

مَجْمُوعَةُ الأَعْدَادِ المُرَكَّبَةِ

(خاص بالاقسام النهائية الرياضيات وتقني رياضي وعلوم تجريبية)

من (محررو الأسانوف : بومجلال محمد)

المفاهيم المستهدفة :

- ❖ إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
- ❖ استعمال خواص مرافق عدد مركب.
- ❖ حساب الطويلة وعمدة لعدد مركب غير معدوم.
- ❖ الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي والعكس.
- ❖ التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة.
- ❖ توظيف خواص الطويلة وعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- ❖ توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- ❖ حل معادلات من الدرجة الثانية و حل معادلات يؤول حلها إلى حلّ معادلة من الدرجة الثانية.

مدخل :

- (1) المعادلة $x-2=0$ تقبل حلا في مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، $S=\{2\}$.
- (2) المعادلة $x+2=0$ لا تقبل حل في $\mathbb{N}$ بينما تقبل حلا في مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، $S=\{-2\}$.
- (3) المعادلة $2x+1=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}$ بينما تقبل حل في مجموعة الاعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ ، $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- (4) المعادلة $x^2-2=0$ لا تقبل حل في $\mathbb{Q}$ بينما تقبل حل في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$.
- (5) المعادلة $x^2+2=0$ لا تقبل حل في مجموعة $\mathbb{R}$.
- (6) اذن توجد مجموعة جديدة حيث المعادلة $x^2+2=0$ تقبل حلولاً فيها ، تسمى هذه المجموعة

مجموعة الاعداد المركبة ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$

تعريف : توجد مجموعة نرمل لها بالرمز $\mathbb{C}$ ، تسمى مجموعة الاعداد المركبة تحقق الشروط التالية :
كل الاعداد الحقيقية تنتمي الى المجموعة $\mathbb{C}$.

ملاحظة :

- تحوي المجموعة $\mathbb{C}$ عنصرا يسمى عدد تخيلي ، يرمز بـ i : يحقق $i^2 = -1$.
- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بنفس عمليتي الجمع والضرب في المجموعة $\mathbb{R}$.
- قواعد الحساب في المجموعة $\mathbb{C}$ هي نفسها في المجموعة $\mathbb{R}$.

الشكل الجبري لعدد مركب :

تعريف : كل عدد مركب z يكتب : $z = x + iy$ تسمى هذه الكتابة الشكل الجبري للعدد المركب z .
حيث x و y عدنان حقيقيان .

ملاحظات و ترميز:

- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Im}(z)$.
- إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما.
- أي $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$.

مثال :

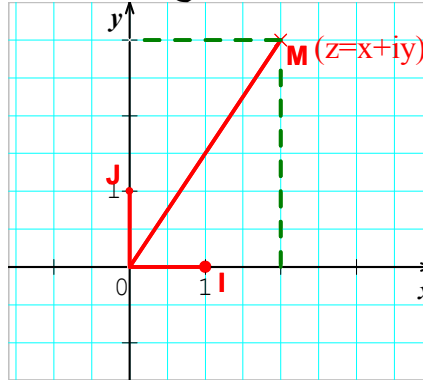
- $\text{Im}(z_1)=3$ و $\text{Re}(z_1)=2$ ، $z_1=2+3i$ (1)
- $\text{Im}(z_2)=0$ و $\text{Re}(z_2)=21$ ، $z_2=21$ (2)
- $\text{Im}(z_3)=3$ و $\text{Re}(z_3)=0$ ، $z_3=-25i$ (3)

تساوي عددين مركبين :

تعريف : يكون عددان مركبان z و z' متساويين اذا و فقط اذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي .

التمثيل الهندسي لعدد مركب:

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
- إلى كل عدد مركب $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ ، $y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$) نرفق النقطة M إحداثياتها $(x; y)$ ، النقطة M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z .



- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ، لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب .
- المستوي يسمى المستوي المركب.

تمرين :

z عدد مركب حيث :

$$z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$$

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوماً .

الحل :

$$z = 0 \text{ يعني } \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

العمليات في مجموعة الأعداد المركبة:

1. مجموع وجداء عددين مركبين

تعريف: z عدد مركب حيث $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث

$$z' = x' + iy'$$

$$(x' \in \mathbb{R} \text{ و } y' \in \mathbb{R}) .$$

$$z + z' = x + x' + i(y + y') \quad (1)$$

$$z \cdot z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y) \quad (2)$$

- نتائج: $A(z_A)$ ، $B(z_B)$ و $C(z_C)$ نقط من : المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

$$(1) \quad \overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$$

$$(2) \quad I(z_I) \text{ منتصف القطعة } [AB] \text{ يكافئ } z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$G(z_G) = \text{Bary}\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\} \text{ يكافئ } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ مع } \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

$$F(z_F) \text{ مركز ثقل المثلث } ABC \text{ يكافئ } z_F = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

تمرين 1 :

برر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

الحل :

نبرر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

$$(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = [1+2i+i^2]^4 = (2i)^4 = 2^4(i)^4 = 16(i^2)^2 = 16$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left(\frac{1-2i+i^2}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left(\frac{-2i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \frac{(-2)^{2008}(i)^{2008}}{(\sqrt{2})^{2008}} = \frac{2^{2008}(i^2)^{1004}}{(\sqrt{2})^{2008}} = \frac{2^{2008}}{2^{1004}} = \left(\frac{2^2}{2}\right)^{1004} = 2^{1004}$$

وكلا من العددين حقيقيين

تمرين :

المستوي مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$
نضع : $z_1 = x+1-i$ ؛ $z_2 = 1+i(y-1)$ حيث x و y عددين حقيقيين
عين مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق:

(1) $z_1 \times z_2$ حقيقي (2) $z_1 + z_2$ حقيقي (3) $(z_1^2 - z_2^2)$ تخيلي صرف

الحل :

(1) تعين مجموعة النقط M من المستوي : $z_1 \times z_2 \in \mathbb{R}$
لدينا :

$$z_1 \times z_2 = (x+1-i)(1+i(y-1))$$

$$z_1 \times z_2 = x + y + i((x+1)(y-1) - 1)$$

$z_1 \times z_2 \in \mathbb{R}$ يعني $\text{Im}(z_1 \times z_2) = 0$ يعني $xy - x + y - 1 = 0$ يعني $y(x+1) - (x+1) = 0$ يعني

$$(x+1)(y-1) = 0 \text{ يعني } x = -1 \text{ أو } y = 1 .$$

اذن مجموعة النقط هي اتحاد مستقيمين معادلتاهما : $x = -1$ ، $y = 1$.

(2) تعين مجموعة النقط M من المستوي : $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$
لدينا :

$$z_1 + z_2 = (x+1-i) + (1+i(y-1))$$

$$z_1 + z_2 = x + 2 + i(y-2)$$

$z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ يعني $\text{Im}(z_1 + z_2) = 0$ يعني $y - 2 = 0$.

اذن مجموعة النقط هي مستقيم معادلته : $y - 2 = 0$.

(3) تعين مجموعة النقط M من المستوي : $(z_1^2 - z_2^2)$ تخيلي صرف
لدينا :

$$z_1^2 - z_2^2 = (x+1-i)^2 - (1+i(y-1))^2$$

$$z_1^2 - z_2^2 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 2i(x+1) - 1 + y^2 - 2y + 1 - 2i(y-1)$$

$$z_1^2 - z_2^2 = x^2 + y^2 + 2x - 2y + i(-2x - 2y)$$

$(z_1^2 - z_2^2)$ تخيلي صرف يعني $\text{Re}(z_1^2 - z_2^2) = 0$ يعني $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ يعني

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

اذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها $A(-1;1)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

مرافق عدد مركب:

1. تعريف.

تعريف: z عدد مركب حيث $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$) .

العدد المركب $x - iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

خواص مرافق عدد مركب.

خواص مباشرة من التعريف:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overline{\overline{z}} &= z \\ \bullet \quad z + \bar{z} &= 2 \operatorname{Re}(z) \\ \bullet \quad z - \bar{z} &= 2i \operatorname{Im}(z) \\ \bullet \quad \overline{z \bar{z}} &= (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \end{aligned}$$

المرافق والعمليات : z عدد مركب و مرافقه $\bar{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\bar{z}'$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \bullet \quad \overline{z z'} &= \bar{z} \cdot \bar{z}' \\ \bullet \quad \overline{z^n} &= \bar{z}^n \\ \bullet \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad \text{مع } z' \neq 0 \\ \bullet \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{مع } z \neq 0 \end{aligned} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

تمرين رقم 11 ص 144 :

كتابة الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$$\begin{aligned} \bullet \quad z_4 &= \frac{1+i}{1-i} ; \quad z_3 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} ; \quad z_2 = \frac{5+15i}{1+2i} ; \quad z_1 = \frac{4-6i}{3+2i} \\ \bullet \quad z_2 &= \frac{5+15i}{1+2i} = \frac{(5+15i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 7+i , \quad z_1 = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = -2i \\ \bullet \quad z_4 &= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i , \quad z_3 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{(1+i)(3+i\sqrt{2})}{(3-i\sqrt{2})(3+i\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{12} + i \frac{3+\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

تمرين رقم 15 ص 145 :

الحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

أ - $(1-i)z = 3+i$.

يعني $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$.

ب - $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$.

يعني $3z - (1+i)z = -1 - 2i + 2 - i$ يعني $3z - (1+i)z = -1 - 2i + 2 - i$ يعني $(2-i)z = 1-3i$ يعني $z = \frac{1-3i}{2-i} = \frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 1-i$.

ج - $(3-4i)z^2 = iz$.

يعني $(3-4i)z^2 - iz = 0$ يعني $((3-4i)z - i)z = 0$ يعني $z = 0$ أو $((3-4i)z - i) = 0$ يعني $z = \frac{i}{3-4i}$.

أو $z = \frac{i}{3-4i} = \frac{i(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3i-4}{25} = -\frac{4}{25} + i\frac{3}{25}$.

د - $\frac{z+1}{z-1} = 2i$ ($z \neq 1$) .

يعني $(z+1) = 2i(z-1)$ يعني $z + 2iz = -2i - 1$ يعني $z(1+2i) = -2i - 1$ يعني

$$z = \frac{(-2i-1)}{(1+2i)} = -\frac{(2i+1)}{(1+2i)} = -1$$

تمرين رقم 16 ص 145 :

الحل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ - $2\bar{z} = -1+i$ تعني $\bar{z} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ يعني $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

ب - $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2) = 0$ يعني $2z+1-i=0$ أو $i\bar{z}+i-2=0$ يعني $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ أو

$\bar{z} = -1-2i$ يعني $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ أو $z = -1+2i$

ج - $\frac{\bar{z}-1}{z+1} = i$ يعني $\frac{\bar{z}-1}{z+1} = i$ يعني $\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = i$ يعني $\frac{z-1}{z+1} = -i$ يعني $z-1 = -i(z+1)$ يعني

$(z \neq -1) \quad z = \frac{1-i}{1+i} = -i$ يعني $z+iz = 1-i$

تمرين جزء من بكالوريا :

عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .

الحل :

بالجمع نجد : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -3 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$ تعني $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ تعني $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$

$4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3}$ يعني $\alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد : $-3 + i\sqrt{3} - \beta = -3$

يعني $\beta = i\sqrt{3}$.

تمرين رقم : 108 ص 152

$z = x + iy$ عدد مركب حيث $z \neq 1$ و x, y عدنان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث $L = \frac{z+2i}{z-1}$.

(1) كتابة العدد المركب L على الشكل الجبري .

لدينا $L = \frac{z+2i}{z-i}$ يعني :

$$L = \frac{x+iy+2i}{x+iy-i} = \frac{x+i(y+2)}{x+i(y-1)} = \frac{(x+i(y+2))(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}$$

$$L = \frac{x^2 + (y+2)(y-1) + i(x(y+2) - x(y-1))}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$L = \frac{x^2 + (y+2)(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{3x}{x^2 + (y-1)^2}$$

(2) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

يكون L حقيقيا يعني $3x=0$ و $(x;y) \neq (0;1)$ يعني $x=0$ و $(x;y) \neq (0;1)$ وبالتالي مجموعة النقط هي مستقيم معادلته $x=0$ ما عدا النقطه $A(0;1)$.

(3) نبرهن أن مجموعة النقط M ذات اللاحقه z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا هي دائرة باستثناء نقطه يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

تخيليا صرفا يعني $(y-1)(y+2)+x^2=0$ و $(x;y) \neq (0;1)$ يعني $x^2+y^2+y-2=0$ و

$$(x;y) \neq (0;1) \text{ يعني } x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$

وبالتالي مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{3}{2}$ ما عدا النقطه $A(0;1)$.

الطويلة وعمدة عدد مركب.

1. الطويلة عدد مركب.

تعريف: z عدد مركب حيث: $z = x + iy$ (x و y عدنان حقيقيان).
نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{أمثلة: } |2+3i| = \sqrt{13}, \quad |-2-3i| = \sqrt{13}, \quad |5i| = \sqrt{25}, \quad |-5| = \sqrt{25}.$$

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
 z عدد مركب حيث $z = x + iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM = |z|$

خواص طويلة عدد مركب.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

- $|-z| = |z|$
- $|\overline{z}| = |z|$
- مع $z' \neq 0$: $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (المتباينة الثلاثية).

ملاحظة: A و B نقطتان لاحتقائهما z_A و z_B على الترتيب: $AB = |z_B - z_A|$.

تمرين: رقم 34 ص 146

تعيّن ثم نمثّل مجموعة النقط M ذات اللاحقه المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة.

$$أ - |z + 1 + 2i| = |z - 4|$$

$$|z + 1 + 2i| = |z - 4| \text{ تكافئ } |z - (-1 - 2i)| = |z - 4| \text{ تكافئ } |z - z_A| = |z - z_B| \text{ يعني } AM = BM \text{ حيث}$$

$$A(-1; -2) \text{ و } B(-4; 0) \text{ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة } [AB].$$

$$ب - |z - 3i| = 2$$

$$|z - 3i| = 2 \text{ تكافئ } |z - z_C| = 2 \text{ تكافئ } MC = 2 \text{ حيث } C(0; 3).$$

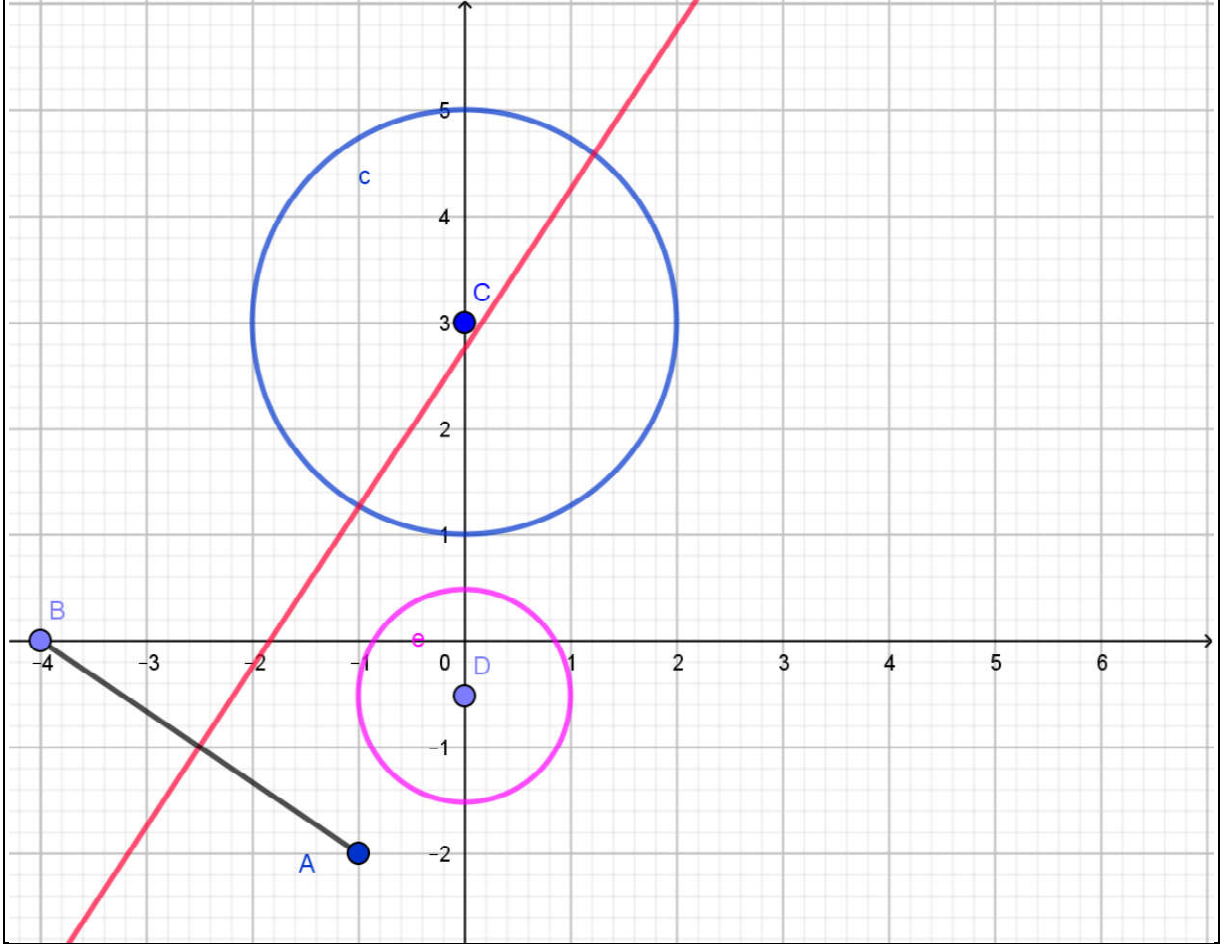
اذن مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها $r=2$.

$$\text{ج - } |2z - i| = 2$$

$$|2z - i| = 2 \text{ يعني } \left| 2\left(z - \frac{1}{2}i\right) \right| = 2 \text{ يعني } \left| z - \frac{1}{2}i \right| = 1 \text{ يعني } MD = 1 \text{ حيث } D\left(0; -\frac{1}{2}\right)$$

اذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها D ونصف قطرها $r=1$.

ملاحظة : هناك طريقة أخرى للحل



تمرين رقم 35 ص 146

يعطى العدد المركب α حيث :

$$\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

1) حساب α^2 ثم α^4 .
لدينا :

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\alpha^2 = 2 - \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\alpha^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$\alpha^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2}$$

$$\alpha^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}(1+i)$$

ومن جهة أخرى : $\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = (-2\sqrt{2}(1+i))^2 = 16i$.

(2) حساب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

$|\alpha^4| = 16$ إذن $|\alpha|^4 = 2^4$ ومنه $|\alpha| = 2$.

(3) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|\alpha z| = 6$.
 $|\alpha z| = 6$ يعني $|\alpha| \times |z| = 6$ يعني $|z| = 3$ يعني $OM = 3$ وبالتالي مجموعة النقط هي دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 3$.

تعين الجذرين التربيعيين لعدد مركب :

تعريف:

ω عدد مركب . يسمى حلا للمعادلة $z^2 = \omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

أمثلة : • الجذران التربيعيان للعدد $3 - 4i$ هما $2 - i$ و $-2 + i$.

• الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $3i$ و $-3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

تمرين: عين الجذرين التربيعيين للعدد : $z = 3 + 4i$.

الحل: ليكن $\omega = x + iy$ جذرا تربيعيا لـ z . أي $z = \omega^2$.

$$\omega^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$|z| = |3 + 4i| = \sqrt{25} = 5 \quad , \quad |\omega^2| = |\omega|^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \dots\dots\dots 1 \\ x^2 - y^2 = 3 \dots\dots\dots 2 \\ 2xy = 4 \dots\dots\dots 3 \end{cases} \text{ يعني } z = \omega^2 \text{ بجمع المعادلتين 1 و 2 نجد :}$$

$$2x^2 = 8 \text{ يعني } x = 2 \text{ أو } x = -2$$

إذا كان $x = -2$ بالتعويض في 3 نجد : $y = -1$.

إذا كان $x = 2$ بالتعويض في 3 نجد : $y = 1$.

إذن : $w = 2 + i$ أو $w = -2 - i$.

الحل في مجموعة الاعداد المركبة، معادلة من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية :

مرهنة:

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ ، b و c أعداد مركبة و $a \neq 0$.
 $\Delta = b^2 - 4ac$ مميزها .

• إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z = -\frac{b}{2a}$.

• إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متميزين :

$$z' = \frac{-b - \omega}{2a} \quad \text{و} \quad z'' = \frac{-b + \omega}{2a}$$

حيث ω جذر تربيعي لـ Δ .

ملاحظة:

(1) إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$$

(2) حلا معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{Z}$ مترافقان .

تمرين رقم 56 ص 147

الحل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ - $2z^2 - 6z + 5 = 0$.

حساب المميز : $\Delta = -4 = (2i)^2$ ، $z_1 = 3 - i$ ، $z_2 = 3 + i$.

ب - $z^2 - 5z + 9 = 0$.

حساب المميز : $\Delta = -11 = (i\sqrt{11})^2$ ، $z_1 = 5 - i\sqrt{11}$ ، $z_2 = 5 + i\sqrt{11}$.

ج - $z^2 + z + 1 = 0$.

حساب المميز : $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$ ، $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

د - $z^2 - 2z + 3 = 0$.

حساب المميز : $\Delta = -9 = (3i)^2$ ، $z_1 = 2 - 3i$ ، $z_2 = 2 + 3i$.

هـ - $z^2 = z + 1$ تكافئ $z^2 - z - 1 = 0$

حساب المميز : $\Delta = 5$ ، $z_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ، $z_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

و - $z^2 + 3 = 0$ تكافئ $z^2 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ يكافئ $z = i\sqrt{3}$ أو $z = -i\sqrt{3}$.

تمرين رقم 57 ص 147

الحل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية:

أ - $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

ب - $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$.

ج - $z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

د - $z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي .

الحل :

$$أ - z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

$$\text{حساب المميز : } \Delta = -64 = (8i)^2 \text{ ، } z_1 = 4\sqrt{3} - 4i \text{ ، } z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$ب - z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$$

$$\text{حساب المميز : } \Delta = 4 \text{ ، } z_1 = 2\sqrt{2} \text{ ، } z_2 = 2\sqrt{2}$$

$$ج - z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0 \text{ حيث } \theta \text{ عدد حقيقي .}$$

$$\text{حساب المميز : } \Delta = 4\cos^2 \theta - 4 = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4\sin^2 \theta = (2i\sin \theta)^2 \text{ ، } z_1 = 2\cos \theta - 2i\sin \theta$$

$$z_2 = 2\cos \theta + 2i\sin \theta$$

$$د - z^2 - 2(\sin \theta)z + 1 = 0 \text{ حيث } \theta \text{ عدد حقيقي .}$$

$$\text{حساب المميز : } \Delta = 4\sin^2 \theta - 4 = 4(\sin^2 \theta - 1) = -4\cos^2 \theta = (2i\cos \theta)^2 \text{ ، } z_1 = 2\sin \theta - 2i\cos \theta$$

$$z_2 = 2\sin \theta + 2i\cos \theta$$

تمرين رقم 151 ص 157 .

من أجل كل عدد مركب z ، نضع :

$$p(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

(1) a عدد حقيقي . نعبّر بدلالة a عن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $p(ia)$.

$$p(ia) = (ia)^4 - 10(ia)^3 + 38(ia)^2 - 90ai + 261$$

$$p(ia) = a^4 + 10a^3i - 38a^2 - 90ai + 261$$

$$p(ia) = a^4 - 38a^2 + 261 + i(10a^3 - 90a)$$

(2) تعيين قيم a التي يكون من أجلها $p(ia) = 0$.

$$\begin{cases} a^4 - 38a^2 + 261 = 0 \\ 10a^3 - 90a = 0 \end{cases} \text{ يعني } p(ai) = 0$$

$$10a^3 - 90a = 0 \text{ يعني } 10a(a^2 - 9) = 0 \text{ يعني } a = 0 \text{ أو } a = -3 \text{ أو } a = 3$$

بالتعويض في المعادلة $a^4 - 38a^2 + 261 = 0$ نجد : $a = 0$ لا يحقق المعادلة ، $a = -3$ لا يحقق المعادلة ، $a = 3$ يحقق المعادلة .

حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $z = 3i$ و $z = -3i$.

(3) تعيين عددين حقيقيين b و c حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،

$$p(z) = (z^2 + 9)(z^2 + bz + c)$$

$$z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 = (z - 3i)(z + 3i)(z^2 + az + b)$$

$$p(z) = (z^2 + 9)(z^2 + az + b)$$

$$\text{تكافئ } \begin{cases} a = -10 \\ 9b = 261 \end{cases} \text{ : بالمطابقة نجد : } p(z) = (z^2 + 9)(z^2 + az + b) = z^4 + az^3 + (b + 9)z^2 + 9az + 9b$$

$$\text{يعني } \begin{cases} a = -10 \\ b = 29 \end{cases} \text{ وعليه نجد : } p(z) = (z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29)$$

(4) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

$p(z) = 0$ يكافئ $(z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29) = 0$ أو $z = 3i$ أو $z = -3i$ أو $z^2 - 10z + 29 = 0$
نحسب المميز نجد :

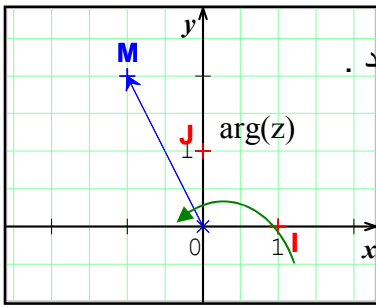
حساب المميز : $\Delta = -16 = (4i)^2$ ، $z_1 = 5 - 2i$ ، $z_2 = 5 + 2i$.

حلول المعادلة : $\{5 - 2i; 5 + 2i; -3i; 3i\}$.

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

عمدة عدد مركب غير معدوم.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + iy$ (x و y عدنان حقيقيان).
في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ لتكن M صورة z .
نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg(z)$ كل قياس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.



ملاحظات: • كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمدة .

إذا كان θ عمدة z فإن $\theta + 2k\pi$ عمدة z .

و نكتب $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.

• A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) - \arg(z_A)$$

$$\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) \quad \bullet$$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عدنان مركبان غير معدومين.

$$\bullet \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad \bullet \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad \bullet \quad n \in \mathbb{N}^* \bullet \arg(z^n) = n \arg(z)$$

الانتقال من الشكل المثلثي الى الشكل الجبري والعكس :

1. تعريف و خواص.

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. تعلم نقطة M بإحداثيها الديكارتي $(x; y)$ أو بإحداثيها القطبية $(r; \theta)$. $OM = r$ و $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ ، و لدينا $x = r \cos(\theta)$ و $y = r \sin(\theta)$.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم . العدد z يكتب على الشكل $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ حيث :
 $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z . يمكن كتابة $z = [r; \theta]$.

ملاحظة: • إذا كان $z = x + iy$ ، $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ و $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.

خاصية: يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π .

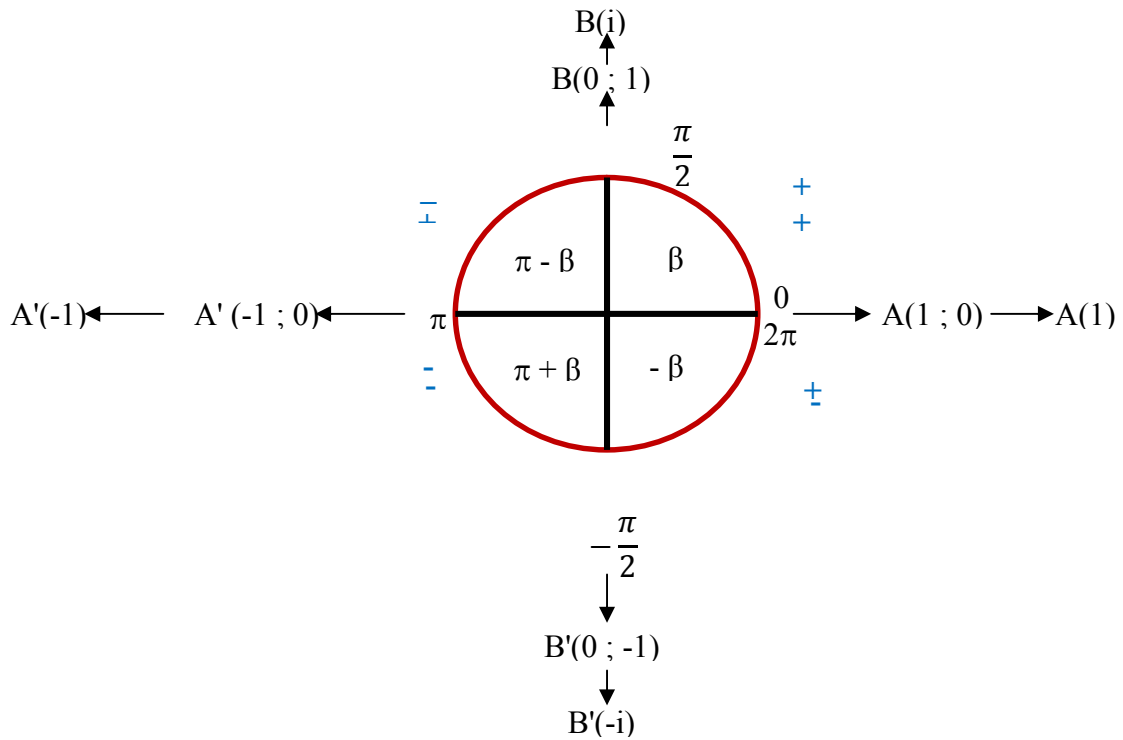
خاصية: إذا كان $z = \lambda(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ و كان $\lambda > 0$ فإن $\lambda = |z|$ و $\theta = \arg(z)$.

ملاحظة:

(1) جدول القيم الشهيرة :

β	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos \beta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
$\sin \beta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	-1
$\tan \beta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0		0	

(ميزة كل ربع الدائرة المثلثية)



تمرين :

كتابة على الشكل المثلي :

$$z_1 = 1 + i \quad (1)$$

نضع θ_1 عمدة لـ z_1 اذن :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} : \text{نستنتج أن} \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) : \text{اذن}$$

$$z_2 = 3 - 3i \quad (2)$$

نضع θ_2 عمدة لـ z_2 اذن :

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{4} : \text{نستنتج أن} \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) : \text{اذن}$$

$$z_3 = -\sqrt{3} + i \quad (3)$$

نضع θ_3 عمدة لـ z_3 اذن :

$$\theta_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} : \text{نستنتج أن} \begin{cases} \cos \theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) : \text{اذن}$$

$$z_4 = -1 - i\sqrt{3} \quad (4)$$

نضع θ_4 عمدة لـ z_4 اذن :

$$\theta_4 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} : \text{نستنتج أن} \begin{cases} \cos \theta_4 = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) : \text{اذن}$$

$$Z = \frac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$: \text{اذن} \quad |Z| = \frac{|4 + 4i|}{|1 - i\sqrt{3}|} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

$$\theta_5 = \frac{\pi}{4} : \text{نستنتج أن} \begin{cases} \cos \theta_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$z_5 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) : \text{اذن}$$

$$\theta_6 = -\frac{\pi}{3} : \text{نستنتج أن} \begin{cases} \cos \theta_6 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$z_6 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) : \text{اذن}$$

الخلاصة :

$$\arg Z = \frac{\arg z_5}{\arg z_6} = \arg z_5 - \arg z_6 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right) : \text{اذن}$$

تمرين رقم 39 ص 146 :

في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، نعين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

$$\text{أ - } z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ب - } z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ يكافئ } z = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \text{ وبالتالي } |z| = 4 \text{ و } \arg z = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{ج - } z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = -3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ يكافئ } z = 3 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ تكافئ}$$

$$z = 3 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) \text{ تكافئ } z = 3 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) \text{ وبالتالي } |z| = 3 \text{ و}$$

$$\arg z = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{د - } z = \sqrt{5} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = \sqrt{5} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) \text{ يكافئ } z = \sqrt{5} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \text{ تكافئ}$$

$$z = \sqrt{5} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) \text{ وبالتالي } |z| = \sqrt{5} \text{ و } \arg z = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{هـ - } z = \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6}$$

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right) \text{ تكافئ } z = \left(\sin\frac{\pi}{6} - i \cos\frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) \text{ تكافئ } z = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

وبالتالي $|z| = 1$ و $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$.

ترميز أولر :

تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$. حيث $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. هذا الترميز يسمى ترميز أولر.

2. الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم.

تعريف: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z = re^{i\theta}$. هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

3. قواعد الحساب على الشكل الأسّي.

خواص: θ و θ' عدنان حقيقيان.

$$\bullet \bullet \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\bullet \bullet e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$$

$$\bullet \bullet \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

تمرين رقم 50 ص 147 :

كتابة الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$$(1) \quad z = 2 - 2i$$

نضع θ عمدة لـ z اذن : $|z| = 2\sqrt{2}$

$$\text{نستنتج أن : } \theta = -\frac{\pi}{4} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{اذن : } z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(2) \quad z = -3\sqrt{3} + 3i$$

نضع θ عمدة لـ z اذن : $|z| = 6$

$$\text{نستنتج أن : } \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{اذن : } z = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z = \frac{5}{4}i \quad (3)$$

$$z = \frac{5}{4}i = \frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z = -1 \quad (4)$$

$$z = -1 = e^{i\pi}$$

تمرين رقم 54 ص 147

اعطاء شكلا أسياً لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

$$2\sqrt{3} + 6i = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ وبالتالي } \arg(2\sqrt{3} + 6i) = \frac{\pi}{3}, \quad |2\sqrt{3} + 6i| = 4\sqrt{3}$$

$$\text{اذن: } z = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = 4\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (2)$$

$$z = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}(1 + i)e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$z = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (3)$$

$$z = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}} = -(\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi}(\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right) \quad (4)$$

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right) = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{7}}$$

4. دستور موافر.

خواص: z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

تمرين : رقم 123 ص 154 .

$$z_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } z_2 = -\frac{1}{2}i$$

(1) حساب الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_1 - 2iz_2$.

$$\arg(z_1 - 2iz_2) = -\frac{\pi}{4}, \quad |z_1 - 2iz_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 - 2iz_2 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - i)$$

(2) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_1 - 2iz_2)^n$ تخيلياً صرفاً .

$$(z_1 - 2iz_2)^n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}n\right) \right) \text{ اذن } z_1 - 2iz_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$(z_1 - 2iz_2)^n$ تخيليا صرفا يعني $\cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right) = 0$ يعني $\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = 0$ يعني $\frac{\pi}{4}n = \frac{\pi}{2} + k\pi$ يعني $n = 2 + 4k$ مع $n \in \mathbb{N}$.

المعادلة الوسيطة لدائرة – لنصف مستقيم:

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$

خاصية: Ω نقطة ثابتة من المستوي ذات اللاحقة z_Ω ، θ عدد حقيقي ، r عدد حقيقي موجب تماما ،

(F) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث : $z = z_\Omega + re^{i\theta}$.

(1) اذا كان r ثابت و θ يسمح $\mathbb{R}$ ، المجموعة (F) هي دائرة مركزها r ونصف قطرها Ω ، تسمى المعادلة $z = z_\Omega + re^{i\theta}$ معادلة وسيطة للدائرة (F) .

(2) اذا كان r يسمح $\mathbb{R}_+^*$ و θ ثابت ، المجموعة (F) هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه Ω وموجه بالشعاع $\vec{V}$ حيث $(\overrightarrow{OI}; \vec{V}) = \theta$ ، المعادلة $z = z_\Omega + re^{i\theta}$ تسمى معادلة وسيطة لنصف المستقيم المفتوح (F) .

تمرين:

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس ، عين مجموعة النقط ذات اللاحقة ثم مثلها بيانيا في كل حالة :

$$(1) \quad |iz - 5| = |z - 4 + 3i| \quad (2) \quad \arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

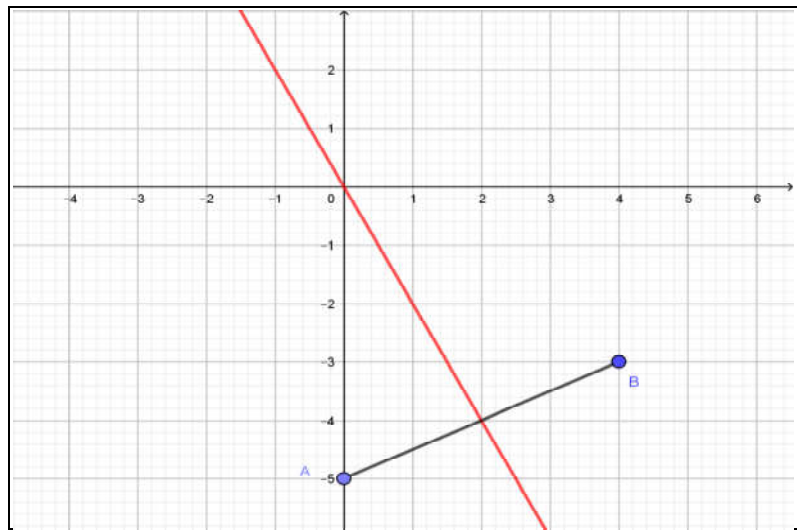
$$(3) \quad \arg \frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z} \quad (4) \quad z = 2 - 3i + re^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{حيث } r \text{ يسمح } \mathbb{R}_+^*$$

$$(5) \quad z = 2 - 3i + 2e^{i\theta} \quad \text{حيث } \theta \text{ يسمح } \mathbb{R} .$$

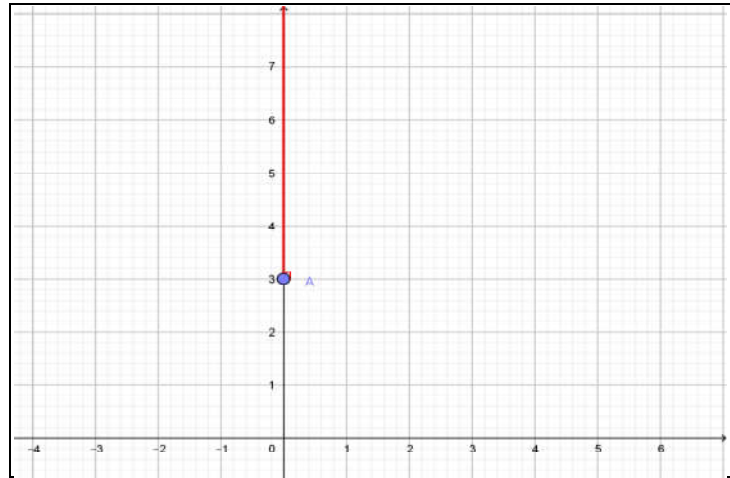
الحل:

(1) $|iz - 5| = |z - 4 + 3i|$ تكافئ $\left| i \left(z - \frac{5}{i} \right) \right| = |z - 4 + 3i|$ تكافئ $\left| z - \frac{5}{i} \right| = |z - (4 - 3i)|$ تكافئ $|i| \left| z - \frac{5}{i} \right| = |z - (4 - 3i)|$ تكافئ

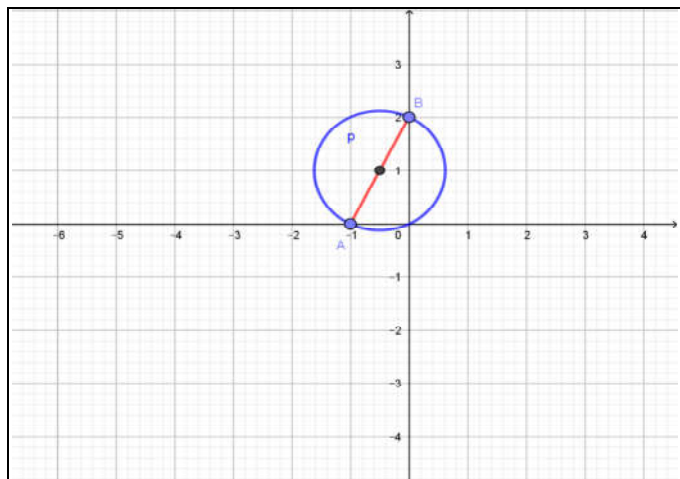
$|z + 5i| = |z - (4 - 3i)|$ تكافئ $|z - (-5i)| = |z - (4 - 3i)|$ تكافئ $AM = BM$ حيث $A(0; -5)$ و $B(4; -3)$ وبالتالي مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.



(2) $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ يكافئ $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ حيث $A(0;3)$ وبالتالي مجموعة النقط هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه له $\vec{v}$ حيث $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}$. لا يشمل المبدأ

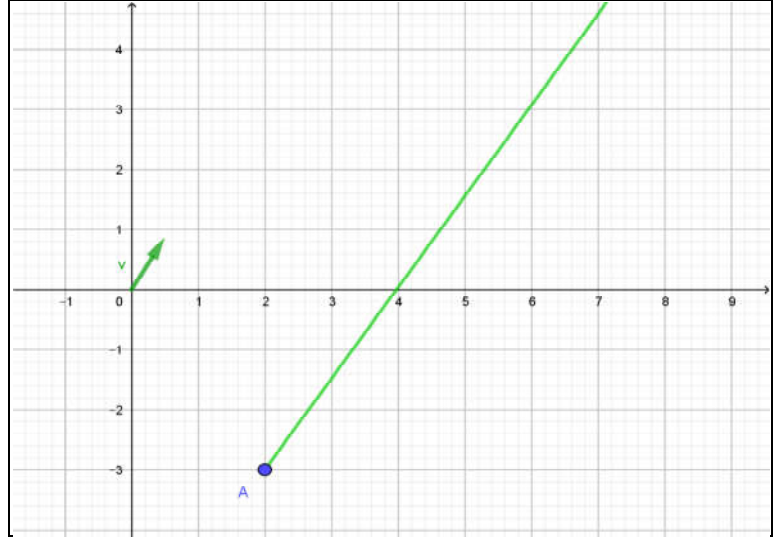


(3) $\arg \frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ تكافئ $\arg \frac{z-(-1)}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ تكافئ $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $A(-1;0)$ و $B(0;2)$. إذن مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطة B .



(4) $\mathbb{R}_+^*$ يسمح r حيث $z = 2 - 3i + re^{i\frac{\pi}{6}}$

نضع $z = x + iy$ وبالتالي نجد $x + iy = 2 - 3i + r \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ يعني $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ y = -3 + \frac{1}{2}r \end{cases}$ مع r يسمح $\mathbb{R}_+^*$ ، وهو التمثيل الوسيط لنصف مستقيم مبدؤه النقطة $A(2; -3)$ وشعاع توجيهه $\vec{v} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

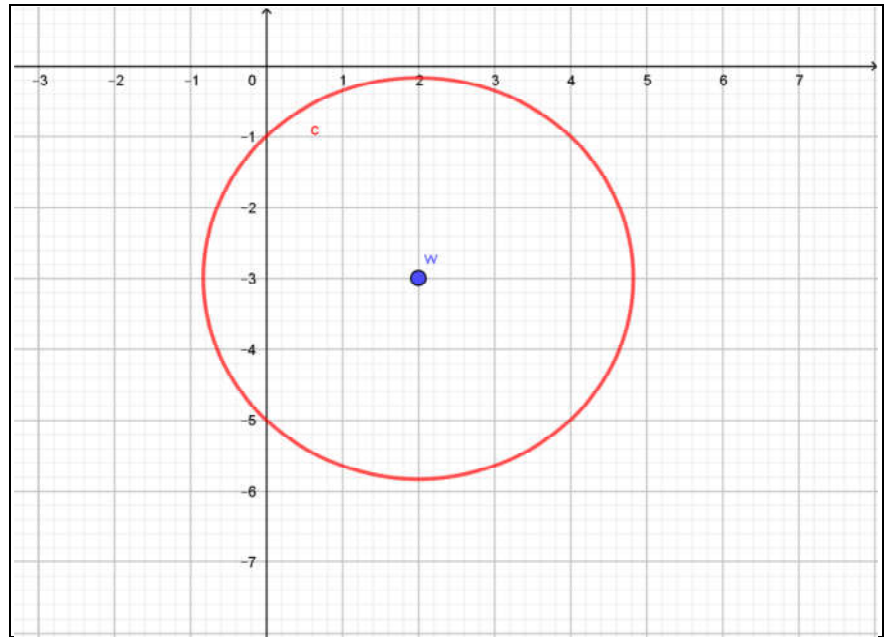


(5) $z = 2 - 3i + 2e^{i\theta}$ حيث θ يسمح $\mathbb{R}$.

نضع : $z = x + iy$ وبالتالى نجد $x + iy = 2 - 3i + 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ اذن : $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = -3 + 2 \sin \theta \end{cases}$ يعني

$$\begin{cases} x - 2 = 2 \cos \theta \\ y + 3 = 2 \sin \theta \end{cases} \text{ وبالتالى } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 8 = (\sqrt{8})^2 .$$

اذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها $w(2; -3)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{8}$.



تمرين :

θ عدد حقيقي .

(1) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي z حيث : $z^2 - 2z \sin \theta + 1 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

A و B نقطتان لا حقتاهما $z_A = \sin \theta - i \cos \theta$ و $z_B = \sin \theta + i \cos \theta$ على الترتيب .

عين قيم العدد الحقيقي θ حيث يكون المثلث OAB متقايس الاضلاع .

الحل :

(1) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي z حيث : $z^2 - 2z \sin \theta + 1 = 0$

$$\Delta = 4 \sin^2 \theta - 4 = 4(\sin^2 \theta - 1) = -4 \cos^2 \theta = (2i \cos \theta)^2$$

$$z_2 = \sin \theta + i \cos \theta , z_1 = \frac{2 \sin \theta - 2i \cos \theta}{2} = \sin \theta - i \cos \theta$$

(2) تعيين قيم العدد الحقيقي θ حيث يكون المثلث OAB متقايس الاضلاع .

يكون المثلث ABC متقايس الاضلاع اذا وفقط اذا كان : $AB = OA = OB$ يعني

$$AB^2 = OA^2 = OB^2$$

$$, \overrightarrow{OA}(\sin \theta; \cos \theta) , \overrightarrow{AB}(0; -2 \cos \theta) , B(\sin \theta; -\cos \theta) , A(\sin \theta; \cos \theta)$$

$$\overrightarrow{OB}(\sin \theta; -\cos \theta)$$

$$. OB^2 = 1 , OA^2 = 1 , AB^2 = 2|\cos \theta|$$

$$AB^2 = OA^2 = OB^2 \text{ يعني } 2|\cos \theta| = 1 \text{ يعني } |\cos \theta| = \frac{1}{2} \text{ يعني } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ أو } \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ يعني}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ مع } k \text{ عدد صحيح .}$$