

العِبْقَرِي فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

الكتاب

الثالثة ثانوي

● الشعب: آداب وفلسفة؛
● آداب ولغات أجنبية.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الحساب) الملخص // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ملخص: حول الحساب // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ أ.

① العدد الطبيعي التام والعددان الطبيعيان المتحابان

العددان الطبيعيان المتحابان

نقول عن عددين طبيعيين أنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم الموجبة لأحدهما ما عدا نفسه مساويا للآخر والعكس. مثلا: 220 و 284 هما عددان متحابان.

العدد الطبيعي التام

نقول عن عدد طبيعي أنه تام إذا كان مساويا لمجموع قواسمه الموجبة ما عدا نفسه. مثلا: 6، 28، 496 هي أعداد تامة.
القواسم الموجبة للعدد 6 هي: 1، 2، 3، 6
ولدينا: $6 = 1 + 2 + 3$

② القسمة في $\mathbb{Z}$

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

في حالة $r = 0$ نجد: $a = bq$
نقول أن: " b يقسم العدد a "
أو " b قاسم للعدد a "
أو " a مضاعف للعدد b "
أو " a يقبل القسمة على العدد b ".

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

توجد ثنائية وحيدة $(q; r)$ حيث
 $0 \leq r < b$ و $a = bq + r$
 r : يسمى باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b .
 q : يسمى حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على b .

③ حصر عدد صحيح a بين مضاعفين متعاقبين لعدد طبيعي غير معدوم b

حيث، q هو حاصل قسمة a على b . $bq \leq a < b(q + 1)$

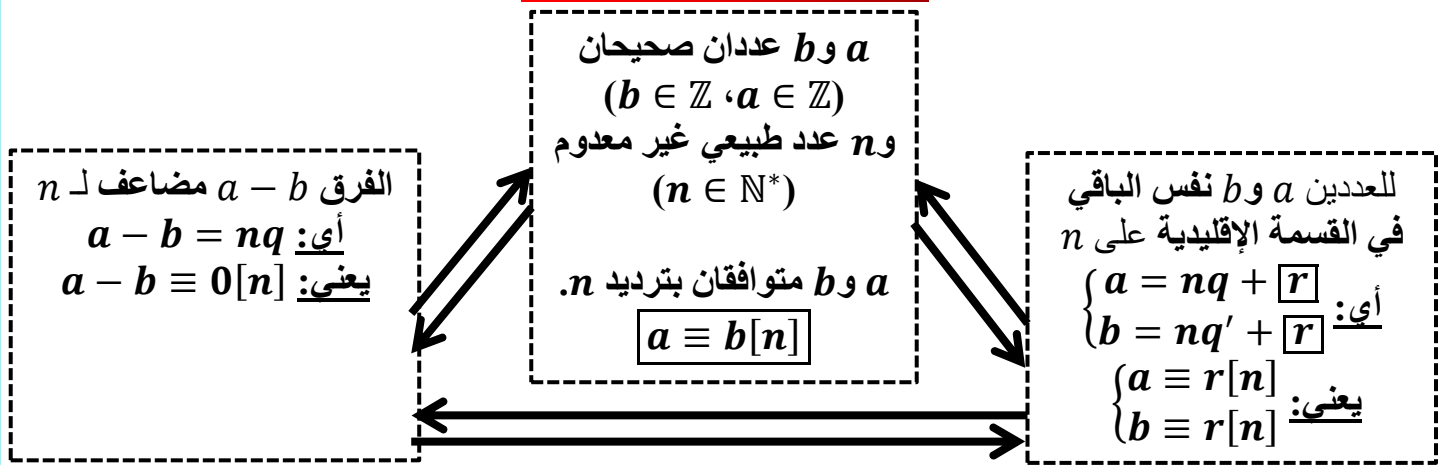
④ إيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a وكيفية إيجاد هذه القواسم

طريقة: لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a

- أ/نحلل a إلى جداء عوامل أولية.
- ب/إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

ملاحظة: ولإيجاد القواسم يمكن استعمال شجرة انظر الكتاب المدرسي ص 11.

5) الموافقات في $\mathbb{Z}$



مثال: b عدد طبيعي حيث $a = 2006$ تبيان أن $b \equiv -1[9]$	نبين أن الفرق $b - (-1)$ مضاعف لـ 9: لدينا: $b - (-1) = b + 1 = 2007 = 9(223)$ أي: $b - (-1) \equiv 0[9]$ وبالتالي: الفرق $b - (-1)$ مضاعف لـ 9 إذن: $b \equiv -1[9]$
---	---

6) خاصية

خاصية مهمة: كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n ، باقي قسمته على n .

لدينا: $a = nq + \overline{r}$ أي: $a \equiv r[n]$	وبالتالي: باقي قسمة a على n هو $\overline{r}$. $0 \leq r < n$
--	---

مثال: a عدد طبيعي حيث $a = 1428$ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9.	لدينا: $a = 1428 = 9(158) + 6$ أي: $a \equiv 6[9]$ وبالتالي: باقي قسمة a على 9 هو $\overline{6}$.
--	---

7) خواص الموافقات

(1) $a \equiv a[n]$ (عدد صحيح، n عدد طبيعي غير معدوم)
(2) إذا كان $a \equiv b[n]$ ، فإن $b \equiv a[n]$ (و a و b عددان صحيحان، n عدد طبيعي غير معدوم)
(3) إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases}$ ، فإن $a \equiv c[n]$ (و a ، b و c أعداد صحيحة، n عدد طبيعي غير معدوم)
(4) إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ ، فإن $a + c \equiv b + d[n]$ (و a ، b ، c و d أعداد صحيحة، n عدد طبيعي غير معدوم)
(5) إذا كان $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$ ، فإن $a \times c \equiv b \times d[n]$ (و a ، b ، c و d أعداد صحيحة، n عدد طبيعي غير معدوم)
(6) إذا كان $a \equiv b[n]$ ، فإن $a^p \equiv b^p[n]$ (و a و b عددان صحيحان، n و p عددان طبيعيين غير معدومان)

8) تعيين بواقى قسمة قوى عدد طبيعي على آخر // أعمال موجهة ص 99

أ/دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقى قسمة العدد 2^n على 5:

لدينا: $2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ و $2^4 \equiv 1[5]$.

بواقى قسمة 2^n على 5 تُشكل متتالية دورية، دورها 4.

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
بواقى قسمة 2^n على 5	1	2	4	3

ب/تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{4k} \equiv 1[5]$ واتمام باستعمال خواص الموافقة ما يلي $2^{4k+1} \equiv \dots [5]$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^4 \equiv 1[5]$ فإن $(2^4)^k \equiv 1^k[5]$ أي: $2^{4k} \equiv 1[5]$.

ولدينا: $\begin{cases} 2^{4k} \equiv 1[5] \\ 2^1 \equiv 2[5] \end{cases}$ فإن $2^{4k} \times 2^1 \equiv 1 \times 2[5]$ أي: $2^{4k+1} \equiv 2[5]$.

اقسم الأس 1428
و 2007 على الدور 4

ج/تعيين بواقى قسمة كل من 2^{1428} و 2^{2007} على 5:

لدينا: $\begin{cases} 1428 = 4(357) \\ 2007 = 4(501) + 3 \end{cases}$ ومنه: $2^{1428} \equiv 1[5]$ و $2^{2007} \equiv 3[5]$.

ج/تعيين باقي قسمة العدد $2^{83} - 3 \times 2^{2000} + 2 \times 2^{50}$ على 5:

لدينا: $\begin{cases} 50 = 4(12) + 2 \\ 2000 = 4(500) \\ 83 = 4(20) + 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 2^{50} \equiv 4[5] \\ 2^{2000} \equiv 1[5] \\ 2^{83} \equiv 3[5] \end{cases}$

وعليه: $\begin{cases} 2 \times 2^{50} \equiv 8[5] \\ 3 \times 2^{2000} \equiv 3[5] \\ 2^{83} \equiv 3[5] \end{cases}$ ويكون: $\begin{cases} 2 \times 2^{50} \equiv 3[5] \\ 3 \times 2^{2000} \equiv 3[5] \\ 2^{83} \equiv 3[5] \end{cases}$

وبالتالي: $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83} \equiv (3 - 3 + 3)[5]$

أي: $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83} \equiv 3[5]$

إذن: باقي قسمة $2 \times 2^{50} - 3 \times 2^{2000} + 2^{83}$ على 5 هو 3.

د/التحقق أن $2007 \equiv 2[5]$ ثم استنتاج باقي قسمة 2007^{2008} على 5:

لدينا: $2007 = 5(401) + 2$ أي: باقي قسمة 2007 على 5 هو 2 إذن: $2007 \equiv 2[5]$.

ولدينا: $2007 \equiv 2[5]$ ومنه: $2007^{2008} \equiv 2^{2008}[5]$

وبما أن: $2008 = 4(502)$ فإن: $2007^{2008} \equiv 1[5]$.

إذن: باقي قسمة 2007^{2008} على 5 هو 1.

هـ/تبيان أن العدد $3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003}$ يقبل القسمة على 5:

لدينا: $\begin{cases} 2002 = 4(500) + 2 \\ 2000 = 4(500) \\ 2003 = 4(500) + 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 12^{2002} \equiv 4[5] \\ 2007^{2000} \equiv 1[5] \\ 42^{2003} \equiv 3[5] \end{cases}$

وعليه: $\begin{cases} 3 \times 12^{2002} \equiv 12[5] \\ 3 \times 2007^{2000} \equiv 3[5] \\ 2 \times 42^{2003} \equiv 6[5] \end{cases}$ ويكون: $\begin{cases} 3 \times 12^{2002} \equiv 2[5] \\ 3 \times 2007^{2000} \equiv 3[5] \\ 2 \times 42^{2003} \equiv 1[5] \end{cases}$

$$3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003} \equiv (2 - 3 + 1)[5] \text{ وبالتالي:}$$

$$3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003} \equiv 0[5] \text{ أي:}$$

إذن: العدد $3 \times 12^{2002} - 3 \times 2007^{2000} + 2 \times 42^{2003}$ يقبل القسمة على 5.

مجلة العبقري في الرياضيات (الحساب - بكالوريات جزائرية)
التمارين // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a و b عدنان طبيعيان حيث $a = 1428$ ، $b = 2006$.

1/ عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9.

ب) بيّن أنّ: $b \equiv -1[9]$.

ج) هل العدنان a و b متوافقان بترديد 9؟ برّر إجابتك.

2/ ما هو باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9؟

ب) استنتج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3.

التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

1- احسب باقي قسمة كل من 3^2 ، 3^3 ، 3^4 ، 3^5 ، 3^6 على 7.

2- عيّن باقي قسمة كل من: 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

استنتج باقي قسمة 3^{2008} على 7.

3- بيّن أنّ العدد: $4 + 2 \times 3^{6n} - 3 \times 3^{6n+4}$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 03: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

ليكن العدد الطبيعي $a = 25$

1. أ-تحقق أنّ: $a \equiv 1[3]$.

ب-استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3.

ج-بيّن أنّ: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2. أ) ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 5^n على 3.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $5^n + a^2 \equiv 0[3]$.

التمرين 04: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

1°) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

2°) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد: $(1429^{2009} + 2008^{1430})$ على 9.

3°) بيّن أنّ العدد A حيث: $A = 6 + 7^{3n+2} + 7^{3n+1} + 7^{3n}$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a و b عدنان طبيعيان حيث: $a = 2010$ و $b = 1431$.

1. أ- عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7.

ب- استنتج مما سبق، باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)$ على 7.

ج-تحقق أنّ: $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 6[7]$ واستنتج أنّ $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$.

2. أوجد الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$.

ثمّ استنتج قيم n الأصغر من أو تساوي 16.

التمرين 06: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

في كل من الأسئلة الآتية، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة، مع التعليل.

1. باقي القسمة الإقليدية للعدد (-203) على 5 هو:

(أ) 3 - (ب) 2 (ج) 3

2. x عدد صحيح. إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 7 هو 5، فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2x + 5$ على

7 هو: (أ) 0 (ب) 1 (ج) 2

3. الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة.

التمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = 619$ و $b = 2124$.

1. بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 5.

2. (أ) بين أن: $2124 \equiv -1[5]$.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على 5.

(ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2124^{2n} \equiv 1[5]$.

(د) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$.

التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a ، b و c أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3، باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو

4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

1- عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين: $a \times b$ ، $a^2 - b^2$.

2- (أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $c^{2n} \equiv 1[7]$.

(ب) تحقق أن $48 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7.

التمرين 09: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

اذكر في كل حالة من الحالات الآتية إن كانت العبارة المقترحة صحيحة أو خاطئة مع التعليل.

1. n و n' عدنان طبيعيين حيث: $n = 3n' + 5$. باقي قسمة n على 3 هو 5.

2. باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7 هو 4. (لاحظ أن: $2012 = 3 \times 670 + 2$)

3. n عدد صحيح حيث: $n \equiv 2[11]$. باقي القسمة الإقليدية للعدد $2n^2 - 9$ على 11 هو 10.

4. دالة تناظرية.

التمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a و b عدنان طبيعيين بحيث: $a + b \equiv 7[11]$ و $a - b \equiv 5[11]$.

1. (أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11.

(ب) بين أن: $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$ ثم استنتج أن: $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$.

2. (أ) أثبت أن: $a^5 \equiv -1[11]$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $a^{10k} \equiv 1[11]$.

3. (أ) تحقق أن: $2012 = 10 \times 201 + 2$.

(ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{2012} على العدد 11.

التمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

1- هل العددين 2013 و 718 متوافقان بترديد؟

2- (أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7.

(ب) استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n: 4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$.

3- (أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2013 و 718 على 7.

(ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7.

4- (أ) تحقق أن: $1434 \equiv -1[7]$.

(ب) عين الأعداد الطبيعية n ، الأصغر من 25، بحيث: $1434^{2n} + n \equiv 0[7]$.

التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a و b عدنان صحيحان حيث: $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.

1- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7.

2- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7.

3- (أ) تحقق أن: $b \equiv -1[7]$.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{1434} و b^{2013} على 7.

4- عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$.

التمرين 13: (05 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $k: 10^k \equiv 1[9]$.

3) استنتج أن: $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$.

4) (أ) تحقق أن: $2^3 \equiv -1[9]$.

(ب) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$.

التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

عيّن الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الخمسة مع التبرير:

الاقتراح (أ)	الاقتراح (ب)	الاقتراح (ج)	
8	5	2	1 عدد قواسم العدد 1435 هو:
-1	7	6	2 إذا كان $a \equiv -1[8]$ فإن باقي قسمة a على 8 هو:
2	4	3	3 العددين 1435 و 2014 متوافقان بتردد:
$x^9 + y^9 \equiv 3[5]$	$x^9 + y^9 \equiv 2[5]$	$x^9 + y^9 \equiv 4[5]$	4 إذا كان $x \equiv 2[5]$ و $y \equiv 2[5]$ فإن:
$9 \equiv 7[6]$	$9 \equiv 7[2]$	$9 \equiv 7[3]$	5 لدينا $21[6] \equiv 27$ إذن:

التمرين 15: (05 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التعليل، من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأربع الآتية:

(1) إذا كان a عددا صحيحاً حيث: $a \equiv -1[5]$ فإن:

(أ) $a \equiv 2[5]$ (ب) $a \equiv 6[5]$ (ج) $a \equiv 99[5]$

(2) باقي القسمة الإقليدية للعدد 99- على 7 هو:

(أ) -1

(ب) 6

(ج) 1

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على:

(أ) 3

(ب) 5

(ج) 2

(4) مجموع كل ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة هو دوماً:

(أ) عدد زوجي

(ب) مضاعف للعدد 3

(ج) مضاعف للعدد 4

التمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a و b عدنان صحيحان يحققان: $a \equiv 13[7]$ و $b \equiv -6[7]$.

(1) عَيِّن باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين a و b .

(2) بيِّن أنَّ العددين $a^3 + 1$ و $b^3 - 1$ يقبلان القسمة على 7.

(3) (أ) تحقق أنَّ: $a \equiv 2015[7]$ و $b \equiv 1436[7]$.

(ب) عَيِّن باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $2015^3 + 1436^3$.

(ج) استنتج أنَّ: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$.

التمرين 17: (05 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(1) عَيِّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ و 2^4 على العدد 5.

(2) (أ) بيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2^{4n} \equiv 1[5]$.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2016} على العدد 5.

(3) عَيِّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$.

التمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(1) (أ) عَيِّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^3 على 9.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k} \equiv 1[9]$.

(ج) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9.

(د) عَيِّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2015^{2016} على 9.

(2) (أ) بيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8^{2n} \equiv 1[9]$.

(ب) عَيِّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفاً للعدد 9.

التمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

نعتبر الأعداد الطبيعية a, b و c حيث $a = 2016$ ، $b = 1437$ و $c = 1954$.

(1) عَيِّن باقي القسمة الإقليدية لكل من a, b و c على 5.

(2) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد: $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و b^4 على 5.

(3) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $b^{4n} \equiv 1[5]$.

(ب) استنتج أن العدد $1 - b^{2016}$ يقبل القسمة على 5.

(أ) تحقق أن: $c \equiv -1[5]$.

(ب) بين أن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0[5]$.

التمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

a, b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث $a \equiv -5[7]$ ، $b = 1966$ و $c = 2017$.

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a, b و c على 7.

(2) تحقق أن: $b \equiv -1[7]$.

(3) اثبت أن العدد: $2 - c^{1438} + 3 \times b^{2017}$ يقبل القسمة على 7.

(4) تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k} \equiv 1[7]$ ثم استنتج أن: $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.

(5) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2^n + 3$ قابلاً للقسمة على 7.

التمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4، 4^2 و 4^3 على 9.

(ب) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n} \equiv 1[9]$.

(ج) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n+1} \equiv 4[9]$.

(2) تحقق أن: $2020^{1438} \equiv 4[9]$.

(3) بين أن العدد $(1995 + 2017^2 - 2020^{1438})$ يقبل القسمة على 9.

التمرين 22: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

a و b عدنان صحيحان حيث: $a \equiv 14[13]$ و $b \equiv -1[13]$.

(1) بين أن باقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب.

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a + b$ ، $a - b$ و $2a + b^2$ على 13.

(2) بين أن العدد $b^{2017} + a^{1438}$ يقبل القسمة على 13.

(3) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$.

التمرين 23: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

(2) عيّن العدد الطبيعي a بحيث يكون: $2018 = 4a + 2$.

(3) بين أن العدد: $5 - 2017^8 + 2^{2018}$ يقبل القسمة على 5.

(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$.

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$.

التمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

a و b عدنان طبيعيان غير معدومين حيث $a = 4b + 6$.

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4.

(2) بين أن a و b متوافقان بترديد 3.

(3) نضع $b = 489$.

(أ) تحقق أن $a \equiv -1[13]$.

- ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13.
ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلاً للقسمة على 13.

التمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- a و b عدنان طبيعيان حيث: $a = 2019$ و $b = 2969$.
(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7.
ب) استنتج أنّ العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7.
(2) بيّن أنّ: $9a + b \equiv 0[7]$.
(3) تحقق أنّ: $2a \equiv -1[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2969} \times 2^{2969}$ على 7.
(4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث: $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$.

التمرين 26: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- a و b العدنان الطبيعيان حيث $a = 2019$ ، $b = 1441$.
(1) تحقق أنّ: $a \equiv 13[17]$.
(2) بيّن أنّ: a و b متوافقان بترديد 17، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 17.
(3) بيّن أنّ $a \times b \equiv -1[17]$ ثم استنتج أنّ $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 0[17]$.
(4) أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 17.
(5) بيّن أنّ: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$.
(6) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0[17]$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الحساب - بكالوريات جزائرية)
الحلول // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

حل التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: آ ف؛ لغ أ.

لدينا: $a = 1428$ و $b = 2006$.

1/ تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9:

لدينا: $[6] \equiv a = 9(158) + [6]$ أي: $[a \equiv 6[9]]$ ، ومنه: باقي قسمة a على 9 هو $[6]$.

ب) تبيان أن $[b \equiv -1[9]]$: (نبين أن الفرق $(-1) - b$ مضاعف لـ 9)

لدينا: $[b \equiv -1[9]]$ إذن: $b - (-1) \equiv 0[9]$ أي: $b - (-1) = b + 1 = 2007 = 9(223)$.

ج) لدينا: $[b \equiv -1[9]]$ ومنه: $[b \equiv (-1 + 9)[9]]$ أي: $[b \equiv 8[9]]$ ، ومنه: باقي قسمة b على 9 هو $[8]$.

نلاحظ أن: العددان a و b ليس لهما نفس الباقي على 9، فهما غير متوافقين بترديد 9.

2/ تعيين باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 6[9] \\ b \equiv -1[9] \end{cases}$ ومنه: $a + b^2 \equiv 6 + (-1)^2[9]$ أي: $a + b^2 \equiv 7[9]$

إذن: باقي قسمة $(a + b^2)$ على 9 هو $[7]$.

ب) استنتاج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3:

حسب نتيجة السؤال أ) لدينا: $a + b^2 \equiv 7[9]$

معناه: $(k \in \mathbb{N}) a + b^2 = 9k + [7]$

ومنه: $a + b^2 = 3(3k) + 3(2) + 1 = 3(3k + 2) + 1 = 3k' + [1]$

(حيث $k' = k + 2$)

إذن: باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3 هو $[1]$.

حل التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: آ ف؛ لغ أ.

1- حساب باقي قسمة كل من $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ على 7:

لدينا: $[2] \equiv 3^2$ ، إذن: باقي قسمة 3^2 على 7 هو 2.

$[6] \equiv 3^3$ ، إذن: باقي قسمة 3^3 على 7 هو 6.

$[4] \equiv 3^4$ ، إذن: باقي قسمة 3^4 على 7 هو 4.

$[5] \equiv 3^5$ ، إذن: باقي قسمة 3^5 على 7 هو 5.

$[1] \equiv 3^6$ ، إذن: باقي قسمة 3^6 على 7 هو 1.

2- تعيين باقي قسمة كل من 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعي غير معدوم:

لدينا: $[1] \equiv 3^6$ ومنه: $(n \in \mathbb{N}^*) (3^6)^n \equiv (1)^n[7]$

وعليه: $[1] \equiv 3^{6n}$ إذن: باقي قسمة 3^{6n} على 7 هو $[1]$.

• لدينا: $\begin{cases} 3^{6n} \equiv 1[7] \\ 3^4 \equiv 4[7] \end{cases}$ ومنه: $3^{6n} \times 3^4 \equiv (1 \times 4)[7]$

أي: $3^{6n+4} \equiv 4[7]$ إذن: باقي قسمة 3^{6n+4} على 7 هو $4[7]$.

استنتاج باقي قسمة 3^{2008} على 7:

نقسم الأس 2008 على الدور 6 نجد: $2008 = 6(334) + 4$ أي: $2008 = 6n + 4$ ($n = 334$)

ومنه: $3^{2008} \equiv 4[7]$ ، إذن: باقي قسمة 3^{2008} على 7 هو 4.

3-تبيان أن العدد، $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv (3 \times 4 - 2 \times 1 + 4)[7]$

ومنه: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv (12 - 2 + 4)[7]$

أي: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv 14[7]$

وبالتالي: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4 \equiv 0[7]$

إذن: $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

حل التمرين 03: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: العدد الطبيعي $a = 25$

1.أ-التحقق أن: $a \equiv 1[3]$:

ط1) لدينا: $a = 3(8) + 1$ ومنه: باقي قسمة a على 3 هو 1 إذن: $a \equiv 1[3]$

ط2) نُبين أن الفرق $a - 1$ مضاعف لـ 3:

لدينا: $a - 1 = 25 - 1 = 24 = 3(8)$ أي: $a - 1 \equiv 0[3]$ إذن: $a \equiv 1[3]$

ب-استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3:

لدينا: $a \equiv 1[3]$ ومنه: $2a^2 + 4 \equiv 2(1)^2 + 4 \equiv 6 \equiv 0[3]$

أي: $2a^2 + 4 \equiv 0[3]$

وبالتالي: $2a^2 + 4 \equiv 0[3]$ ، إذن: باقي قسمة العدد $2a^2 + 4$ على 3 هو 0.

ج-تبيان أن: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$:

لدينا: $a \equiv 1[3]$ ومنه: $a^{360} - 5 \equiv (1)^{360} - 5 \equiv 1 - 5 \equiv -4 \equiv 2[3]$

أي: $a^{360} - 5 \equiv (1 + 1)[3]$ إذن: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2.أ) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 5^n على 3:

لدينا: $5^0 \equiv 1[3]$ ، $5^1 \equiv 2[3]$ و $5^2 \equiv 1[3]$

ومنه: بواقي قسمة 5^n على 3 تُشكل متتالية دورية، دورها 2.

إذن: $5^{2k} \equiv 1[3]$ ، $5^{2k+1} \equiv 2[3]$ ($k \in \mathbb{N}$)

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث، $5^n + a^2 \equiv 0[3]$:

$5^n + a^2 \equiv 0[3]$ يعني: $5^n + 1 \equiv 0[3]$

ومنه: $5^n \equiv -1[3]$

وعليه: $5^n \equiv 2[3]$

حسب نتيجة السؤال أ) فإن: $n = 2k + 1$ ، (حيث $k \in \mathbb{N}$).

حل التمرين 04: (05 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

1°) دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9:

$$\text{لدينا: } 7^0 \equiv 1[9], 7^1 \equiv 7[9], 7^2 \equiv 4[9], 7^3 \equiv 1[9].$$

ومنه: بواقي قسمة 7^n على 9 تُشكل متتالية دورية، دورها 3.

$$\text{إذن: } (k \in \mathbb{N}), \begin{cases} 7^{3k} \equiv 1[9] \\ 7^{3k+1} \equiv 7[9] \\ 7^{3k+2} \equiv 4[9] \end{cases}$$

2°) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد، $(1429^{2009} + 2008^{1430})$ على 9:

$$\text{لدينا: } 1429 \equiv 7[9] \text{ ومنه: } 1429^{2009} \equiv 7^{2009}[9]$$

$$\text{إذن: } 1429^{2009} \equiv 4[9], \text{ لأن } 2009 = 3(669) + 2 \text{ (الشكل من الشكل } 3k + 2)$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } 2008 \equiv 1[9] \text{ ومنه: } 2008^{1430} \equiv 1^{1430}[9] \text{ إذن: } 2008^{1430} \equiv 1[9]$$

$$\text{نجد: } 1429^{2009} + 2008^{1430} \equiv (4 + 1)[9]$$

$$\text{أي: } 1429^{2009} + 2008^{1430} \equiv 5[9], \text{ إذن: باقي قسمة } 1429^{2009} + 2008^{1430} \text{ على 9 هو 5.}$$

3°) تبين أن العدد A حيث، $A = 7^{3n} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي

n :

$$A \text{ يقبل القسمة على 9 معناه: } A \equiv 0[9]$$

$$\text{نُبين أن } A \equiv 0[9]:$$

$$\text{لدينا: } 7^{3n} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6 \equiv (1 + 7 + 4 + 6)[9]$$

$$\text{ومنه: } A \equiv 18[9]$$

$$\text{وعليه: } A \equiv 0[9], \text{ إذن: } A \text{ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

حل التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

$$\text{لدينا: } a = 2010 \text{ و } b = 1431.$$

1. تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7:

$$\text{لدينا: } a = 7(287) + 1 \text{ أي: } a \equiv 1[7] \text{ إذن: باقي قسمة } a \text{ على 7 هو 1.}$$

$$\text{لدينا: } b = 7(204) + 3 \text{ أي: } b \equiv 3[7] \text{ إذن: باقي قسمة } b \text{ على 7 هو 3.}$$

ب- استنتاج مما سبق، باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)$ على 7:

$$\text{لدينا: } a + 2b \equiv 1 + 2(3)[7] \text{ أي: } a + 2b \equiv 7[7] \text{ وبالتالي: } a + 2b \equiv 0[7]$$

$$\text{إذن: باقي قسمة } a + 2b \text{ على 7 هو 0. (معناه: } (a + 2b) \text{ يقبل القسمة على 7)}$$

$$\text{ج- التحقق أن، } a^3 \equiv 1[7] \text{ و } b^3 \equiv 6[7]:$$

$$\text{لدينا: } a \equiv 1[7] \text{ ومنه: } a^3 \equiv (1)^3[7] \text{ إذن: } a^3 \equiv 1[7].$$

$$\text{ولدينا: } b \equiv 3[7] \text{ ومنه: } b^3 \equiv (3)^3[7] \text{ أي: } b^3 \equiv 27[7] \text{ وبما: } 27 \equiv 6[7] \text{ فإن: } b^3 \equiv 6[7].$$

$$\text{استنتاج أن } a^3 + b^3 \equiv 0[7]:$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a^3 \equiv 1[7] \\ b^3 \equiv 6[7] \end{cases} \text{ ومنه: } a^3 + b^3 \equiv (1 + 6)[7]$$

أي: $a^3 + b^3 \equiv 7[7]$ إذن: $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$ (لأن $7 \equiv 0[7]$)

2. ايجاد الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$

معناه: $n + a^3 \equiv b[7]$ $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$

ومنه: $n \equiv (3 - 1)[7]$

أي: $n \equiv 2[7]$

إذن: $n = 7k + 2$ (حيث $k \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي)

استنتاج قيم n الأصغر من أو تساوي 16:

$n \leq 16$ معناه: $7k + 2 \leq 16$

ومنه: $k \leq \frac{14}{7}$

أي: $k \leq 2$ وبالتالي:

$k =$	0	1	2
$n =$	2	9	16

حل التمرين 06: (06 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

اختيار الإجابة الصحيحة، مع التعليل:

1. باقي القسمة الإقليدية للعدد (-203) على 5 هو: 2 .

لأن: $-203 = 5(-41) + 2$ أي: $-203 \equiv 2[5]$ إذن: الإجابة الصحيحة هي: ب).

2. x عدد صحيح. إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 7 هو 5. فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2x + 5$ على 7 هو: 1 .

لأن: إذا كان $x \equiv 5[7]$ يكون: $2x \equiv 10[7]$

ومنه: $2x \equiv 3[7]$

وعليه: $2x + 5 \equiv (3 + 5)[7]$

أي: $2x + 5 \equiv 8[7]$ وبالتالي: $2x + 5 \equiv 1[7]$ إذن: الإجابة الصحيحة هي: ب).

3. الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة.

حل التمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: $a = 619$ و $b = 2124$.

1. تبين أن العددين a و b متوافقان بترديد 5:

ط01: نبين أن الفرق $(b - a)$ مضاعف لـ 5:

لدينا: $(301)5 = 1505 = 2124 - 619 = b - a$ أي: $b - a \equiv 0[5]$ إذن: $a \equiv b[5]$

ط02: نبين أن العددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 5:

لدينا: $a = 5(123) + 4$ أي: $a \equiv 4[5]$ إذن: باقي قسمة a على 5 هو 4 .

ولدينا: $b = 5(424) + 4$ أي: $b \equiv 4[5]$ إذن: باقي قسمة b على 5 هو 4 .

نلاحظ أن: للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 5 فهما متوافقين بترديد 5.

2. تبين أن، $2124 \equiv -1[5]$ ($b \equiv -1[5]$)

نبين أن الفرق $(-1) - b$ مضاعف لـ 5.

لدينا: $(425) \equiv 5$ أي: $b - (-1) = b + 1 = 2125 = 5(425)$ إذن: $b \equiv -1[5]$.

(ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على 5:
(استنتاج باقي قسمة b^{720} و a^{721} على 5)

لدينا: $b \equiv -1[5]$ ومنه: $b^{720} \equiv (-1)^{720}[5] = 1[5]$ ويكون: $b^{720} \equiv 1[5]$ (لأن 720 عدد زوجي)
إذن: باقي قسمة b^{720} على 5 هو 1.

ولدينا: $a \equiv -1[5]$ (لأن $a \equiv b[5]$) ومنه: $a^{721} \equiv (-1)^{721}[5] = -1[5]$

ويكون: $a^{721} \equiv -1[5]$ (لأن 721 عدد فردي)

وبالتالي: $a^{721} \equiv 4[5]$ ، إذن: باقي قسمة a^{721} على 5 هو 4.

(ج) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2124^{2n} \equiv 1[5]$ (لأن $b^{2n} \equiv 1[5]$)

لدينا: $b \equiv -1[5]$ ومنه: $b^{2n} \equiv (-1)^{2n}[5] = 1[5]$ ويكون: $b^{2n} \equiv 1[5]$ (لأن $2n$ عدد زوجي)

(د) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$

لدينا: $b \equiv -1[5]$ ومنه: $b^{4n} \equiv (-1)^{4n}[5] = 1[5]$ ويكون: $b^{4n} \equiv 1[5]$ (لأن $4n$ عدد زوجي)

ولدينا: $a \equiv -1[5]$ ومنه: $a^{4n} \equiv (-1)^{4n}[5] = 1[5]$ ويكون: $a^{4n} \equiv 1[5]$ (لأن $4n$ عدد زوجي)

نجد: $a^{4n} \times a \equiv (1 \times (-1))[5] = -1[5]$ ومنه: $a^{4n+1} \equiv -1[5]$ ويكون: $a^{4n+1} \equiv 4[5]$

لدينا: $b^{4n} + a^{4n+1} + n \equiv 0[5]$ نكافئ: $1 + 4 + n \equiv 0[5]$ ومنه: $n \equiv -5[5]$ وعليه: $n \equiv 0[5]$ إذن: $n = 5k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي).

حل التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: a, b و c أعداد صحيحة

باقي قسمة العدد a على 7 هو 3، أي: $a \equiv 3[7]$

باقي قسمة العدد b على 7 هو 4، أي: $b \equiv 4[7]$

باقي قسمة العدد c على 7 هو 6، أي: $c \equiv 6[7]$

1- تعيين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين، $a \times b$ ، $a^2 - b^2$:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[7] \\ b \equiv 4[7] \end{cases}$ ومنه: $a \times b \equiv 12[7]$

وبالتالي: $a \times b \equiv 5[7]$ ، إذن: $(a \times b)$ باقي قسمة على 7 هو 5.

ولدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[7] \\ b \equiv 4[7] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a^2 \equiv 9[7] \\ b^2 \equiv 16[7] \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} a^2 \equiv 2[7] \\ b^2 \equiv 2[7] \end{cases}$ وعليه: $a^2 - b^2 \equiv 0[7]$

إذن: باقي قسمة $(a^2 - b^2)$ على 7 هو 0. (يقبل القسمة على 7)

2- (أ) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $c^{2n} \equiv 1[7]$:

لدينا: $c \equiv 6[7]$ ومنه: $c \equiv (6 - 7)[7] = -1[7]$

أي: $c \equiv -1[7]$

وبالتالي: $c^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] = 1[7]$ ، إذن: $c^{2n} \equiv 1[7]$ (لأن $2n$ عدد زوجي)

(ب) التحقق أن $48 \equiv 6[7]$:

ط01: لدينا: $48 = 7(6) + 6$ معناه: باقي قسمة 48 على 7 هو 6 إذن: $48 \equiv 6[7]$.

ط02: (نُبين أن الفرق $(48 - 6)$ مضاعف لـ 7)

لدينا: $48 - 6 = 42 = 7(6)$ أي: $48 - 6 \equiv 0[7]$ إذن: $48 \equiv 6[7]$.

استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 48^{2010} و 48^{2011} على 7:

لدينا: $48 \equiv 6[7]$ ومنه: $48 \equiv (6 - 7)[7]$

أي: $48 \equiv -1[7]$

وعليه: $\begin{cases} 48^{2010} \equiv (-1)^{2010}[7] \\ 48^{2011} \equiv (-1)^{2011}[7] \end{cases}$ وبالتالي: $48^{2010} \equiv 1[7]$ (لأن 2010 عدد زوجي)

و $48^{2011} \equiv -1[7]$ (لأن 2011 عدد فردي)، ويكون: $48^{2011} \equiv 6[7]$

إذن: باقي قسمة 48^{2010} على 7 هو 1، وباقي قسمة 48^{2011} على 7 هو 6.

حل التمرين 09: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

ذكر في كل حالة من الحالات إن كانت العبارة المقترحة صحيحة أو خاطئة مع التعليل:

1. خاطئة، لأن:

ط01: $5 > 3$

ط02: $n = 3n' + 5 = 3n' + 3 + 2 = 3(n' + 1) + 2 = 3n'' + 2$ (حيث $n'' = n' + 1$)

إذن: باقي قسمة n على 3 هو 2.

2. صحيحة، لأن:

لدينا: $2^{2012} = 2^{3(670)+2} = 2^{3(670)} \times 2^2$

ولدينا من جهة أخرى: $2^3 \equiv 1[7]$ ومنه: $(2^3)^{670} \equiv 1^{670}[7]$

أي: $2^{3(670)} \equiv 1[7]$ (1) و $2^2 \equiv 4[7]$ (2)

من (1) و (2) نجد: $2^{3(670)} \times 2^2 \equiv (1 \times 4)[7]$

أي: $2^{3(670)+2} \equiv 4[7]$

وبالتالي: $2^{2012} \equiv 4[7]$ ، إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7 هو 4

3. صحيحة، لأن: $n \equiv 2[11]$ ومنه: $n^2 \equiv 4[11]$

وعليه: $2n^2 \equiv 8[11]$

ويكون: $2n^2 - 9 \equiv (8 - 9)[11]$

أي: $2n^2 - 9 \equiv -1[11]$

ومنه: $2n^2 - 9 \equiv (-1 + 11)[11]$

وبالتالي: $2n^2 - 9 \equiv 10[11]$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $2n^2 - 9$ على 11 هو 10.

4. دالة تناظرية.

حل التمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: a و b عدنان طبيعيان بحيث، $a + b \equiv 7[11]$ و $a - b \equiv 5[11]$.

1. أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a - b) \equiv (7 \times 5)[11] \text{ ومنه: } \begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[11] \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 \equiv 35[11] \text{ أي:}$$

$$a^2 - b^2 \equiv 2[11] \text{ ولكون: } 35 \equiv 2[11] \text{ فإن: } \boxed{a^2 - b^2 \equiv 2[11]}$$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11 هو $\boxed{2}$.

ب) تبيان أن، $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$:

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[11] \end{cases} \text{ بالجمع نجد: } (a + b) + (a - b) \equiv (7 + 5)[11]$$

$$a + b + a - b \equiv 12[11] \text{ أي:}$$

$$2a \equiv 12[11] \text{ ومنه:}$$

$$2a \equiv 1[11] \text{ ولكون: } 12 \equiv 1[11] \text{ فإن: } \boxed{2a \equiv 1[11]}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a + b \equiv 7[11] \\ a - b \equiv 5[11] \end{cases} \text{ بالطرح نجد: } (a + b) - (a - b) \equiv (7 - 5)[11]$$

$$a + b - a + b \equiv 2[11] \text{ أي:}$$

$$2b \equiv 2[11] \text{ ومنه: } 2b \equiv 2[11] \text{ إذن: } \boxed{2b \equiv 2[11]}$$

استنتاج أن، $a \equiv 6[11]$ و $b \equiv 1[11]$:

$$\text{لدينا: } 2a \equiv 1[11] \text{ ومنه: } 12a \equiv 6[11] \text{ وبمأن: } 12 \equiv 1[11] \text{ فإن: } \boxed{a \equiv 6[11]}$$

$$\text{ولدينا: } 2b \equiv 2[11] \text{ وبمأن: } 2 \equiv 2[11] \text{ فإن: } \boxed{b \equiv 1[11]}$$

2. أ) اثبات أن، $a^5 \equiv -1[11]$:

$$\text{لدينا: } a \equiv 6[11] \text{ ومنه: } a^5 \equiv (6)^5[11]$$

$$a^5 \equiv 7776[11] \text{ أي:}$$

$$a^5 \equiv 10[11] \text{ وعليه:}$$

$$\text{ويكون: } a^5 \equiv (10 - 11)[11] \text{ إذن: } \boxed{a^5 \equiv -1[11]}$$

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $a^{10k} \equiv 1[11]$:

$$\text{لدينا: } a^5 \equiv -1[11] \text{ ومنه: } (a^5)^{2k} \equiv (-1)^{2k}[11] \text{ إذن: } \boxed{a^{10k} \equiv 1[11]} \text{ (عدد زوجي } 2k)$$

3. أ) التحقق أن، $2012 = 10 \times 201 + 2$:

$$\text{لدينا: } 2012 = 2010 + 2 = 10 \times 201 + 2 \text{ (الانتقال من طرف والوصول إلى الطرف الآخر)}$$

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{2012} على العدد 11:

$$\text{لدينا: } a^{2012} = a^{10(201)+2} = a^{10(201)} \times a^2 \text{ حسب 2. ب) نجد: } \boxed{a^{10(201)} \equiv 1[11]} \text{ (1)}$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } a \equiv 6[11] \text{ ومنه: } a^2 \equiv 36[11] \text{ وعليه: } \boxed{a^2 \equiv 3[11]} \text{ (2)}$$

$$\text{من (1) و (2) نجد: } a^{10(201)} \times a^2 \equiv (1 \times 3)[11]$$

وبالتالي: $a^{2012} \equiv 3[11]$ ، إذن: باقي قسمة a^{2012} على 11 هو 3.

حل التمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

1-دراسة توافق العدان 2013 و 718 بترديد 7:

ط01: لدينا: $2013 = 7(287) + 4$ أي: $2013 \equiv 4[7]$

ولدينا: $718 = 7(102) + 4$ أي: $718 \equiv 4[7]$

إذن: العدان 2013 و 718 متوافقان بترديد 7 لأنّ لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 7 وهو 4.

ط02: لدينا: $2013 - 718 = 1295 = 7(185)$

أي: $2013 - 718 \equiv 0[7]$

وبالتالي: الفرق $(2013 - 718)$ مضاعف لـ 7، إذن: $2013 \equiv 718[7]$.

2-أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7:

لدينا: $4^6 \equiv 1[7]$ ($4^6 = 4096$)، إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7 هو 1.

ب) استنتاج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$:

لدينا: $4^6 \equiv 1[7]$ ومنه: $(4^6)^n \equiv 1^n[7]$ ($n \in \mathbb{N}$)

وعليه: $4^{6n} \equiv 1[7]$

ويكون: $4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$

3-أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2013 و 718 على 7:

لدينا: $2013 = 7(287) + 4$ أي: $2013 \equiv 4[7]$

ولدينا: $718 = 7(102) + 4$ أي: $718 \equiv 4[7]$

إذن: باقي قسمة كل من 2013 و 718 على 7 هو 4.

ب) تبين أنّ، العدد $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7: (نُبين أنّ $3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 0[7]$)

لدينا: $3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv (3 \times 4^{6n} + 4)[7]$

ومنّه: $3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv (3(1) + 4)[7]$

وعليه: $3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 7[7]$

وبالتالي: $3 \times 718^{6n} + 2013 \equiv 0[7]$

إذن: $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7.

4-أ) التحقّق أنّ، $1434 \equiv -1[7]$:

الطريقة 01: نُبين أنّ الفرق $(-1) - 1434$ مضاعف لـ 7

لدينا: $1434 - (-1) = 1434 + 1 = 1435 = 7(205)$

أي: $1434 - (-1) \equiv 0[7]$

إذن: $1434 \equiv -1[7]$

ب) تعيين الأعداد الطبيعية n ، الأصغر من 25، بحيث، $1434^{2n} + n \equiv 0[7]$:

$1434^{2n} + n \equiv 0[7]$ معناه: $(-1)^{2n} + n \equiv 0[7]$

ومنّه: $1 + n \equiv 0[7]$ (لأنّ $2n$ عدد زوجي)

وعليه: $n \equiv -1[7]$

ويكون: $n \equiv 6[7]$ ، وبالتالي: $n = 7k + 6$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

▪ $n < 25$ أي: $7k + 6 < 25$

ومنه: $7k < 19$

وعليه: $k < \frac{19}{7}$

وبالتالي: $k \in \{0; 1; 2\}$ إذن: $n \in \{6; 13; 20\}$

حل التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: a و b عدنان صحيحان حيث، $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.

1- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2[7] \\ b \equiv 6[7] \end{cases}$ ومنه: $3a + b \equiv 3(2) + 6[7]$

وعليه: $3a + b \equiv 12[7]$

ومنه: $3a + b \equiv 5[7]$ ، إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7 هو **5**.

2- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7:

▪ لدينا: $a \equiv 2[7]$ ومنه: $a^2 \equiv 2^2[7]$ أي: $a^2 \equiv 4[7]$ (1)

▪ ولدينا: $b \equiv 6[7]$ ومنه: $b^2 \equiv 6^2[7]$ أي: $b^2 \equiv 36[7]$ وعليه: $b^2 \equiv 1[7]$ ويكون: $3b^2 \equiv 3[7]$ (2)

من (1) و (2) نجد: $a^2 + 3b^2 \equiv (4 + 3)[7]$

أي: $a^2 + 3b^2 \equiv 7[7]$

وبالتالي: $a^2 + 3b^2 \equiv 0[7]$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7 هو **0**. $a^2 + 3b^2$ يقبل القسمة على 7

3- (أ) التحقق أن، $b \equiv -1[7]$:

لدينا: $b \equiv 6[7]$ ومنه: $b \equiv (6 - 7)[7]$ إذن: $b \equiv -1[7]$

(ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2013} و b^{1434} على 7:

▪ لدينا: $b \equiv -1[7]$ ومنه: $b^{2013} \equiv (-1)^{2013}[7]$

وعليه: $b^{2013} \equiv -1[7]$ (لأن 2013 عدد فردي)

وبالتالي: $b^{2013} \equiv 6[7]$ ، إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد b^{2013} على 7 هو **6**.

▪ لدينا: $b \equiv -1[7]$ ومنه: $b^{1434} \equiv (-1)^{1434}[7]$

وعليه: $b^{1434} \equiv 1[7]$ (لأن 1434 عدد زوجي)

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد b^{1434} على 7 هو **1**

4- تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث، $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$:

لدينا: $a + b \equiv (2 + 6)[7]$ أي: $a + b \equiv 8[7]$

ومنه: $a + b \equiv 1[7]$

وعليه: $(a + b)^n \equiv 1^n[7]$ (حيث $n \in \mathbb{N}$)

ويكون: $(a + b)^n \equiv 1[7]$

$(a + b)^n + n \equiv 0[7]$ تكافئ: $1 + n \equiv 0[7]$

ومنه: $n \equiv -1[7]$

وعليه: $n \equiv 6[7]$ ، إذن: $n = 7k + 6$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 13: (05 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(1) تعيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9:

لدينا: $28 = 9(3) + 1$ أي: $28 \equiv 1[9]$ إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9 هو 1 .

(2) تبيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $10^k \equiv 1[9]$:

لدينا: $10 \equiv 1[9]$ ومنه: $10^k \equiv 1^k[9]$ ($k \in \mathbb{N}$)

إذن: $10^k \equiv 1[9]$.

(3) استنتاج أنّ، $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$:

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) $28 \equiv 1[9]$.

ولدينا حسب نتيجة السؤال (2): من أجل كل عدد طبيعي k ، $10^k \equiv 1[9]$

يعني: $10^2 \equiv 1[9]$ ، $10^3 \equiv 1[9]$ و $10^4 \equiv 1[9]$

ومنّه: $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv (4(1) + 3(1) + 2(1) + 1)[9]$

وعليه: $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv (4 + 3 + 2 + 1)[9]$

أي: $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 10[9]$

إذن: $4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$ (لأنّ $10 \equiv 1[9]$).

(4) أ) التحقّق أنّ، $2^3 \equiv -1[9]$:

ط01: لدينا: $2^3 = 8$ و $8 \equiv 8[9]$ ومنه: $8 \equiv (8 - 9)[9]$ أي: $8 \equiv -1[9]$ إذن: $2^3 \equiv -1[9]$.

ط02: نبيّن أنّ الفرق $2^3 - (-1)$ مضاعف لـ 9

لدينا: (1) $2^3 - (-1) = 2^3 + 1 = 9 = 9[9]$ أي: $2^3 - (-1) \equiv 0[9]$ إذن: $2^3 \equiv -1[9]$.

(ب) تعيّن الأعداد الطبيعية n بحيث، $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$:

لدينا: $2^{6n} = 2^{3 \times 2n} = (2^3)^{2n}$

ولدينا من جهة أخرى: $2^3 \equiv -1[9]$ ومنه: $(2^3)^{2n} \equiv (-1)^{2n}[9]$

ويكون: $2^{6n} \equiv 1[9]$ (لأنّ $2n$ عدد زوجي)

$1 + n - 1 \equiv 0[9]$ تُكافئ: $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$

أي: $n \equiv 0[9]$

وبالتالي: n مضاعف لـ 9 (أو يقبل القسمة على 9)

إذن: $n = 9k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

تعيّن الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

(1)

$$\begin{array}{r|l} 1435 & 5 \\ 287 & 7 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

ومنّه: $1435 = 5^1 \times 7^1 \times 41^1$

وبالتالي: عدد قواسم العدد 1435 هو $8 = 2 \times 2 \times 2 = (1+1) \times (1+1) \times (1+1)$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (أ).

(2) إذا كان $a \equiv -1[8]$ فإن $a \equiv (-1 + 8)[8] \equiv 7[8]$ أي: $a \equiv 7[8]$ وبالتالي: باقي قسمة a على 8 هو 7 .
إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب).

(3) ط01: لدينا: $2014 = 3(671) + 1$ أي: $2014 \equiv 1[3]$

ولدينا: $1435 = 3(478) + 1$ أي: $1435 \equiv 1[3]$

نلاحظ أن: العددين 2014 و 1435 لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 3 فهما متوافقان بترديد 3.
إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج).

ط02: لدينا: $2014 - 1435 = 579 = 3(193)$

أي: $2014 - 1435 \equiv 0[3]$

ومنه: الفرق $(2014 - 1435)$ مضاعف لـ 3.

وبالتالي: $2014 \equiv 1435[3]$ ، إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج).

(4) لدينا: $\begin{cases} x \equiv 2[5] \\ y \equiv 2[5] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x^9 \equiv 2^9[5] \\ y^9 \equiv 2^9[5] \end{cases}$

وبما أن: $2^9 = 512 \equiv 2[5]$ فإن: $\begin{cases} x^9 \equiv 2[5] \\ y^9 \equiv 2[5] \end{cases}$

وعليه: $x^9 + y^9 \equiv 4[5]$ ، إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج).

(5) لدينا: $27 \equiv 21[6]$

ط01: $27 \equiv 21[6]$ معناه: $27 = 6k + 21$ أي: $3 \times 9 \equiv (3 \times 7)[3 \times 2]$ ومنه: $9 \equiv 7[2]$

ط02: $27 \equiv 21[6]$ معناه: $27 = 6k + 21$

ومنه: $27 = 3(2k + 7)$

وعليه: $\frac{27}{3} = \frac{3(2k+7)}{3}$

أي: $9 = 2k + 7$

وبالتالي: $9 \equiv 7[2]$ ، إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب).

حل التمرين 15: (05 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التعليل:

(1) إذا كان a عددا صحيحاً حيث: $a \equiv -1[5]$ فإن: (ج) $a \equiv 99[5]$

لأن: لدينا: $a \equiv -1[5]$ ومنه: $a \equiv 4[5]$

ولدينا: $99 \equiv 4[5]$ إذن: $a \equiv 99[5]$

(2) باقي القسمة الإقليدية للعدد 99- على 7 هو: (ب) 6

لأن: ط01: لدينا: $99 \equiv 1[7]$ ومنه: $99 \equiv -1[7]$ وعليه: $-99 \equiv 6[7]$

ط02: لدينا: الفرق $(-15) - 7 = -22$ أي: $-99 - 6 = -105$

أي: $-99 - 6 \equiv 0[7]$

وبالتالي: الفرق $(-99 - 6)$ مضاعف لـ 7

إذن: $-99 \equiv 6[7]$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على: (أ) 3.

لأن: لدينا: $10 \equiv 1[3]$ ومنه: $10^n \equiv 1^n[3]$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$أي: $10^n \equiv 1[3]$$$

وبالتالي: $10^n - 1 \equiv 0[3]$ ، إذن: $10^n - 1$ يقبل القسمة على 3.

(4) مجموع كل ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة هو دوماً: ب) مضاعف للعدد 3.

لأن: من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1) = 3k \quad (\text{حيث } k = n + 1)$$

حل التمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: a و b عدنان صحيحان يحققان، $a \equiv 13[7]$ و $b \equiv -6[7]$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين a و b :

لدينا: $a \equiv 13[7]$ ومنه: $a \equiv 6[7]$ ، إذن: باقي قسمة a على 7 هو 6.

ولدينا: $b \equiv -6[7]$ ومنه: $b \equiv (-6 + 7)[7]$ أي: $b \equiv 1[7]$ ، إذن: باقي قسمة b على 7 هو 1.

(2) تبين أن العددين $a^3 + 1$ و $b^3 - 1$ يقبلان القسمة على 7:

$$\text{نُبين أن } a^3 + 1 \equiv 0[7] \text{ و } b^3 - 1 \equiv 0[7].$$

لدينا: $a \equiv 6[7]$ ومنه: $a \equiv -1[7]$

$$\text{وعليه: } a^3 \equiv (-1)^3[7]$$

$$\text{نجد: } a^3 \equiv -1[7] \quad (\text{لأن } 3 \text{ عدد فردي})$$

$$\text{وبالتالي: } a^3 + 1 \equiv 0[7]$$

إذن: $a^3 + 1$ يقبل القسمة على 7.

لدينا: $b \equiv 1[7]$ ومنه: $b^3 \equiv (1)^3[7]$ نجد: $b^3 \equiv 1[7]$ وبالتالي: $b^3 - 1 \equiv 0[7]$

إذن: $b^3 - 1$ يقبل القسمة على 7.

(3) أ) التحقق أن: $a \equiv 2015[7]$ و $b \equiv 1436[7]$:

لدينا: $2015 \equiv 6[7]$ (لأن باقي قسمة 2015 على 7 هو 6)

ولدينا من جهة أخرى: $a \equiv 6[7]$ ، إذن: $a \equiv 2015[7]$.

لدينا: $1436 \equiv 1[7]$ (لأن باقي قسمة 1436 على 7 هو 1)

ولدينا من جهة أخرى: $b \equiv 1[7]$ ، إذن: $b \equiv 1436[7]$.

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $2015^3 + 1436^3$:

ط01:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 2015[7] \end{cases}$ ومنه: $2015 \equiv -1[7]$

ولدينا: $\begin{cases} b \equiv 1[7] \\ b \equiv 1436[7] \end{cases}$ ومنه: $1436 \equiv 1[7]$

$$\text{نجد: } 2015^3 + 1436^3 \equiv (-1)^3 + (1)^3[7]$$

$$\text{ومنه: } 2015^3 + 1436^3 \equiv -1 + 1[7]$$

$$\text{وبالتالي: } 2015^3 + 1436^3 \equiv 0[7]$$

إذن: باقي قسمة العدد $2015^3 + 1436^3$ على 7 هو 0. (العدد $2015^3 + 1436^3$ يقبل القسمة على 7)

ط02:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 2015[7] \\ b \equiv 1436[7] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a^3 \equiv 2015^3[7] \\ b^3 \equiv 1436^3[7] \end{cases}$ بالجمع نجد: $a^3 + b^3 \equiv 2015^3 + 1436^3[7]$

وحسب نتيجة السؤال (2) لدينا: $\begin{cases} a^3 + 1 \equiv 0[7] \\ b^3 - 1 \equiv 0[7] \end{cases}$ بالجمع نجد: $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$

وبالتالي: $2015^3 + 1436^3 \equiv 0[7]$

إذن: باقي قسمة العدد $2015^3 + 1436^3$ على 7 هو 0. (العدد $2015^3 + 1436^3$ يقبل القسمة على 7)

(ج) استنتاج أن: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$

لدينا: $1962 \equiv 2[7]$ ومنه: $1962^3 \equiv 2^3[7]$ أي: $1962^3 \equiv 8[7]$ ويكون: $1962^3 \equiv 1[7]$

ولدينا من جهة أخرى: $2015^3 + 1436^3 \equiv 0[7]$

وبالتالي: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0 - 1 + 1[7]$

إذن: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0 - 1 + 1[7]$

حل التمرين 17: (05 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ و 2^4 على العدد 5:

لدينا: $2^0 \equiv 1[5]$ ، إذن: باقي قسمة 2^0 على 5 هو 1.

$2^1 \equiv 2[5]$ ، إذن: باقي قسمة 2^1 على 5 هو 2.

$2^2 \equiv 4[5]$ ، إذن: باقي قسمة 2^2 على 5 هو 4.

$2^3 \equiv 3[5]$ ، إذن: باقي قسمة 2^3 على 5 هو 3.

$2^4 \equiv 1[5]$ ، إذن: باقي قسمة 2^4 على 5 هو 1.

(2) بـين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا: $2^4 \equiv 1[5]$ ومنه: $(2^4)^n \equiv (1)^n[5]$ ، $(n \in \mathbb{N})$ ، إذن: $2^{4n} \equiv 1[5]$

(ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2016} على العدد 5: (نقسم الأس 2016 على الدور 4)

لدينا: $2016 = 4(504)$ من الشكل $4n$

حسب السؤال (2) نجد: $2^{2016} \equiv 1[5]$ ، إذن: باقي قسمة 2^{2016} على 5 هو 1.

(3) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$

$2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$ تكافئ: $1 + 2 + n \equiv 0[5]$

ومنه: $n \equiv -3[5]$

وعليه: $n \equiv 2[5]$ ، إذن: $n = 5k + 2$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

حل التمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^3 على 9:

لدينا: $4^3 \equiv 1[9]$ (لأن $4^3 = 64$)، إذن: باقي قسمة 4^3 على 9 هو 1.

(ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k} \equiv 1[9]$

لدينا: $4^3 \equiv 1[9]$ ومنه: $(4^3)^k \equiv (1)^k[9]$ ، $(k \in \mathbb{N})$ ، إذن: $4^{3k} \equiv 1[9]$

(ج) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9:

لدينا: $4^0 \equiv 1[9]$ ، $4^1 \equiv 4[9]$ ، $4^2 \equiv 7[9]$ و $4^3 \equiv 1[9]$.

ومنه: بواقي قسمة 4^n على 9 تشكل متتالية دورية، دورها 3.

$$\text{إذن: } \begin{cases} 4^{3k} \equiv 1[9] \\ 4^{3k+1} \equiv 4[9] \\ 4^{3k+2} \equiv 7[9] \end{cases} \text{، (حيث } k \in \mathbb{N} \text{)}$$

(د) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2015^{2016} على 9:

ط01: لدينا: $2015 \equiv 8[9]$ ومنه: $2015 \equiv -1[9]$

وعليه: $2015^{2016} \equiv (-1)^{2016}[9]$

أي: $2015^{2016} \equiv 1[9]$ (2016 زوجي)

إذن: باقي قسمة 2015^{2016} على 9 هو **1**.

ط02: لدينا: $2015 \equiv 8[9]$ أي: $2015 \equiv 2^3[9]$

ومنه: $2015^{2016} \equiv (2^3)^{2016}[9]$

وعليه: $2015^{2016} \equiv (2^3)^{2 \times 1008}[9]$

ويكون: $2015^{2016} \equiv (2^2)^{3 \times 1008}[9]$

أي: $2015^{2016} \equiv 4^{3(1008)}[9]$

وبالتالي: $2015^{2016} \equiv 1[9]$ (سؤال 1 ب)

إذن: باقي قسمة 2015^{2016} على 9 هو **1**.

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $8^{2n} \equiv 1[9]$

لدينا: $8 \equiv -1[9]$ ومنه: $8^{2n} \equiv (-1)^{2n}[9]$ إذن: $8^{2n} \equiv 1[9]$ (لأن $2n$ عدد زوجي)

(ب) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفاً للعدد 9:

العدد $8^{2n} + 4^n + 1$ مضاعفاً للعدد 9 معناه: $8^{2n} + 4^n + 1 \equiv 0[9]$

ومنه: $1 + 4^n + 1 \equiv 0[9]$ ($8^{2n} \equiv 1[9]$)

وعليه: $4^n \equiv -2[9]$

ويكون: $4^n \equiv 7[9]$

وحسب نتيجة السؤال (1 ج)، إذن: $n = 3k + 2$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

حل التمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: $a = 2016$ ، $b = 1437$ و $c = 1954$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من a ، b و c على 5:

لدينا: $a = 5(403) + 1$ ، إذن: باقي قسمة a على 5 هو **1**.

لدينا: $b = 5(287) + 2$ ، إذن: باقي قسمة b على 5 هو **2**.

لدينا: $c = 5(390) + 4$ ، إذن: باقي قسمة c على 5 هو **4**.

(2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد، $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و b^4 على 5:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 1[5] \\ b \equiv 2[5] \\ c \equiv 4[5] \end{array} \right. \text{ لدينا: } \left\{ \begin{array}{l} a + b + c \equiv (1 + 2 + 4)[5] \text{ ومنه: } \\ a + b + c \equiv 7[5] \end{array} \right. \text{ أي: } a + b + c \equiv 7[5]$$

وبالتالي: $a + b + c \equiv 2[5]$ ، إذن: باقي قسمة $a + b + c$ على 5 هو 2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 1[5] \\ b \equiv 2[5] \\ c \equiv 4[5] \end{array} \right. \text{ لدينا: } \left\{ \begin{array}{l} a \times b \times c \equiv (1 \times 2 \times 4)[5] \text{ ومنه: } \\ a \times b \times c \equiv 8[5] \end{array} \right. \text{ أي: } a \times b \times c \equiv 8[5]$$

وبالتالي: $a \times b \times c \equiv 3[5]$ ، إذن: باقي قسمة $a \times b \times c$ على 5 هو 3 .

$$\left\{ \begin{array}{l} b^4 \equiv 2^4[5] \text{ ومنه: } \\ b^4 \equiv 16[5] \end{array} \right. \text{ لدينا: } \left\{ \begin{array}{l} b^4 \equiv 2^4[5] \text{ ومنه: } \\ b^4 \equiv 16[5] \end{array} \right. \text{ أي: } b^4 \equiv 16[5]$$

وبالتالي: $b^4 \equiv 1[5]$ ، إذن: باقي قسمة b^4 على 5 هو 1 .

(3) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $b^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا: $b^4 \equiv 1[5]$ ومنه: $(b^4)^n \equiv (1)^n[5]$ ، إذن: $b^{4n} \equiv 1[5]$

ب) استنتاج أن العدد $1 - b^{2016}$ يقبل القسمة على 5: (نقسم الأس 2016 على الدور 4)

لدينا: $b^{2016} \equiv 1[5]$ (لأن $2016 = 4(504)$)

ومنه: $b^{2016} - 1 \equiv (1 - 1)[5]$

أي: $b^{2016} - 1 \equiv 0[5]$ ، إذن: $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5.

(4) أ) التحقق أن، $c \equiv -1[5]$

لدينا: $c \equiv 4[5]$ ومنه: $c \equiv (4 - 5)[5]$ ، إذن: $c \equiv -1[5]$

ب) تبيان أن، $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0[5]$

لدينا: حسب نتيجة السؤال السابق (4) أ) $c \equiv -1[5]$

ومنه: $c^{1438} + c^{2017} \equiv (-1)^{1438} + (-1)^{2017}[5]$

وبما أن $1^{1438} = 1$ (لأن 1438 عدد زوجي) و $-1^{2017} = -1$ (لأن 2017 عدد فردي)

فإن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 1 - 1[5]$

إذن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0[5]$

حل التمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ

a ، b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث $a \equiv -5[7]$ و $b = 1966$ و $c = 2017$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a ، b و c على 7:

لدينا: $a \equiv -5[7]$ ومنه: $a \equiv (-5 + 7)[7]$ ، إذن: باقي قسمة a على 7 هو 2 .

لدينا: $b = 7(280) + 6$ ومنه: $b \equiv 6[7]$ ، إذن: باقي قسمة b على 7 هو 6 .

لدينا: $c = 7(288) + 1$ ومنه: $c \equiv 1[7]$ ، إذن: باقي قسمة c على 7 هو 1 .

(2) التحقق أن، $b \equiv -1[7]$

ط01: لدينا: $b \equiv 6[7]$ ومنه: $b \equiv (6 - 7)[7]$ إذن: $b \equiv -1[7]$

ط02: لدينا: $b - (-1) = b + 1 = 1967 = 7(281)$

أي: $b - (-1) \equiv 0[7]$

إذن: $b \equiv -1[7]$

(3) اثبات أن العدد، $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7:

لدينا: $\begin{cases} b \equiv -1[7] \\ c \equiv 1[7] \end{cases}$ ومنه: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv (-1)^{2017} + 3(1)^{1438} - 2[7]$

وعليه: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3(1) - 2[7]$

أي: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv -1 + 3 - 2[7]$

وبالتالي: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2 \equiv 0[7]$

إذن: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7.

(4) التحقق أن من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k} \equiv 1[7]$

لدينا: $2^3 \equiv 1[7]$ (لأن $2^3 = 8$) ومنه: $(2^3)^k \equiv (1)^k[7]$ ، $(k \in \mathbb{N})$ إذن: $2^{3k} \equiv 1[7]$

استنتاج أن، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

لاحظ أن $2^{3k+1} = 2^{3k} \times 2^1$ و $2^{3k+2} = 2^{3k} \times 2^2$

■ لدينا: $\begin{cases} 2^{3k} \equiv 1[7] \\ 2^1 \equiv 2[7] \end{cases}$ ومنه: $2^{3k} \times 2^1 \equiv (1 \times 2)[7]$ إذن: $2^{3k+1} \equiv 2[7]$

■ لدينا: $\begin{cases} 2^{3k} \equiv 1[7] \\ 2^2 \equiv 4[7] \end{cases}$ ومنه: $2^{3k} \times 2^2 \equiv (1 \times 4)[7]$ إذن: $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

(5) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2^n + 3$ قابلاً للقسمة على 7:

$2^n + 3 \equiv 0[7]$ معناه: $2^n \equiv -3[7]$

ومنه: $2^n \equiv -3[7]$

ويكون: $2^n \equiv 4[7]$

حسب السؤال السابق (4)، نستنتج أن: $n = 3k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

حل التمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017_02 // الموضوع 01 // الشعبة: آوف؛ لغ أ

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4، 4^2 و 4^3 على 9:

لدينا: $4^1 \equiv 4[9]$ ، إذن: باقي قسمة 4 على 9 هو 4.

إذن: باقي قسمة 4^2 على 9 هو 7. $4^2 \equiv 7[9]$

إذن: باقي قسمة 4^3 على 9 هو 1. $4^3 \equiv 1[9]$

(ب) تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n} \equiv 1[9]$

لدينا: $4^3 \equiv 1[9]$ (نتيجة السؤال 1) (أ)

ومنه: $(4^3)^n \equiv (1)^n[9]$ ($n \in \mathbb{N}$)

إذن: $4^{3n} \equiv 1[9]$

(ج) استنتاج أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n+1} \equiv 4[9]$:

$$\text{لاحظ أن } 4^{3n+1} = 4^{3n} \times 4^1$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} 4^{3n} \equiv 1[9] \\ 4^1 \equiv 4[9] \end{cases} \text{ ومنه: } 4^{3n} \times 4^1 \equiv (1 \times 4)[9] \text{ إذن: } 4^{3n+1} \equiv 4[9]$$

(2) التحقق أن، $2020^{1438} \equiv 4[9]$:

$$\text{لدينا: } 2020 = 9(224) + 4 \text{ ومنه: } 2020 \equiv 4[9]$$

$$\text{وعليه: } 2020^{1438} \equiv 4^{1438}[9] \text{ (نقسم الأس 1438 على الدور 3)}$$

$$\text{نجد: } 1438 = 3(479) + 1 \text{ من الشكل } 3n + 1$$

$$\text{وبالتالي: } 2020^{1438} \equiv 4^{3n+1}[9]$$

$$\text{إذن: } 2020^{1438} \equiv 4[9]$$

(3) تبين أن العدد $2020^{1438} - 2017^2 + 1995$ يقبل القسمة على 9:

$$\text{لدينا: } \begin{cases} 2017 \equiv 1[9] \\ 1995 \equiv 6[9] \end{cases} \text{ لأن: } \begin{cases} 2017 = 9(224) + 1 \\ 1995 = 9(221) + 6 \end{cases}$$

$$\text{ولدينا: } 2020^{1438} \equiv 4[9] \text{ ومنه: } 2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 4 - (1)^2 + 6[9]$$

$$\text{وعليه: } 2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 9[9]$$

$$\text{وبالتالي: } 2020^{1438} - 2017^2 + 1995 \equiv 0[9]$$

إذن: العدد $(2020^{1438} - 2017^2 + 1995)$ يقبل القسمة على 9.

حل التمرين 22: (06 نقاط) بكالوريا 2017 د 02 // الموضوع 02 // الشعبة: آوف؛ لغ أ

لدينا: a و b عدنان صحيحان حيث، $a \equiv 14[13]$ و $b \equiv -1[13]$.

(1) تبين أن باقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب:

$$\text{لدينا: } a \equiv 14[13] \text{ ومنه: } a \equiv (14 - 13)[13] \text{ أي: } a \equiv 1[13] \text{ إذن: باقي قسمة } a \text{ على 13 هو } 1$$

$$\text{لدينا: } b \equiv -1[13] \text{ ومنه: } b \equiv (-1 + 13)[13] \text{ أي: } b \equiv 12[13] \text{ إذن: باقي قسمة } b \text{ على 13 هو } 12$$

(ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a + b$ ، $a - b$ و $2a + b^2$ على 13:

$$\text{لدينا: } a + b \equiv 1 + (-1)[13] \text{ أي: } a + b \equiv 0[13] \text{ إذن: باقي قسمة } a + b \text{ على 13 هو } 0$$

($a + b$ يقبل القسمة على 13)

$$\text{لدينا: } a - b \equiv 1 - (-1)[13] \text{ أي: } a - b \equiv 2[13] \text{ إذن: باقي قسمة } a - b \text{ على 13 هو } 2$$

$$\text{لدينا: } 2a + b^2 \equiv 2(1) + (-1)^2[13] \text{ ومنه: } 2a + b^2 \equiv 3[13]$$

$$\text{أي: } 2a + b^2 \equiv 3[13]$$

إذن: باقي قسمة $2a + b^2$ على 13 هو 3.

(2) تبين أن العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13:

$$\text{لدينا: } a^{1438} + b^{2017} \equiv (1)^{1438} + (-1)^{2017}[13] \text{ ومنه: } a^{1438} + b^{2017} \equiv 1 + (-1)[13]$$

$$\text{أي: } a^{1438} + b^{2017} \equiv 0[13]$$

إذن: العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13.

(3) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث، $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$:

لدينا: $b^{2017} \equiv -1[13]$ و $1438 \equiv 8[13]$ (لأن $1438 = 13(110) + 8$)

$$-1 + n + 8 \equiv 0[13] \text{ تكافئ: } b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$$

$$n \equiv -7[13] \text{ ومنه:}$$

$$\text{وعليه: } n \equiv 6[13] \text{، إذن: } n = 13k + 6 \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{).}$$

حل التمرين 23: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(1) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5:

$$\text{لدينا: } 2^0 \equiv 1[5], 2^1 \equiv 2[5], 2^2 \equiv 4[5], 2^3 \equiv 3[5], 2^4 \equiv 1[5]$$

ومنه: بواقي قسمة 2^n على 5 تشكل متتالية دورية، دورها 4 .

$$\text{إذن: } (k \in \mathbb{N}), \begin{cases} 2^{4k} \equiv 1[5] \\ 2^{4k+1} \equiv 2[5] \\ 2^{4k+2} \equiv 4[5] \\ 2^{4k+3} \equiv 3[5] \end{cases}$$

(2) تعيين العدد الطبيعي a بحيث يكون، $2018 = 4a + 2$

$$4a = 2018 - 2 \text{ يُكافئ: } 4a = 2016$$

$$4a = 2016 \text{ أي:}$$

$$\text{وبالتالي: } a = \frac{2016}{4} = 504 \text{ إذن: } 2018 = 4(504) + 2$$

(3) تبيان أن العدد، $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5:

$$\text{لدينا: } 2^{2018} \equiv 4[5] \text{ (لأن } 2018 = 4(504) + 2 \text{ من الشكل } 4k + 2 \text{)}$$

$$\text{ولدينا: } 2017 \equiv 2[5] \text{ ومنه: } 2017^8 \equiv 2^8[5] \text{ إذن: } 2017^8 \equiv 1[5] \text{ (لأن } 8 = 4(2) \text{ من الشكل } 4k \text{)}$$

$$\text{نجد: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv (4 + 1 - 5)[5] \equiv 0[5]$$

$$\text{وبالتالي: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \equiv 0[5] \text{، إذن: } 2^{2018} + 2017^8 - 5 \text{ يقبل القسمة على 5.}$$

(4) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$:

$$\text{لدينا: } 12 \equiv 2[5] \text{ ومنه: } 12^n \equiv 2^n[5] \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{) إذن: } 12^n \equiv 2^n[5]$$

$$\text{لدينا: } -3 \equiv 2[5] \text{ ومنه: } (-3)^n \equiv 2^n[5] \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{) إذن: } (-3)^n \equiv 2^n[5]$$

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث، $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$:

$$\text{لدينا: } 12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5] \text{ تُكافئ: } 2^n + 2^n - 4 \equiv 0[5] \text{ أي: } 2 \times 2^n - 4 \equiv 0[5]$$

$$\text{ط01: ومنه: } 2^{n+1} \equiv 4[5] \text{ وبالتالي: } n + 1 = 4k + 2 \text{ إذن: } n = 4k + 1 \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{).}$$

$$\text{ط02: وعليه: } 2 \times 2^n \equiv 2 \times 2[5] \text{ أي: } 2^n \equiv 2[5] \text{ إذن: } n = 4k + 1 \text{ (حيث } k \in \mathbb{N} \text{).}$$

حل التمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: a و b عدنان طبيعيين غير معدومين حيث $a = 4b + 6$

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4:

$$\text{بما أن } 4 > 6 \text{ فهو ليس الباقي}$$

$$\text{ط01: لدينا: } a = 4b + 6 = 4b + 4(1) + 2 = 4(b + 1) + 2 \text{ إذن: } a \equiv 2[4] \text{ ومنه:}$$

إذن: باقي قسمة a على 4 هو [2].

ط02: لدينا: $a = 4b + 6$ ومنه: $a \equiv 6[4]$ وبالتالي: $a \equiv 2[4]$ إذن: باقي قسمة a على 4 هو [2].

(2) تبيان أن a و b متوافقان بترديد 3: (نُبين أن الفرق $a - b$ مضاعف لـ 3)

لدينا: $a - b = (4b + 6) - b = 3b + 6 = 3(b + 2)$ ومنه: $a - b \equiv 0[3]$ إذن: $a \equiv b[3]$.

(3) بوضع $b = 489$.

(أ) تحقق أن $a \equiv -1[13]$:

لدينا: $b = 489$ ومنه: $a = 4b + 6 = 4(489) + 6 = 1962$

ولدينا: $a = 1962 = 13(150) + 12$ ومنه: $a \equiv 12[13]$

وعليه: $a \equiv (12 - 13)[13]$ إذن: $a \equiv -1[13]$

ط02: نُبين أن الفرق $a - (-1)$ مضاعف لـ 13.

لدينا: $a - (-1) = a + 1 = 1963 = 13(151)$ ومنه: $a - (-1) \equiv 0[13]$ إذن: $a \equiv -1[13]$

(ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد

$40^{2968} + a^{2018}$ على 13:

لدينا: $a \equiv -1[13]$ ومنه: $a^{2018} \equiv (-1)^{2018}[13]$

ولدينا: $40 \equiv 1[13]$ ومنه: $40^{2968} \equiv 1^{2968}[13]$

إذن: $a^{2018} \equiv 1[13]$ (لأن 2018 عدد زوجي)

نجد: $a^{2018} + 40^{2968} \equiv 1 + 1[13]$ أي: $a^{2018} + 40^{2968} \equiv 2[13]$

إذن: باقي قسمة $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13 هو 2.

(ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $a^{2n} + n + 3$ قابلاً للقسمة على 13:

لدينا: $a^{2n} + n + 3 \equiv 0[13]$ معناه:

ومنه: $(-1)^{2n} + n + 3 \equiv 0[13]$

وعليه: $1 + n + 3 \equiv 0[13]$ (لأن $2n$ عدد زوجي)

أي: $n + 4 \equiv 0[13]$

ومنه: $n \equiv -4[13]$

وعليه: $n \equiv 9[13]$ إذن: $n = 13k + 9$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

حل التمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: $a = 2019$ و $b = 2969$.

(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7:

لدينا: $a = 7(288) + 3$ ومنه: $a \equiv 3[7]$ إذن: باقي قسمة a على 7 هو 3.

لدينا: $b = 7(424) + 1$ ومنه: $b \equiv 1[7]$ إذن: باقي قسمة b على 7 هو 1.

(ب) استنتاج أن العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7:

لدينا: $a \equiv 3[7]$ (1)

ولدينا: $b \equiv 1[7]$ ومنه: $3b \equiv 3[7]$ (2)

من (1) و (2) إذن: $a \equiv 3b[7]$.

ط02: لدينا: $a - 3b \equiv 3 - 3(1)[7]$ أي: $a - 3b \equiv 0[7]$ إذن: $a \equiv 3b[7]$.

(2) تبين أن، $9a + b \equiv 0[7]$:

لدينا: $9a + b \equiv 9(3) + 1[7]$ أي: $9a + b \equiv 28[7]$ ومنه: $9a + b \equiv 0[7]$ (لأن $28 \equiv 0[7]$)

(3) التحق أن، $2a \equiv -1[7]$:

ط01: لدينا: $a \equiv 3[7]$ ومنه: $2a \equiv 6[7]$ وعليه: $2a \equiv (6 - 7)[7]$ إذن: $2a \equiv -1[7]$.

ط02: نبين أن الفرق $2a - (-1)$ مضاعف لـ 7.

لدينا: $2a - (-1) = 2a + 1 = 2(2019) + 1 = 4039 = 7(577)$

ومنه: $2a - (-1) \equiv 0[7]$

إذن: $2a \equiv -1[7]$.

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{2969} \times a^{2969}$ على 7:

لاحظ أن $2^{2969} \times a^{2969} = (2a)^{2969}$

حسب السؤال السابق، لدينا: $2a \equiv -1[7]$ ومنه: $(2a)^{2969} \equiv (-1)^{2969}[7]$

وعليه: $2^{2969} \times a^{2969} \equiv -1[7]$ (لأن 2969 عدد فردي)

وبالتالي: $2^{2969} \times a^{2969} \equiv 6[7]$

إذن: باقي قسمة $2^{2969} \times a^{2969}$ على 7 هو 6.

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث، $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$:

لدينا: $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$ معناه: $(1)^n + an + 2 \equiv 0[7]$

أي: $1 + an + 2 \equiv 0[7]$

ومنه: $an + 3 \equiv 0[7]$

وعليه: $an \equiv -3[7]$

بما أن $a \equiv 3[7]$ فإن $n \equiv -1[7]$ وبالتالي: $n \equiv 6[7]$ إذن: $n = 7k + 6$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

حل التمرين 26: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: $a = 2019$ و $b = 1441$.

(1) التحق أن، $a \equiv 13[17]$:

ط01: لدينا: $a = 17(118) + 13$ ومنه: $a \equiv 13[17]$

ط02: نبين أن الفرق $a - 13$ مضاعف لـ 17.

لدينا: $a - 13 = 2019 - 13 = 2006 = 17(118)$

ومنه: $a - 13 \equiv 0[17]$

إذن: $a \equiv 13[17]$.

(2) تبين أن، a و b متوافقان بترديد 17: (نبين أن الفرق $a - b$ مضاعف لـ 17)

لدينا: $a - b = 2019 - 1441 = 578 = 17(34)$ ومنه: $a - b \equiv 0[17]$ إذن: $a \equiv b[17]$

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 17:

بما أن $\begin{cases} a \equiv 13[17] \\ a \equiv b[17] \end{cases}$ فإن $b \equiv 13[17]$ ، إذن: باقي قسمة b على 17 هو 13.

(3) تبيان أن $a \times b \equiv -1[17]$:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 13[17] \\ b \equiv 13[17] \end{cases}$ ومنه: $a \times b \equiv 169[17]$

وعليه: $a \times b \equiv 16[17]$

وبالتالي: $a \times b \equiv (16 - 17)[17]$ إذن: $a \times b \equiv -1[17]$

استنتاج أن $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 0[17]$:

لاحظ أن $a^2 \times b^2 = (a \times b)^2$

حسب السؤال السابق، لدينا: $a \times b \equiv -1[17]$ ومنه: $(a \times b)^2 \equiv (-1)^2[17]$

أي: $a^2 \times b^2 \equiv 1[17]$

ومنه: $3a^2 \times b^2 \equiv 3[17]$

وعليه: $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv (3 + 14)[17]$

أي: $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 17[17]$

إذن: $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 0[17]$ (لأن $17 \equiv 0[17]$)

(4) دراسة تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 17:

لدينا: $13^0 \equiv 1[17]$ ، $13^1 \equiv 13[17]$ ، $13^2 \equiv 16[17]$ ، $13^3 \equiv 4[17]$ ، $13^4 \equiv 1[17]$

ومنه: بواقي قسمة 13^n على 17 تُشكل متتالية دورية، دورها [4].

إذن: $(k \in \mathbb{N})$ ، $\begin{cases} 13^{4k} \equiv 1[17] \\ 13^{4k+1} \equiv 13[17] \\ 13^{4k+2} \equiv 16[17] \\ 13^{4k+3} \equiv 4[17] \end{cases}$

(5) تبيان أن، $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$:

لدينا: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv a^{1954} + (a \times b)^{2n} + b^{2969} - 13[17]$

ومنه: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 13^{1954} + (-1)^{2n} + 13^{2969} - 13[17]$

وعليه: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 13^{4(488)+2} + (-1)^{2n} + 13^{4(742)+1} - 13[17]$

وبالتالي: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 16 + 1 + 13 - 13[17]$

أي: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 17[17]$

إذن: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$ (لأن $17 \equiv 0[17]$)

(6) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق، $n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0[17]$:

$n + 16^{1962} + 16 \equiv 0[17]$ معناه: $n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0[17]$

ومنه: $n + (-1)^{1962} + 16 \equiv 0[17]$

وعليه: $n + 1 + 16 \equiv 0[17]$

وبالتالي: $n \equiv 0[17]$ إذن: $n = 17k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)