = 0$

$$u_c(t) = E \cos(\omega_0 t) \Rightarrow u_c(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

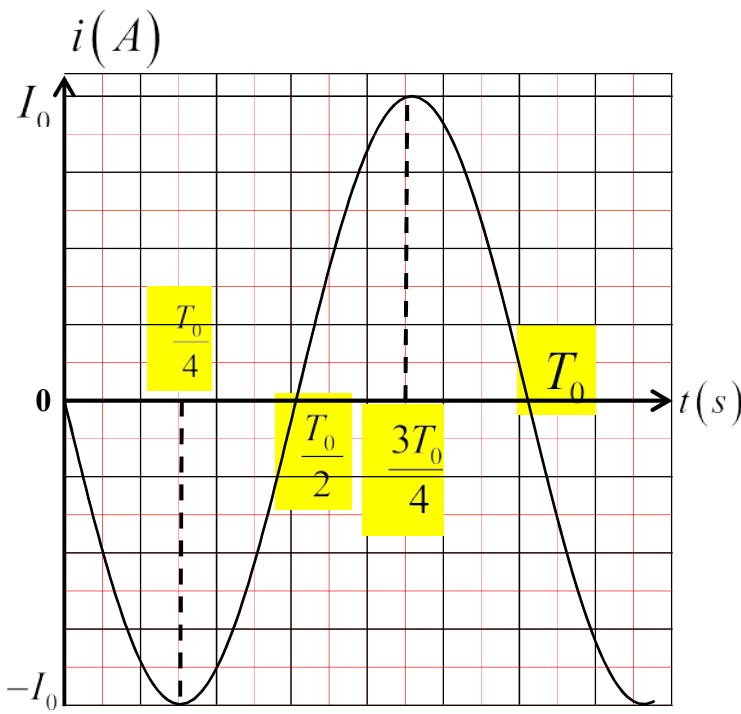
$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$u_c(V)$	E	0	-E	0	E



تمثيل الشحنة $q(t)$

للتبسيط نعتبر الصفحة الابتدائية $\varphi = 0$

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow q(t) = Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$



$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$q(C)$	Q_0	0	$-Q_0$	0	Q_0

تمثيل شدة التيار $i(t)$

للتبسيط نعتبر الصفحة الابتدائية $\varphi = 0$

$$i(t) = -I_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow i(t) = -I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$i(A)$	0	$-I_0$	0	I_0	0

الطاقة الكلية في الدارة E_T

بيان ان طاقة الدارة تبقى ثابتة مهما كان الزمن

$$E_T = E_B + E_c = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} C [E^2 \cos^2(\omega_0 t)]$$

$$E_B = \frac{1}{2} L [-Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)]^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} L [Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)] + \frac{1}{2} C [E^2 \cos^2(\omega_0 t)]$$

$$E_T = \frac{1}{2} [CE^2 \sin^2(\omega_0 t)] + \frac{1}{2} [CE^2 \cos^2(\omega_0 t)]$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0^2 \times LC = 1 : \text{لان}$$

$$E_T = \frac{1}{2} CE^2 [\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} CE^2$$

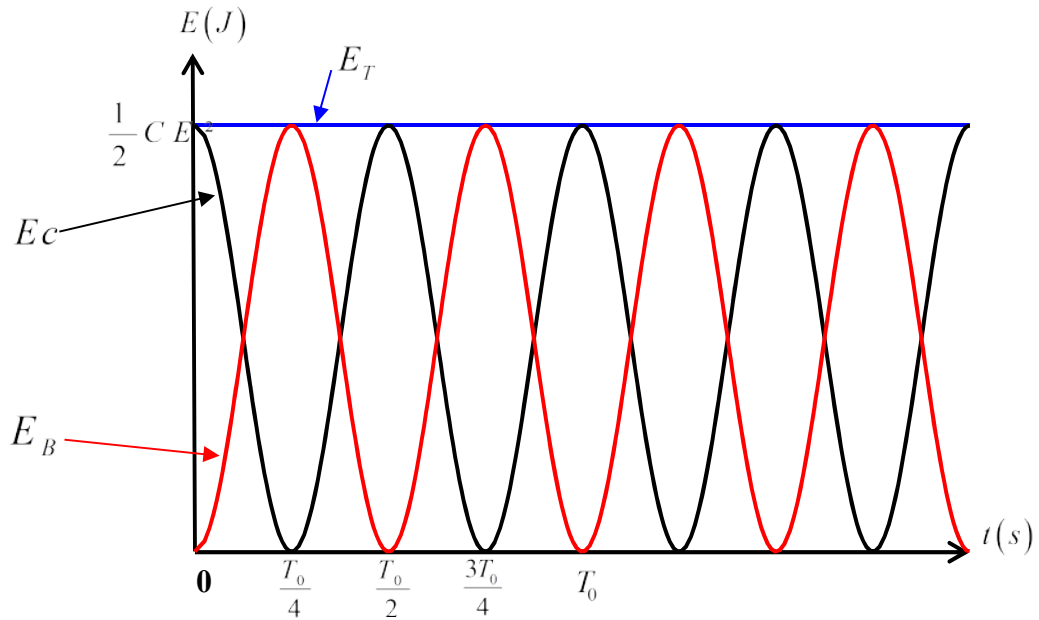
التمثيل البياني للطاقات $E_T, E_B(t), E_c(t)$ (حالة اهتزازات حرة غير متخامدة)

$$E_c = \frac{1}{2} CE^2 \cos^2(\omega_0 t) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} CE^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

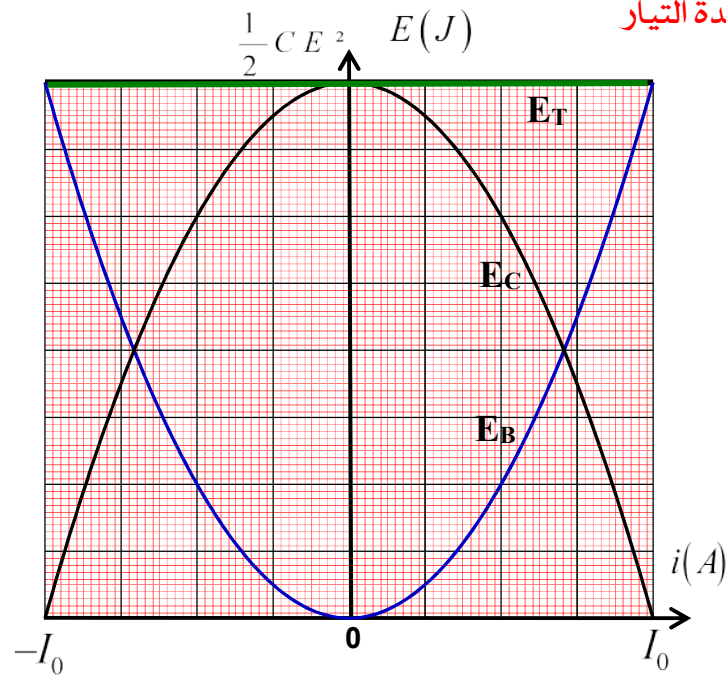
$$E_B = \frac{1}{2} CE^2 \sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow E_B = \frac{1}{2} CE^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$E_T = \frac{1}{2} CE$$

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$E_c(J)$	$\frac{1}{2} CE^2$	0	$\frac{1}{2} CE^2$	0	$\frac{1}{2} CE^2$
$E_B(J)$	0	$\frac{1}{2} CE^2$	0	$\frac{1}{2} CE^2$	0



مخطط الطاقات بدلالة شدة التيار



اثبات ان زمن دور التفريغ هو نصف الدور الذاتي $T = \frac{T_0}{2}$

لدينا الطاقة المخزنة في المكثفة $E_c(t) = \frac{1}{2} CE^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right)$

لدينا : $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ هنا $\alpha = \frac{2\pi}{T_0} t$

ومنه $E_c = \frac{1}{2} CE^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right)$ ومنه $E_c(t) = \frac{1}{4} CE^2 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{T_0} t \right) \right]$

عند دور تفريغ المكثفة يكون $E_c(t) = \frac{1}{4} CE^2$ ومنه $E_c(t) = \frac{1}{4} CE^2 + \frac{1}{4} CE^2 \cos \frac{4\pi}{T_0} t$

$\frac{1}{4} CE^2 + \frac{1}{4} CE^2 \cos \frac{4\pi}{T_0} t = \frac{1}{4} CE^2 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{4} CE^2 \cos \frac{4\pi}{T_0} t$

$\cos \frac{4\pi}{T_0} t = 0 \Rightarrow \frac{4\pi}{T_0} t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi T_0}{4\pi} \Rightarrow t = \frac{T_0}{2}$

اثبات أن الدور الذاتي متجانس مع الزمن باستعمال التحليل البعدي :

$$[T_0] = \left(\frac{[U] \cdot [T]}{[I]} \cdot \frac{[I] \cdot [T]}{[U]} \right)^{1/2} \leftarrow \begin{cases} [I] = \frac{[U] \cdot [T]}{[L]} \leftarrow u_L = L \frac{di}{dt} \\ [C] = \frac{[I] \cdot [T]}{[U]} \leftarrow i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases} : \text{بما أن } [T_0] = ([L] \cdot [C])^{1/2} \leftarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

ومنه : $[T_0] = ([T]^2)^{1/2} = [T]$ أي الدور الذاتي متجانس مع الزمن

الاهتزازات الحرة المتخامدة

- الدراسة الطاقوية للدارة RLC :

إن طاقة الدارة في أي لحظة هي طاقة الوشيعية والمكثفة $E_T = E_B + E_C$

$$E_T = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} L i^2(t) \quad \text{نشتق المعادلة من الطرفين نحصل على}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} + L i \frac{di}{dt} = \frac{q}{C} i + L i \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \left(\frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} \right) i \dots (3)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC} q = 0 \Rightarrow -\frac{R}{L} i = \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} \quad \text{ولدينا}$$

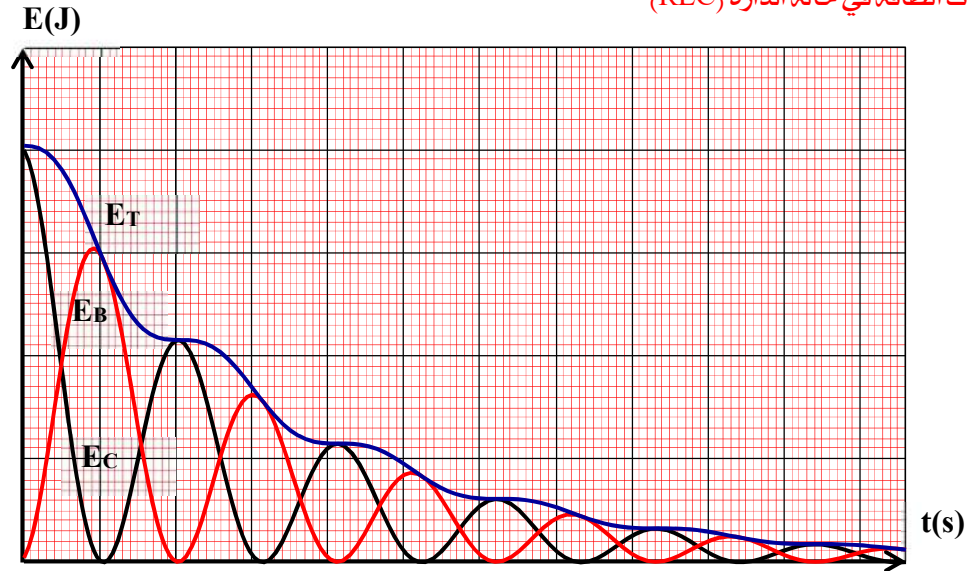
$$\frac{dE}{dt} = -R i^2 \quad \text{وبتعويض (4) في (3) نجد : } -R i = L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} \dots \dots \dots 4$$

فإن : $\frac{dE}{dt} = -R i^2 < 0$ نلاحظ من هذه النتيجة أن طاقة الجملة (R, L, C) غير ثابتة حيث تتناقص لأن جزء منها يفقد

بتحويل حراري للوسط الخارجي بفعل جول وهذا ما يسبب تخامد الاهتزازات .

✓ عبارة الطاقة المحولة بفعل جول : $E_J = R i^2 t$

مخططات الطاقة في حالة الدارة (RLC)

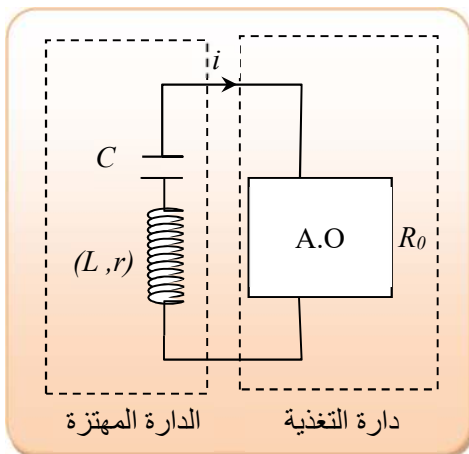


3 تغذية الإهتزازات الكهربائية المتخامدة:

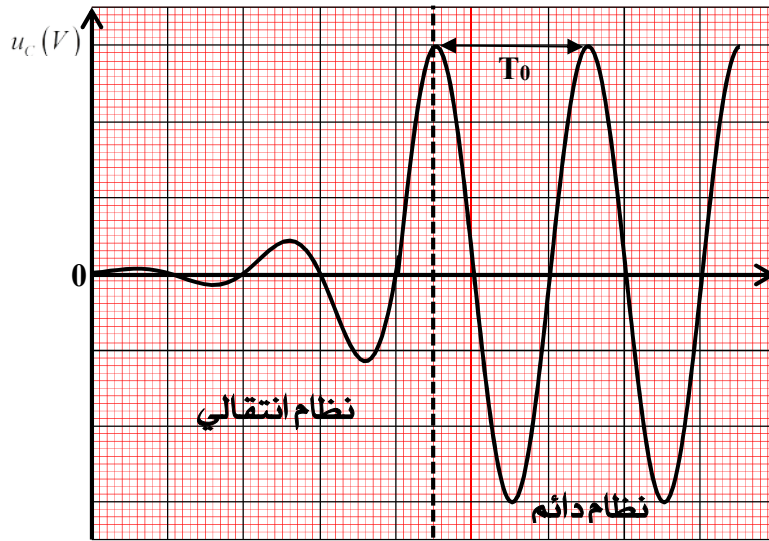
إن المسؤول عن تخامد الاهتزازات هو المقاومة ولذلك يمكن تغذية الدارة بتوصيلها بجهاز (مضخم تطبيقي A.O) يعوض الطاقة الضائعة بفعل المقاومة حيث يلعب هذا الجهاز دور مقاومة سالبة

$$\text{حيث يكون قانون التوترات كالتالي : } u_C + L \frac{di}{dt} + r \cdot i = R_0 \cdot i$$

$$\text{من اجل } R_0 = r \text{ يكون : } u_C + L \frac{di}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$



فيتحول بذلك النظام من اهتزازي متخامد إلى نظام اهتزازي مغذى غير متخامد.



الاهتزازات القسرية الكهربائية (حالة دائرة RLC) :

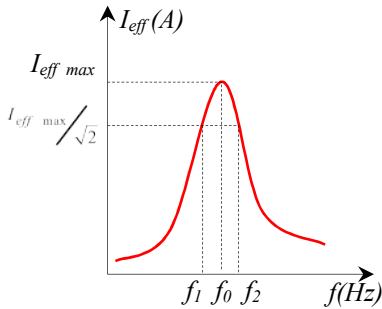
تحدث الاهتزازات القسرية الكهربائية عندما نفرض على الدائرة RLC توترا كهربائيا متناوبا تواتره f وذلك باستعمال مولد تواترات منخفضة متغير التواتر GBF (المحرّض) فيرغم الدائرة (المجاوب) على الاهتزاز بهذا التواتر.

الدراسة الكمية :

نوصل الدائرة بأبميرتر لقياس شدة التيار وكذلك يستعمل مدخلي راسم اهتزاز مهبطي Y_1 لقياس التوتربين طرفي الناقل الأومي و Y_2 لقياس التوتربين طرفي الدائرة نجعل تواتر GBF أقل من التواتر الذاتي للدائرة f_0 ثم نغير من قيمته تدريجيا حتى يتجاوز التواتر الذاتي للدائرة ونتابع شدة التيار $i(t)$ فنحصل على المنحنى المقابل :

خصائص التجاوب :

أ. الشريط النافذ (حزمة المرور) :



نسمة الشريط النافذ لتواترات المجاوب (الرنان) مجال التواترات الموافق لـ : $\frac{I_{eff, max}}{\sqrt{2}} \leq I_{eff} \leq I_{eff, max}$

ب. عرض الشريط النافذ :

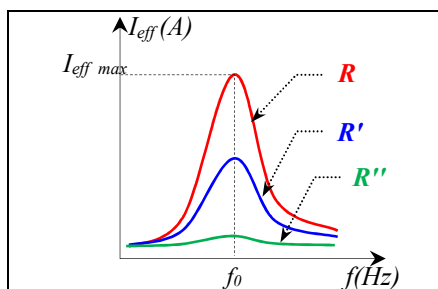
نسمة المقدار $\Delta f = f_2 - f_1$ بعرض الشريط النافذ حيث تكون استجابة المهتز (الرنان) مقبولة في هذا المجال.

ج. معامل الجودة :

هو مقدار يعبر عن حالة التجاوب فكلما كان أكبر كانت استجابة المجاوب للمحرّض أفضل و أكثر حدة ونكتب : $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$

بحيث : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ وهو التواتر الذاتي للدائرة RLC (تواتر التجاوب) .

تأثير المقاومة على التجاوب :



✓ من أجل R الصغيرة يكون التخامد ضعيفا والتجاوب حادا.

✓ من أجل R' المتوسطة يكون التخامد متوسطا والتجاوب غير واضح.

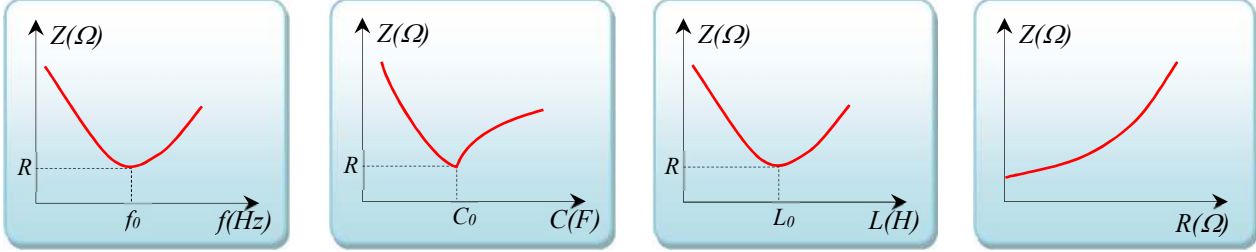
✓ من أجل R'' الكبيرة يكون التخامد كبيرا ولا يوجد تجاوب.

$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$$

هي العرقله التي تبديها الدارة للتيار الكهربائي المار فيها ، يرمز لها بالرمز Z وتعطى بالعلاقة :

تأثير R, L, C على الممانعة Z :

نعيد الدارة السابقة ونغير كل مرة أحد العناصر R, L, C, f ونحسب ممانعة الدارة Z .
نلاحظ أن هذه التغيرات تكون وفق المنحنيات التالية :



الملاحظات :

- تزداد ممانعة الدارة بزيادة المقاومة .
- تتناقص قيمة الممانعة بزيادة الذاتية إلى أن تصل إلى قيمة حدية صغرى ($Z = R$) ثم تزداد بعد ذلك .
- تتناقص قيمة الممانعة بزيادة السعة إلى أن تصل إلى قيمة حدية صغرى ($Z = R$) ثم تزداد بعد ذلك .
- تتناقص قيمة الممانعة بزيادة التواتر إلى أن تصل إلى قيمة حدية صغرى ($Z = R$) يكون عندها $f = f_0$ ثم يزداد بعد ذلك .

نتيجة :

عند حدوث التجاوب الكهربائي يتحقق ما يلي :

تصبح الشدة أعظمية $i = I_{max}$ و تصبح الممانعة أصغرية $Z = R$

الاستاذ معمرى حوسين للعلوم الفيزيائية

دروس
مذكرات
تمارين
باكاليوريات

www.facebook.com/AdnanPhys