



سنة الثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات | تسيير واقتصاد

مسألة 22 مسائل

في الدوال العددية

مرفقة بحلول مفصلة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[21 أكتوبر 2021]

المسائل:

فهرس المحتويات:

المسألة رقم 01 :	المسألة الحل
المسألة رقم 03 :	المسألة الحل
المسألة رقم 05 :	المسألة الحل
المسألة رقم 07 :	المسألة الحل
المسألة رقم 09 :	المسألة الحل
المسألة رقم 11 :	المسألة الحل
المسألة رقم 13 :	المسألة الحل
المسألة رقم 15 :	المسألة الحل
المسألة رقم 17 :	المسألة الحل
المسألة رقم 19 :	المسألة الحل
المسألة رقم 21 :	المسألة الحل
المسألة رقم 02 :	المسألة الحل
المسألة رقم 04 :	المسألة الحل
المسألة رقم 06 :	المسألة الحل
المسألة رقم 08 :	المسألة الحل
المسألة رقم 10 :	المسألة الحل
المسألة رقم 12 :	المسألة الحل
المسألة رقم 14 :	المسألة الحل
المسألة رقم 16 :	المسألة الحل
المسألة رقم 18 :	المسألة الحل
المسألة رقم 20 :	المسألة الحل
المسألة رقم 22 :	المسألة الحل

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

**01****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.**1**أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.**2**أ/ عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + b}{(x - 1)^2}$$

ب/ مبررا إجابتك، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) والمستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$ ؟ج/ حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) ، ولتكن A نقطة تقاطعهما.**3** بين انه يوجد مماس (T) لـ (C_f) مواز للمستقيم (d) .**4** بيّن أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty; 1[$ ، استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α .**5** مثّل بيانيا المستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f) .**6** ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

**02****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

1 ادرس اتجاه تغير الدالة g .**2** بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]-1.48; 1.47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.**(II)** نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.**1**أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.**2**أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .ب/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .**3** بين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.**4** مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .



03

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

x	$-\infty$	-2	-1	α	0	β	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	5	$+\infty$	$-\infty$	1	$-\infty$	$-\infty$

(I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$
بجدول تغيراتها كما يلي:

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+1}$

2 عيّن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

3 عيّن معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2) .

4 أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير:

أ/ $f(2) > f(1)$ ب/ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R} - \{-1\}$ ج/ $f'(1) > 0$
5 عيّن إشارة الدالة f

(II) نضع فيما يلي: $a = -1$ و $b = 1$ و $c = 1$:

1

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$.

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω .

3 ارسم كل من (Δ) و (C_f) .

4 ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$

(III) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $g(x) = [f(x)]^2$

1 عيّن نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 احسب: $g(\alpha)$ ، $g(\beta)$ ، $g(0)$ و $g(-2)$

3 باستعمال مشتق مركب دالتين، احسب $g'(x)$

4 استنتج تغيرات الدالة g دون دراسة تغيراتها.

(IV) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$

1 ادرس شفعية الدالة h .

2 وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقاً من المنحنى (C_f) .



04

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.2 بين أن النقطة $A(2; -3)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .3 بين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x - 1$ ، يطلب تعيين معادلة كل منهما.4 اوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.5 مثل بيانيا (C_f) ومماسيه (T_1) و (T_2) (II) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ كمايلي:

$$h(x) = -f(|x|)$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق1 بين أن الدالة h زوجية2 اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) 3 أنشئ (C_h) .



05

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

- ① عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- ② احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر النتائج هندسيا.
- ③ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- ④ أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.
- ⑤
- أ/ بين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$.
- ب/ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .
- ⑥ مثل بيانيا المنحنى (C_f) .
- ⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = |m|$$

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-3; -1; 1; 3\}$ بـ:

$$h(x) = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3}$$

- ① ادرس شفعية الدالة h .
- ② وضح كيف يتم رسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.



06

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 1}{x - 1}$$

حيث α و β عددين حقيقيين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ♦ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 0 و (C_f) يمر من النقطة ذات الاحداثيات (2; 3)(II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -1$:1 احسب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.2 احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3

/ أ بَيِّنْ أَنْ:

$$f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$$

ب / استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.ج / ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4

/ أ بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

ب / ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.5 بَيِّنْ أَنَّ النقطه ω (نقطه تقاطع (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي) هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .6 ارسم كل من (Δ) و (C_f) .7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x) = m \dots (E)$$

(III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب:

$$h(x) = f(|x|)$$

1 ادرس شفعية الدالة h .2 وضح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) .



07

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$

نسعى (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.1 أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: a, b, c بحيث كل x من D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

2

أ/ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.ب/ حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .3 أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.4 جد إحداثي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحني (C_f) .5 أنشئ المنحني (C_f) .6 استنتج رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h المعرفة بـ:

$$h(x) = \frac{(x - 4)^2}{|x - 3|}$$



08

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$ 1 ادرس تغيرات الدالة g .

2

أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$ ب/ حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 1 بين من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن :

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1}$$

2

أ/ احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.3 احسب: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.4 ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_p) الممثل للدالة: $p(x) = x^2 - 2x - 1$ والمنحنى (C_f) .

5 بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2$$

واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.6 أنشئ بيانيا كل من (C_p) و (C_f) .



09

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

1 عین مجموعة تعريف الدالة f ، ثم بيّن أنه من أجل كل x من D_f فإن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

2

أ/ ادرس تغيرات الدالة f .ب/ أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ) :3 عین تقريب تآلفي للدالة f عند 0.4 أنشئ بيانيا المنحني (C_f) .(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

1 عین مجموعة تعريف الدالة h .2 اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.3 ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0.4 ادرس شفعية الدالة h .5 استنتج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقاً من (C_f) .6 ناقشاً بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m-1 = 0$$

**10****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

لتكن F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث: $F(0) = 0$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

① برر أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $G'(x)$ من أجل كل x حقيقي.

② احسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية.

(II) الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ:

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

① برر أن H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من كل x من I .

② برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$ ،

③ استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$ ، ماذا ينتج عن المنحني (C) ؟

(III) الدالة المعرفة على $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ بـ:

$$T(x) = F(\tan x) - x$$

① أحسب $T'(x)$ ، ماذا ينتج عن الدالة T ؟

② أحسب $F(1)$.

(IV)

① انجز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

② أرسم المنحني (C) ، ومستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .

**11****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.**1**أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.**2**أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.ب/ أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α .ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ **1**عَيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها واعط تفسيراً هندسياً للنتائج.**2** أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية a, b, c .**3**أ/ بين أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (d) يطلب إعطاء معادلة ديكرتية له.ب/ ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f) .**4**أ/ شكل جدول تغيرات الدالة f .ب/ بين أن (C_f) يقطع مرة واحدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 < \beta < 0$.ج/ بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصراً للعدد $f(\alpha)$.**5** أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f) .(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

1بين أن h زوجية.**2**أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.**3**ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = x + m \quad \text{و} \quad f(x) = m$$

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$$

- 1 ادرس اتجاه تغير الدالة g على مجال تعريفها.
- 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه.
- 3 استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$$

1

أ/ احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ برهن أنه من أجل دكل x حقيقي:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$ وفسر النتيجة هندسيا.

3

أ/ ليكن (d') المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، بين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (d) و (d') .

4 انشئ بيانيا كلا من المستقيمين (d) و (d') والمنحني (C_f) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 1$

1 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2 احسب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0,2)$ و $g(-0,1)$ إلى 10^{-1} .

3 استنتج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $[-0,2; -0,1]$ حيث: $g(\alpha) = 0$.

4 استنتج إشارة الدالة g على المجال $[-1, +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

2 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $[-1, +\infty[$ يكون:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2}$$

3

أ/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) .

4

أ/ بين أنه من أجل كل x من $[-1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

5 اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2.

6 بين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

7 عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(III) نعتبر h الدالة المعرفة على $[-1, +\infty[\cup]-\infty, -1]$ كما يلي:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x > -1 \\ f(-x-2) & ; x < -1 \end{cases}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1 بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني (C_h) .

2 (نقبل أن $f(\alpha) \approx -0,1$) ، مثل بيانيا (C_f) ، ثم استنتج التمثيل البياني لـ (C_h) .

(I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{2x - 2}$$

حيث α و β عددين حقيقيين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 ◆ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند النقطة ذات الإحداثيات $(0; -1)$.

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = -2$ و $\beta = 2$:

① احسب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

② احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

③

أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 2}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

④

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{2x(x - 2)}{(2x - 2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$.

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω .

⑥ ارسم كل من (Δ) و (C_f) .

⑦ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + m \dots (E)$$

(III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$h(x) = f(|x|)$$

① ادرس شفعية الدالة h .

② وضّح كيف يمكن المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقاً من المنحنى (C_f) .

(I) لتكن الدالة g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2

أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2

أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

3

أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

4/ احسب $f(1)$ ، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5/ أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

6/ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .



16

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{2x}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3

أ/ a, b, c أعداد حقيقية، بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{2x}$$

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل منحنى (C) مقارب بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلته.

4

أ/ بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A ، يطلب تعيين إحداثيها.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة A .

ج/ بين أن المماس (T) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة أخرى B يطلب تعيين إحداثيها.

5 مثل بيانيا (T) ، (C) و (C_f)

6 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وحلول المعادلة $f(x) = m$

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{-x^2|x| - |x| - 2}{2x}$$

1 ادرس شفعية الدالة h .

2 أنشئ مع الشرح كيفية إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) في معلم آخر.



17

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$:-

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس كما هو مبين في الشكل.

1

أ/ احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I .

ب/ بقراءة بيانية ودون دراسة تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها.

2 g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم السابق.

أ/ احسب نهاية g عند $+\infty$.

ب/ تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$

يطلب تعيين معادله له.

ج/ ادرس تغيرات الدالة g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

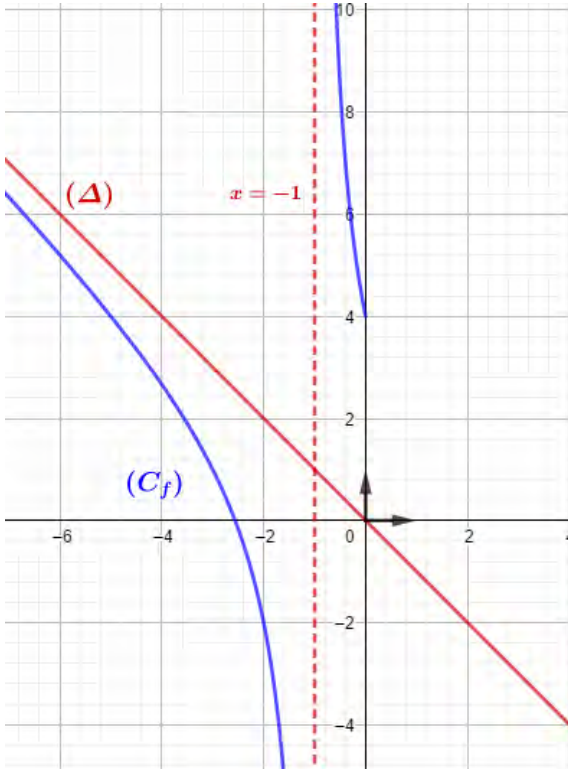
1

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{k(h)-k(0)}{h} \right)$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ اعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

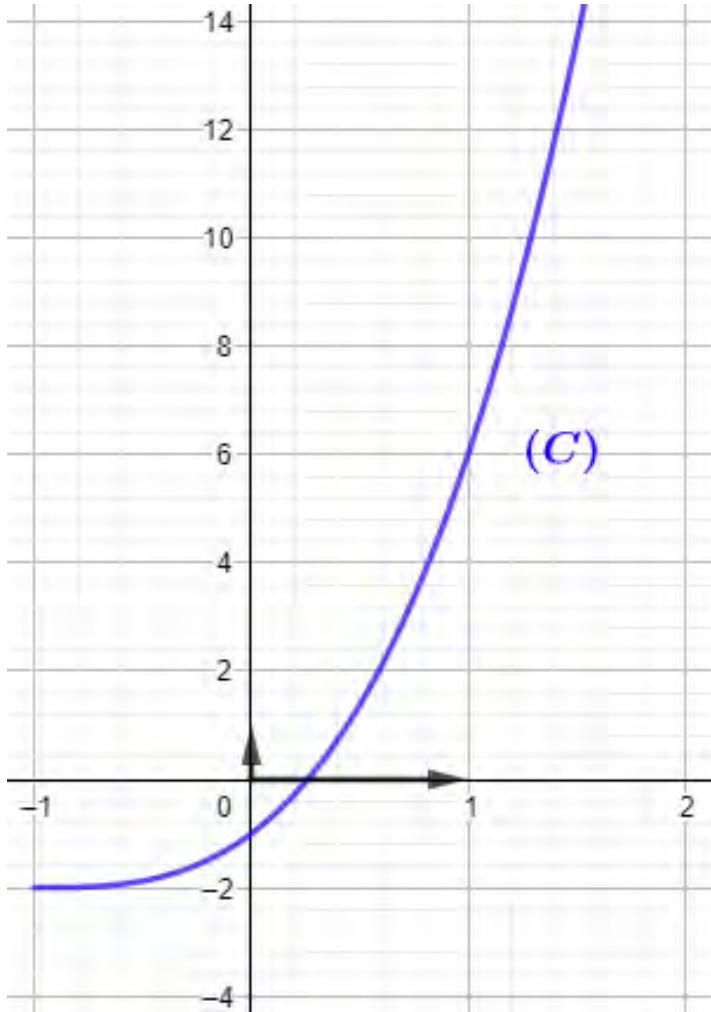
2 اكتب معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند الناقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

3 ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .



**18****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل



المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1

أ/ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g .

وحدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب/ علل وجود عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}[$ يحقق:

$$g(\alpha) = 0$$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2 f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$

كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس

$(0; \vec{i}, \vec{j})$

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$]-1; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث f' هي مشتقة الدالة f

ب/ عين دون حساب

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$$

وفسر النتيجة هندسيا.

ج/ احسب: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

د/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 نأخذ $\alpha \approx 0.26$

أ/ عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب/ ارسم المنحنى (Γ) .

**19****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

1 ادرس تغيرات الدالة g .**2** احسب $g(-2)$ ، ثم حل المعادلة $g(x) = 0$ **3** استنتج إشارة $g(x)$.**(II)** نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2}$$

1 بيّن أن:

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x + 1)^3}$$

2 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.**3** a, b, c ثلاث أعداد حقيقية، بين أن:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x + 1)^2}$$

4**أ/** بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل وليكن (Δ) ، يطلب تعيين معادلتيهما.**ب/** ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .**5** بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $\alpha \in]-0.35; -0.34[$ **6** ارسم المنحنى (C_f) **7** ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث: $f(x) = 2x + m$ **(III)** h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

1 بين أن الدالة h زوجية.**2** وضح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) . ثم أنشئه.



20

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x + 16$$

- ① ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- ② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.5 < \alpha < -2$.
- ③ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ① بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

- ② ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

- ③ بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ، ثم عين حصرا $f(\alpha)$

④

أ/ بين أن (Δ) المستقيم المنصف الأول مقارب مائل لـ (C_f) .ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

⑤

أ/ أوجد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.ب/ مثل بيانيا (Δ) و (C_f) .ج/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0$$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

**21****المسألة رقم:**

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

- 1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تبلى حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]2; 3[$
- 3 عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $\frac{n}{10} < \alpha < \frac{n+1}{10}$
- 4 استنتج إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها
- 2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x - 1)^3}$$

- 3 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 4 بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha - 1)^2}$ ، ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$
- 5

أ/ عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نسيمه (Δ) ج/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .6 عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 07 مثل بيانيا كل من (Δ) ، (T) و (C_f) .8 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^3 - (3 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 1 - m = 0$$



22

المسألة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = |x + 2| + \frac{1}{x + 1}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1 اكتب عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة.
- 2 ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 2، ثم أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة.
- 3 أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 4 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 5 أ/ برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2) ، يطلب تعيين معادليتهما.
ب/ ادرس الوضعية بين (C_f) و كلا من (Δ_1) و (Δ_2)
- 6 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-\infty; -2]$ حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$
- 7 مثل بيانياً كل من (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f) .

الحلول (مقترحة) :

فهرس المحتويات:

المسألة رقم 01 : المسألة الحل	المسألة رقم 02 : المسألة الحل
المسألة رقم 03 : المسألة الحل	المسألة رقم 04 : المسألة الحل
المسألة رقم 05 : المسألة الحل	المسألة رقم 06 : المسألة الحل
المسألة رقم 07 : المسألة الحل	المسألة رقم 08 : المسألة الحل
المسألة رقم 09 : المسألة الحل	المسألة رقم 10 : المسألة الحل
المسألة رقم 11 : المسألة الحل	المسألة رقم 12 : المسألة الحل
المسألة رقم 13 : المسألة الحل	المسألة رقم 14 : المسألة الحل
المسألة رقم 15 : المسألة الحل	المسألة رقم 16 : المسألة الحل
المسألة رقم 17 : المسألة الحل	المسألة رقم 18 : المسألة الحل
المسألة رقم 19 : المسألة الحل	المسألة رقم 20 : المسألة الحل
المسألة رقم 21 : المسألة الحل	المسألة رقم 22 : المسألة الحل

♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

**01****حل المسألة رقم:**

مشاهدة المسألة

1أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- تفسير النتائج هندسياً:

 $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $+\infty$ ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفهاأولاً نحسب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1) - 2(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
x^2	+	0	+	+	+	
$x - 3$	-		-	0	+	
$(x - 1)^3$	-		-	+	+	
$f'(x)$	+	0	+	-	0	+
$f(x)$	$+\infty \xrightarrow{f(0)} +\infty$			$+\infty \xrightarrow{f(3)} +\infty$		

2أ/ تعيين الأعداد a, b, c : من أجل كل $x \neq 0$ لدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + b}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(ax + b)(x - 1)^2 + cx + b}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{(ax + b)(x - 1)^2 + cx + b}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{ax^3 + (2a + b)x^2 + (a - 2b)x + 2b}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

ب/ استنتاج المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - [x - 2]) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} - [x - 2] \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x - 2}{(x - 1)^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ج/ وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) :

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$\begin{aligned}
f(x) - y &= x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} - x + 2 \\
&= \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

لدينا: $(x - 1)^2 > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$3x - 2$	-	0	+	+

- الوضعية:

- (C_f) تحت (d) لما $x \in]-\infty; 3[$
- (C_f) يقطع (d) لما $x = \frac{2}{3}$
- (C_f) فوق (d) لما $x \in]\frac{2}{3}; 1[\cup]1; +\infty[$

حيث $A\left(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}\right)$

③ إيجاد معادلة المماس (T) :

المماس (T) يوازي المستقيم (d) معناه: يوجد a حيث: $f'(a) = 1$

$$\begin{aligned}
f'(a) = 1 &\Rightarrow \frac{a^2(a - 3)}{(a - 1)^3} = 1 \\
&\Rightarrow a^2(a - 3) = (a - 1)^3 \\
&\Rightarrow 3a - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ومنه معادلة المماس (T): $f'(a)(x - a) + f(a)$ هي:

$$(T): y = x - \frac{17}{4}$$

4 تبين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty; 1[$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right) < 0$$

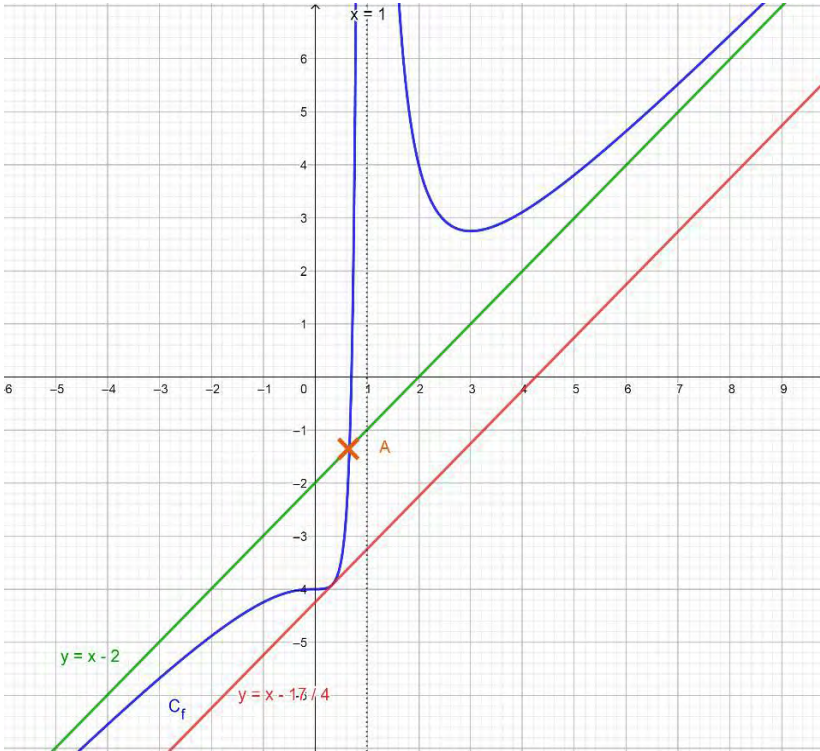
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty; 1[$:

- استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α :

α	$-\infty$	...	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	...	0.98	0.99	1
$f(\alpha)$	$+\infty$	...	-0.92	-0.58	-0.18	0.25	0.76	...	2348.97	9698.98	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $0.70 < \alpha < 0.71$

5 التمثيل البياني للمستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f) :



خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

• نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو

$$y = x - 2$$

• نرسم معادلة المماس (T) ذو المعادلة

$$y = x - \frac{17}{4}$$

• نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (d)

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

6 استنتاج بيانيا حلول المعادلة

$$f(x) = x + m$$

$$\text{لما } m < -\frac{17}{4} \quad \text{المعادلة لا تقبل حلول}$$

$$\text{لما } m = -\frac{17}{4} \quad \text{المعادلة تقبل حلا مضاعفا}$$

$$\text{لما } -\frac{17}{4} < m < -2 \quad \text{المعادلة تقبل حلان}$$

$$\text{لما } m = -2 \quad \text{المعادلة تقبل حل وحيد } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{لما } m > -2 \quad \text{المعادلة تقبل حلان}$$



02

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه: $g'(x) = 3x^2 + 6$ ولدينا $3x^2 + 6 > 0$ ، إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$ ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيد α .

- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty \end{aligned}$$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2)(x^2 + 2) - (2x)(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	-		0	+
$g(x)$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-3	$+\infty$

2

أ/ تبين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-6 - 2x}{x^2 + 2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x}{x^2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2}{x} \right] = 0
\end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x) - y = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$$

لدينا: $(x^2 + 2) > 0$ ومنه الإشارة من $(-2x - 6)$:

$$\begin{aligned}
-2x - 6 = 0 &\Rightarrow -2x = 6 \\
&\Rightarrow x = -3
\end{aligned}$$

ومنه إشارة $f(x) - y$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty; -3[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-3; -3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3; +\infty[$

③ تبين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha &= \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha \\
&= \frac{2\alpha^3 - 12 - 3\alpha^3 - 6\alpha}{\alpha^2 + 2} \\
&= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{\alpha^2 + 2} \\
&= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 + 2}
\end{aligned}$$

ولدينا من السؤال السابق: $g(\alpha) = 0$ ومنه:

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = -\frac{0}{\alpha^2 + 2} = 0$$

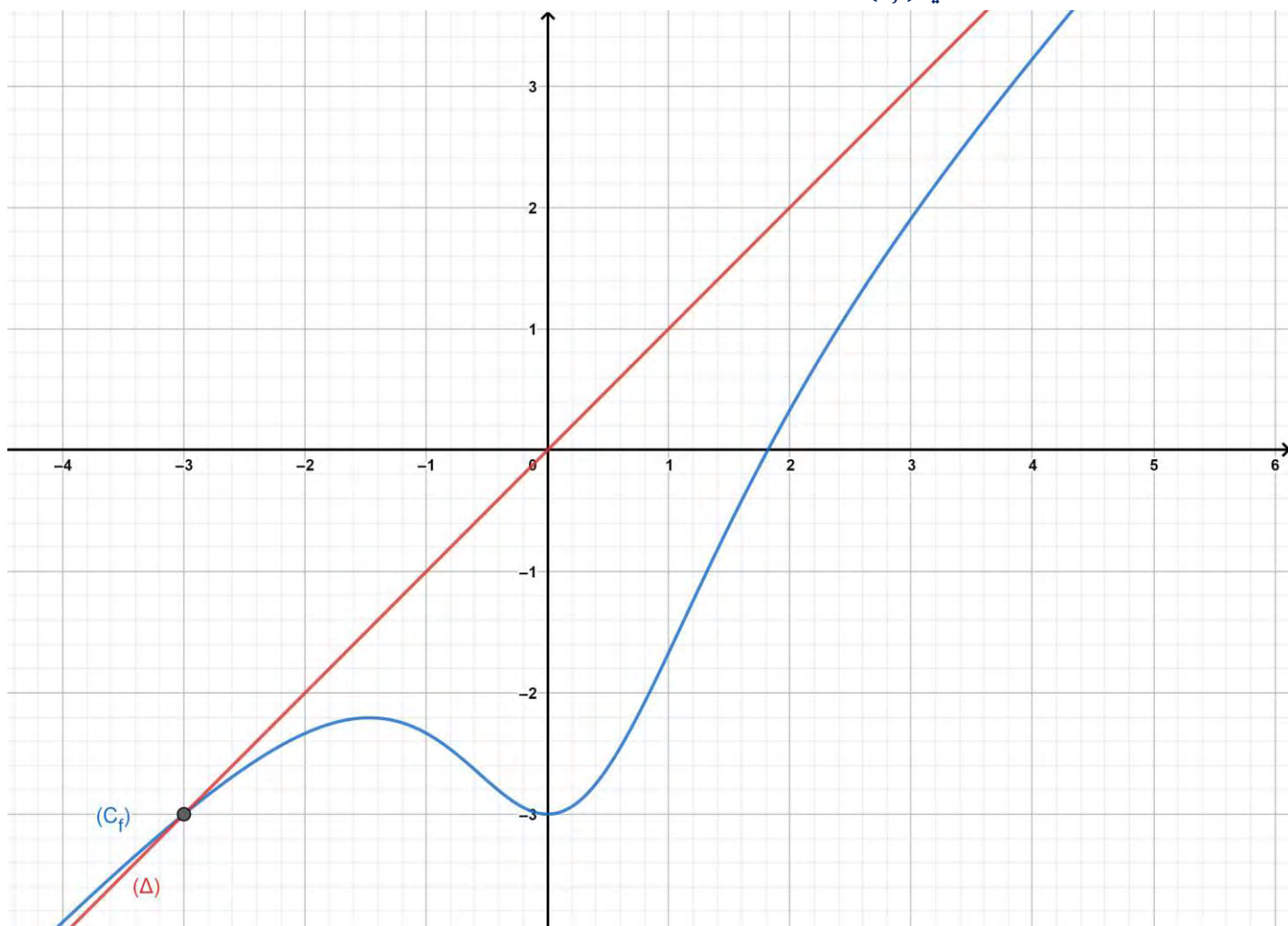
إذن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.48 < \alpha < -1.47$ ولدينا: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}(-1.48) &< \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1.47) \\
-2.22 &< f(\alpha) < -2.21
\end{aligned}$$

4 إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) :





03

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+1}$ لدينا من جدول التغيرات: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f(-2) = 5 \end{cases}$ ومنه:

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{c}{1} = 1 \\ \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x + 1) - (ax^2 + bx + c)}{(x + 1)^2}$$

وبما أن $f'(0) = 0$ فإن:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{b - c}{1} = 0 \\ \Rightarrow c = \boxed{b = 1}$$

ولدينا:

$$f(-2) = 5 \Rightarrow \frac{4a - 2b + c}{-1} = 5 \\ \Rightarrow 4a = 2b - c - 5 \\ \Rightarrow a = \frac{2b - c - 5}{4} \\ \Rightarrow a = \frac{-4}{4} \\ \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

2 تعيين $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$:من جدول التغيرات نجد: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

- التفسير الهندسي:

 (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$ 3 تعيين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2) :لما $x = -2$ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية، أي أن المماس يكون موازي لمحور الفواصل، ومنه معادلة المماس هي:

$$y = 5 \text{ أي } y = f(-2)$$

4 الإجابة بصحيح أم خطأ مع التبرير:

$$f(2) > f(1) \quad / \quad \text{أ}$$

خطأ، لأن: الدالة متناقصة على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا: $]0; +\infty[$ ومنه $\{1; 2\} \in]0; +\infty[$ ومنه $f(2) < f(1)$ (تنعكس صور الترتيب لأن الدالة متناقصة).ب/ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R} - \{-1\}$:خطأ، لأن: لدينا من جدول التغيرات $f(x)$ تنعدم من أجل قيمتين هما α و β .

ج / $f'(1) > 0$

خطأ، لأن: الدالة متناقصة على المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $]0; +\infty[$ ومنه $f'(1) > 0$
لما الدالة f متناقصة تكون $f'(x) < 0$

5 تعيين إشارة الدالة f :

x	$-\infty$	-1	α	β	$+\infty$
$f(x)$	+	-	0	+	+

II لدينا: $f(x) = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$

1

أ / تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x + 2 - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(-x+2)(x+1) - 1}{x+1} \\ &= \frac{-x^2 - x + 2x + 2 - 1}{x+1} \\ &= \frac{-x^2 + x + 1}{x+1} \end{aligned}$$

ب / استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x + 2)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-x + 2 - \frac{1}{x+1} + x - 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{1}{x+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y = -x + 2$

ج / دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - (-x + 2) = -\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-x-1}$$

لدينا:

$$-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	-	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

2

أ / تعيين إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم العمودي ذو المعادلة $x = -1$:

لدينا $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x = -1 \end{cases}$ بتعويض القيمة $(x = -1)$ في معادلة (Δ) نجد $(y = 3)$ ، إذن: $\omega(-1; 3)$

ب / تبين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• نبين أولا أن $(-2 - x) \in D_f$:

لدينا: $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ معناه: $x < -1$ أو $x > -1$

معناه: $(-x) < 1$ أو $(-x) > 1$ معناه: $(-2 - x) < -1$ أو $(-2 - x) > -1$

معناه: $(-2-x) \in D_f$ معناه: $(-2-x) \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

• نبين ثانياً أن $f(-2-x) + f(x) = 6$

$$\begin{aligned} f(-2-x) + f(x) &= -(-x-2) + 2 - \frac{1}{-x-2+1} - x + 2 - \frac{1}{x+1} \\ &= 6 - \frac{1}{-x-1} - \frac{1}{x+1} \\ &= 6 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω :

يوجد مماس يشمل النقطة ω معناه يوجد a حقيقي، يحقق:

$$y_\omega = f'(a)(x_\omega - a) + f(a) \dots (*)$$

نفرض أن $(*)$ ونصل إلى تناقض:

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} y_\omega = f'(a)(x_\omega - a) + f(a) &\Rightarrow -1 = f'(a)(3-a) + f(a) \\ &\Rightarrow -1 = \left(-1 + \frac{1}{(a+1)^2}\right)(3-a) + \frac{-a^2+a+1}{a+1} \\ &\Rightarrow -1 = \left(\frac{-(a+1)^2+1}{(a+1)^2}\right)(3-a) + \frac{-a^2+a+1}{a+1} \\ &\Rightarrow -1 = \frac{(-(a^2+2a+1)+1)(3-a)}{(a+1)^2} + \frac{(-a^2+a+1)(a+1)}{(a+1)^2} \\ &\Rightarrow -1 = \frac{(-a^2-2a-1+1)(3-a) + (-a^2+a+1)(a+1)}{(a+1)^2} \\ &\Rightarrow -(a+1)^2 = -3a^2-6a+a^3+2a^2-a^3+a^2+a-a^2+a+1 \\ &\Rightarrow -a^2-2a-1 = -a^2-4a+1 \\ &\Rightarrow -2a = 2 \\ &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

وهذا تناقض لأن $a \notin D_f$ ومنه لا يوجد أي مماس يشمل النقطة ω .

③ رسم كل من (Δ) و (C_f) :

خطوات الرسم:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$
- نعين $\omega(-1; 3)$ مركز تناظر (C_f)
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)

مركز التناظر:

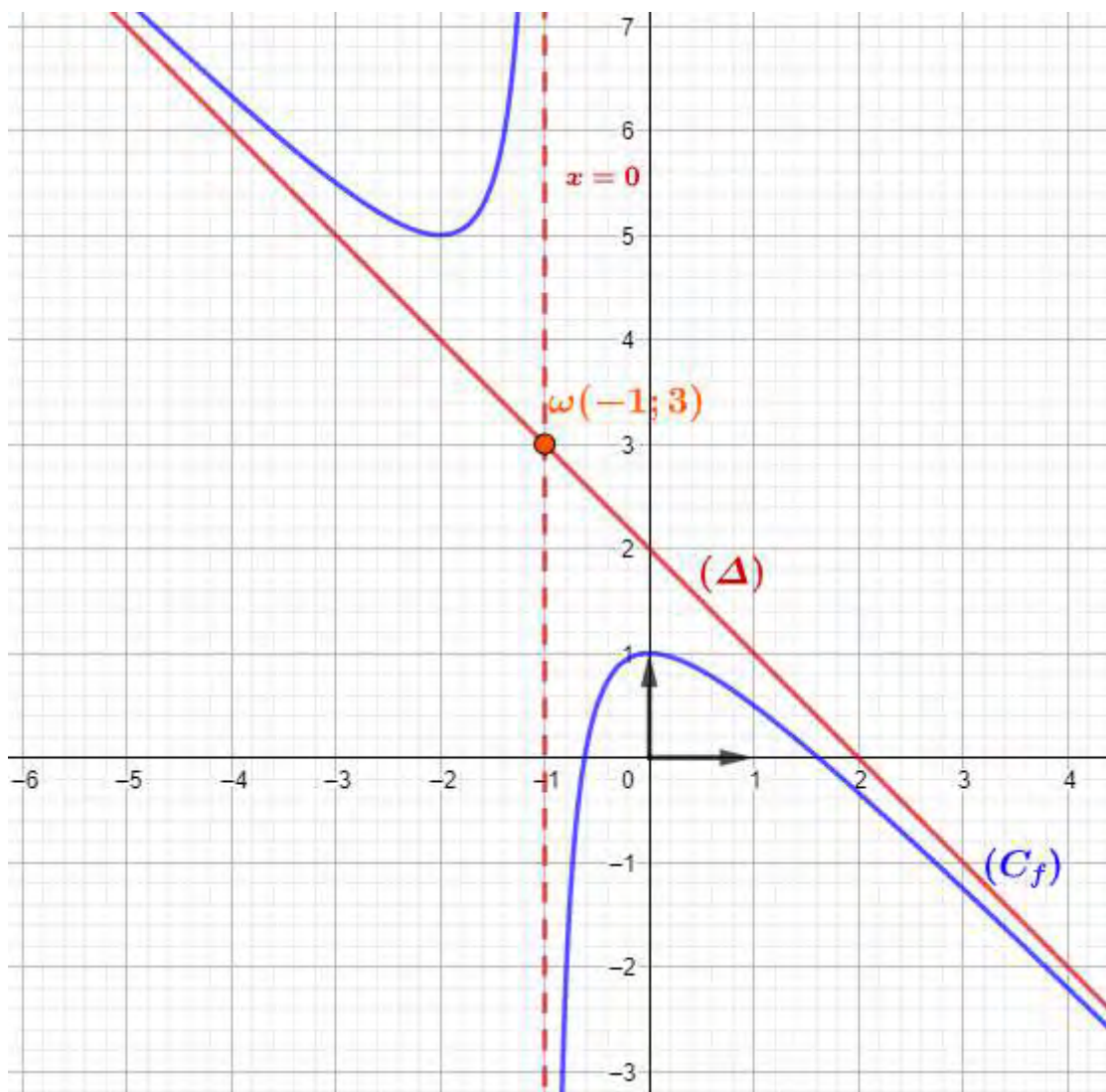
نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز

تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$



④ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -x + m$:

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -x + m$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty; 1[$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما $m = 1$	للمعادلة حل مضاعف معدوم
لما $m \in]1; 2[$	للمعادلة حل وحيد موجب
لما $m = 2$	للمعادلة لا تقبل حلول
لما $m \in]2; 3[$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما $m = 3$	للمعادلة حل مضاعف سالب
لما $m \in]3; +\infty[$	للمعادلة حل وحيد سالب

(III) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $g(x) = [f(x)]^2$.

① تعيين نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا: الدالة $g = u \circ f$ حيث: $u(x) = x^2$ ومنه:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ & \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \end{aligned}$$

نهاية مركب دالتين:

نعتبر u, v و f ثلاث دوال حيث:

$$f = v \circ u$$

ولتكن a, b و c أعداد حقيقية أو

منتهية $\pm\infty$

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$

و: $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$

فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$$

② حساب: $g(-2)$ و $g(0)$ ، $g(\beta)$ ، $g(\alpha)$:

لدينا من جدول التغيرات $f(\beta) = 0$ و $f(\alpha) = 0$ ومنه:

$$g(\beta) = [f(\beta)]^2 = 0 \quad ; \quad g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$

ولدينا:

$$g(-2) = [f(-2)]^2 = 5^2 = 25 \quad ; \quad g(0) = [f(0)]^2 = 1^2 = 1$$

③ باستعمال مشتق مركب دالتين، حساب $g'(x)$:

$$g(x) = (u \circ f)(x) = u(f(x)) \quad \text{لدينا:}$$

$$g'(x) = f'(x) \times u'(f(x)) \quad \text{ومنه:}$$

$$g'(x) = f'(x) \times 2f(x) \quad \text{إذن:}$$

④ استنتاج تغيرات الدالة g دون دراسة تغيراتها:

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$ في إشارة $f(x)$

x	$-\infty$	-2	-1	α	0	β	$+\infty$
$f(x)$	+	+	-	0	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-	-
$g'(x)$	-	0	+	-	0	-	+
$g(x)$	$+\infty$	25	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

(IV)

① دراسة شفعية الدالة h :

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية:

② توضيح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقاً من المنحنى (C_f) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|)$$

$$= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.



04

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x-7}{2-x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x}{-x} \right] = -3 \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x-7}{2-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{-x} \right] = -3 \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{3x-7}{2-x} \right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{3x-7}{2-x} \right] = \frac{-1}{0^-} = +\infty
 \end{aligned}$$

- تفسير النتائج هندسيا:

 $y = -3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$ $x = 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$ ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفهاأولا نحسب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{3(2-x) - (3x-7)}{(2-x)^2} \\
 &= \frac{-1}{(2-x)^2} < 0
 \end{aligned}$$

لدينا $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	-3	$+\infty$	-3

② تبين أن النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f) :أولا نثبت أن $(2(2) - x) \in D_f$ لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ معناه: $x \in]-\infty; 2[$ أو $x \in]2; +\infty[$ معناه: $x < 2$ أو $x > 2$ معناه: $-x > -2$ أو $-x < -2$ معناه: $(4-x) > 2$ أو $(4-x) < 2$ معناه: $(4-x) \in]-\infty; 2[$ أو $(4-x) \in]2; +\infty[$ إذن: $(4-x) \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ ثانيا نثبت أن $f(2(4) - x) + f(x) = 2(-3)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(4-x) + f(x) &= \frac{3(4-x) - 7}{2 - (4-x)} + \frac{3x - 7}{2 - x} \\
 &= \frac{5 - 3x}{-2 + x} + \frac{7 - 3x}{x - 2} \\
 &= \frac{12 - 6x}{-2 + x} \\
 &= \frac{-6(-2 + x)}{-2 + x} = -6
 \end{aligned}$$

إذن النقطة $A(2; -3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

③ إيجاد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x - 1$:

◀ المماس لـ (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة a يعطى بالمعادلة التالية: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

لدينا المماس مواز للمستقيم ذو المعادلة $y = -x - 1$ معناه $f'(a) = -1$

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \quad \text{ومنه} \quad -\frac{1}{(2-a)^2} = -1$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$$

إذن:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ a_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

إذن يوجد مماسان لـ (C_f) موازيان للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$ ، معادلتيهما:

$$\begin{aligned}
 (T_1): y &= f'(-1)(x - a_1) + f(a_1) \\
 &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\
 &= -1(x - 1) + (-4) \\
 &= -x - 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (T_2): y &= f'(a_2)(x - a_2) + f(a_2) \\
 &= f'(3)(x - 3) + f(3) \\
 &= -1(x - 3) + (-2) \\
 &= -x + 1
 \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{cases} (T_1): y = -x - 3 \\ (T_2): y = -x + 1 \end{cases}$$

④ إيجاد نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور الترتيب:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$

$$f(0) = \frac{3(0) - 7}{2 - (0)} = -\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; -\frac{7}{2} \right) \right\}$$

مع محور الفواصل:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$

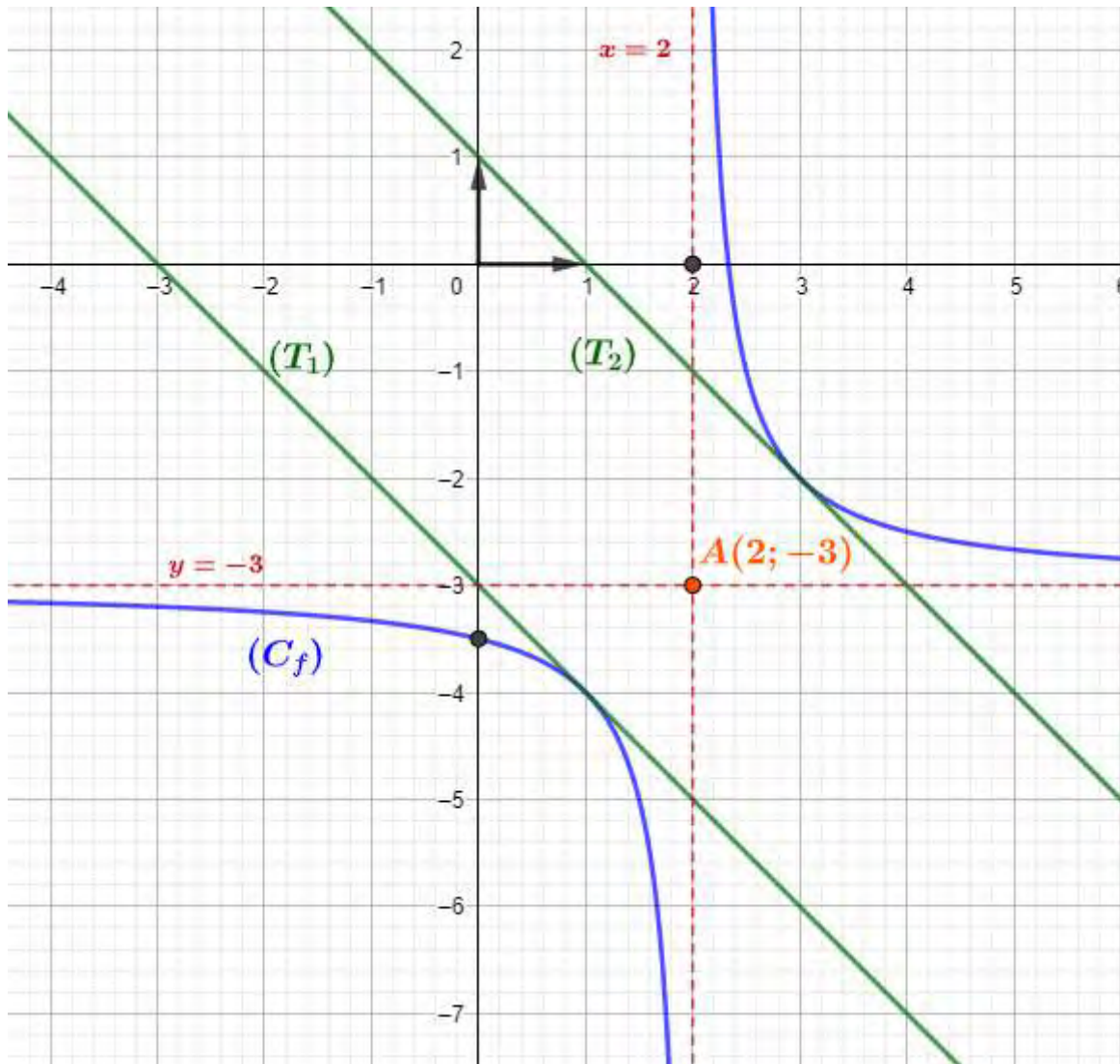
$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x - 7}{2 - x} \Rightarrow 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{7}{3}; 0 \right) \right\}$$

5 التمثيل البياني :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمتين المقاربة: $y = -3$ و $x = 2$
- نرسم المماسين (T_1) و (T_2) حيث: $\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$
- نعين النقطة $A(2; -3)$ مركز تناظر لـ (C_f) .
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات $(x'x)$ و $(y'y)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II)

1 تبين أن الدالة h زوجية:

لدينا:

$$\begin{aligned} h(-x) &= -f(|-x|) \\ &= -f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

② شرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) :

لدينا:

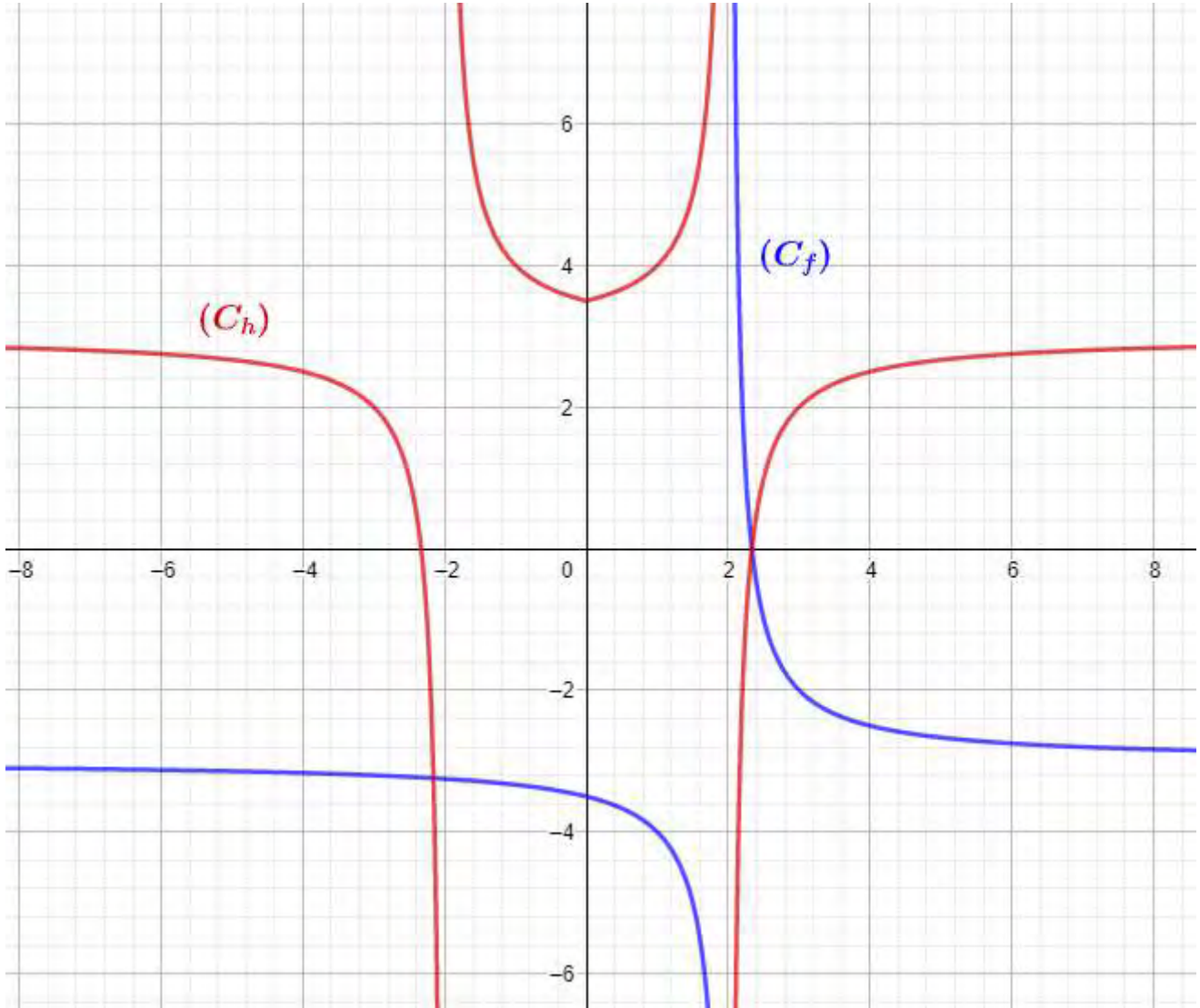
$$h(x) = -f(|x|) = \begin{cases} -f(x) & ; x \geq 0 \\ -f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

كيفية الرسم:

لما $x \in [0; +\infty[$ يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب

③ إنشاء (C_h) :





05

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 تعيين D_f :

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 3 \neq 0 &\Rightarrow (x - 1)(x - 3) \neq 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

إذن: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 3\}$ 2 حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$
لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$(x^2 - 4x + 3)$	+	0	-	0	+

حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2} \right] = 3 \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2} \right] = 3 \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] = \frac{1}{0^+} = +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \frac{1}{0^-} = -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 3} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] = \frac{1}{0^+} = +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 3} [f(x)] &= \frac{1}{0^-} = -\infty
 \end{aligned}$$

تفسير النتائج هندسيا:

- $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$
- $x = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$

3 دراسة إتجاه تغير الدالة f :لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفهاأولا: نحسب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(3x - 12)(x^2 - 4x + 3) - (2x - 4)(3x^2 - 12x + 10)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\
 &= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 3)^2}
 \end{aligned}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2 - 4x + 3)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x + 4)$

لدينا: $-2x + 4 = 0$ ومنه $-2x = -4$ ومنه $x = 2$

ثالثًا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	3 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 3		

④ إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور الترتيب:

$$f(0) = \frac{3(0)^2 - 12(0) + 10}{(0)^2 - 4(0) + 3} = \frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{10}{3} \right) \right\}$$

مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x + 10 = 0 \dots (1) \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(3)(10) = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{24}}{6} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{24}}{6} \end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{12 - \sqrt{24}}{6}; 0 \right), \left(\frac{12 + \sqrt{24}}{6}; 0 \right) \right\}$$

⑤

أ/ تبين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$:

لدينا $x \in D_f$ ومنه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ومنه: $x \in]3; +\infty[$ أو $x \in]1; 3[$ أو $x \in]-\infty; 1[$

ومنه: $x > 3$ أو $1 < x < 3$ أو $x < 1$

ومنه: $-x < -3$ أو $-3 < -x < -1$ أو $-x > -1$

ومنه: $4 - x < 1$ أو $1 < 4 - x < 3$ أو $4 - x > 3$

ومنه: $(4 - x) \in]-\infty; 1[$ أو $(4 - x) \in]1; 3[$ أو $(4 - x) \in]3; +\infty[$

إذن: $(4 - x) \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ب/ تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) :

أولا نثبت أن $(2(2) - x) \in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4 - x) \in D_f$

ثانيا نثبت أن $f(2(4) - x) = f(x)$

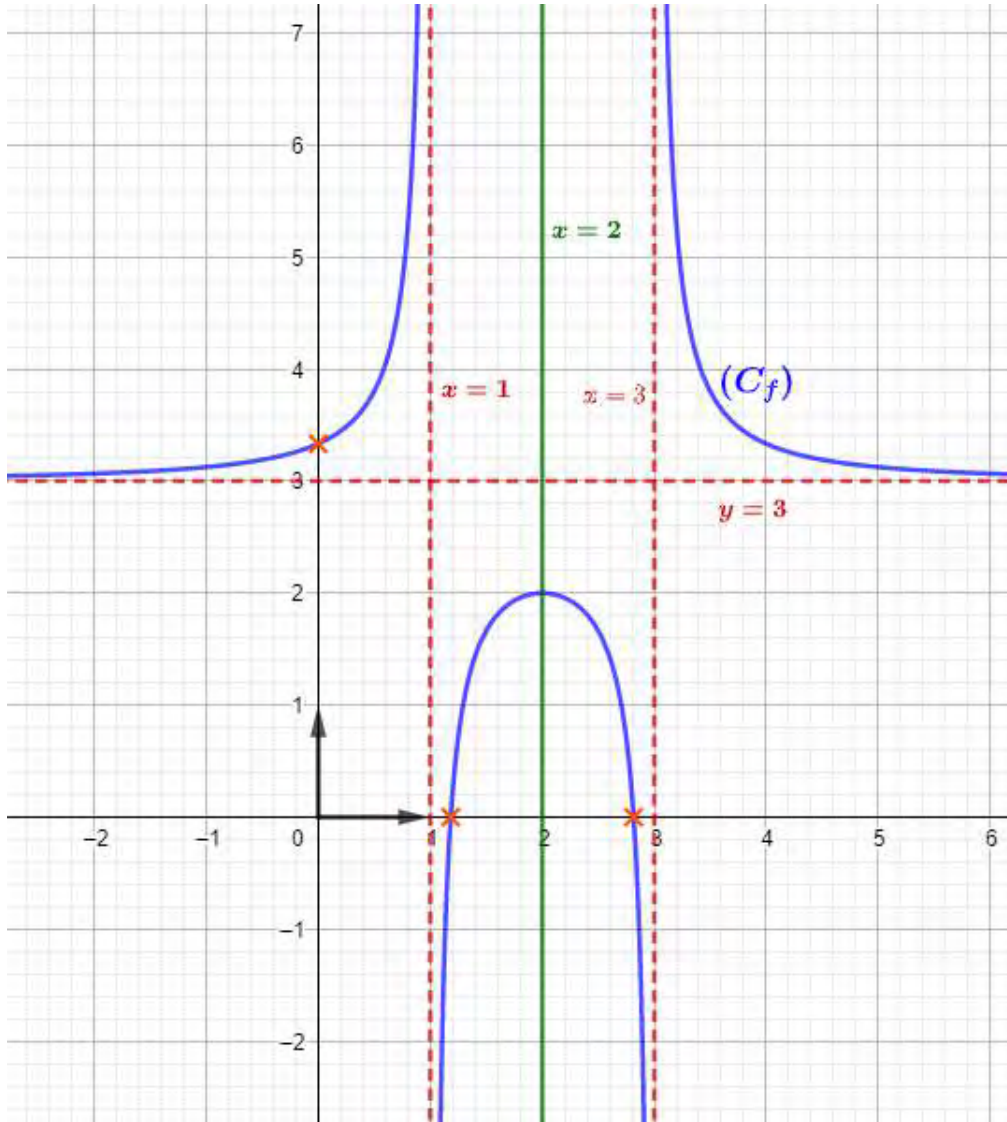
$$\begin{aligned}
 f(4-x) &= \frac{3(4-x)^2 - 12(4-x) + 10}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 3} \\
 &= \frac{3(4^2 - 2(4)(x) + x^2) - 48 + 12x + 10}{4^2 - 2(4)(x) + x^2 - 16 + 4x + 3} \\
 &= \frac{3(16 - 8x + x^2) - 38 + 12x}{x^2 - 4x + 3} \\
 &= \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} = f(x)
 \end{aligned}$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .

6 التمثيل البياني للمنحنى (C_f) :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = 3$ و $x = 1$ و $x = 3$
- نرسم المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = |m|$ ، وهي:

$m \in]-2; 2[$	أي لما	$-2 < m < 2$	أي لما	$ m < 2$	لما
للمعادلة حلين موجبين					
$m = \{-2; 2\}$	أي لما	$m = -2$ أو $m = 2$	أي لما	$ m = 2$	لما
للمعادلة حل مضاعف موجب					
$m \in [-3; -2[\cup]2; 3]$	أي لما	$m < -2$ أو $m > 2$	أي لما	$2 < m \leq 3$	لما
للمعادلة لا تقبل حلول					
$m \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$	أي لما	$m < -3$ أو $m > 3$	أي لما	$ m > 3$	لما
للمعادلة حلين موجبين					

(II)

① دراسة شفعية الدالة h :

$$h(-x) = \frac{3(-x)^2 - 12|-x| + 10}{(-x)^2 - 4|-x| + 3} = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3} = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

② توضيح كيف يتم رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) :

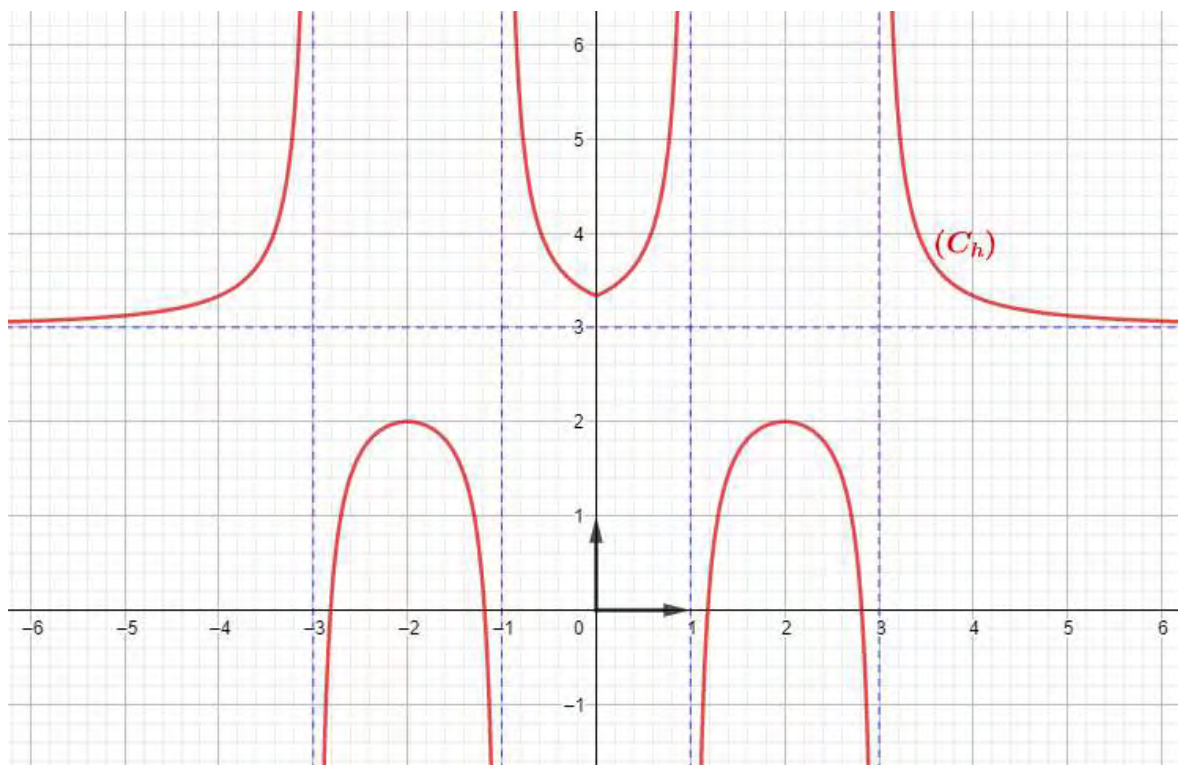
لدينا:

$$h(x) = \frac{3x^2 - 12|x| + 10}{x^2 - 4|x| + 3} = \begin{cases} \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} ; x \geq 0 \\ \frac{3x^2 + 12x + 10}{x^2 + 4x + 3} ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x) ; x \geq 0 \\ \frac{3x^2 + 12x + 10}{x^2 + 4x + 3} ; x \leq 0 \end{cases}$$

إذن لما $x \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) ، وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب

- رسم (C_h) :





06

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I) تعيين α و β :لدينا: f تقبل قيمة حدية عند 0 معناه: $f'(0) = 0$ نعين أولاً $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2\alpha x + \beta)(x - 1) - (\alpha x^2 + \beta x + 1)}{(x - 1)^2} \\
 &= \frac{2\alpha x^2 - 2\alpha x + \beta x - \beta - \alpha x^2 - \beta x - 1}{(x - 1)^2} \\
 &= \frac{\alpha x^2 + (-2\alpha - \beta)x - \beta - 1}{(x - 1)^2}
 \end{aligned}$$

لدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha(0)^2 + (-2\alpha - \beta)(0) - \beta - 1}{(0 - 1)^2} &= 0 \Rightarrow -\beta - 1 = 0 \\
 &\Rightarrow \boxed{\beta = -1}
 \end{aligned}$$

ولدينا: $f(2) = 3$ ، ومنه:

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha(2)^2 + \beta(2) + 1}{2 - 1} &= 3 \Rightarrow 4\alpha + 2\beta = 2 \\
 &\Rightarrow 2\alpha + (-1) = 1 \\
 &\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}
 \end{aligned}$$

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -1$:① حساب: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{0^+} \\
 &= +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{0^-} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$ ② حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \right) = -\infty$$

3

أ/ تبين أن: $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{x(x-1) + 1}{x-1} \\ &= \frac{x^2 - x + 1}{x-1} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{1}{x-1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x-1} \right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y_{(\Delta)} = x$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{x-1}$$

لدينا: $x - 1 = 0$ معناه: $x = 1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	$ $	$+$

ومنه: $\bullet (C_f)$ تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 1[$.

$\bullet (C_f)$ فوق (Δ) لما $x \in]1; +\infty[$.

4

أ/ تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $x(x-2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} x(x-2) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

5 تبين أن ω مركز تناظر لـ (C_f) :

- إيجاد إحداثيي النقطة ω :

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ) : نجد: $y = 1$

ومنه: $\omega(1; 1)$

- تبين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $(-x) > -1$ أو $(-x) < -1$

معناه: $(2(1) - x) > 1$ أو $(2(1) - x) < 1$

معناه: $(2(1) - x) \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

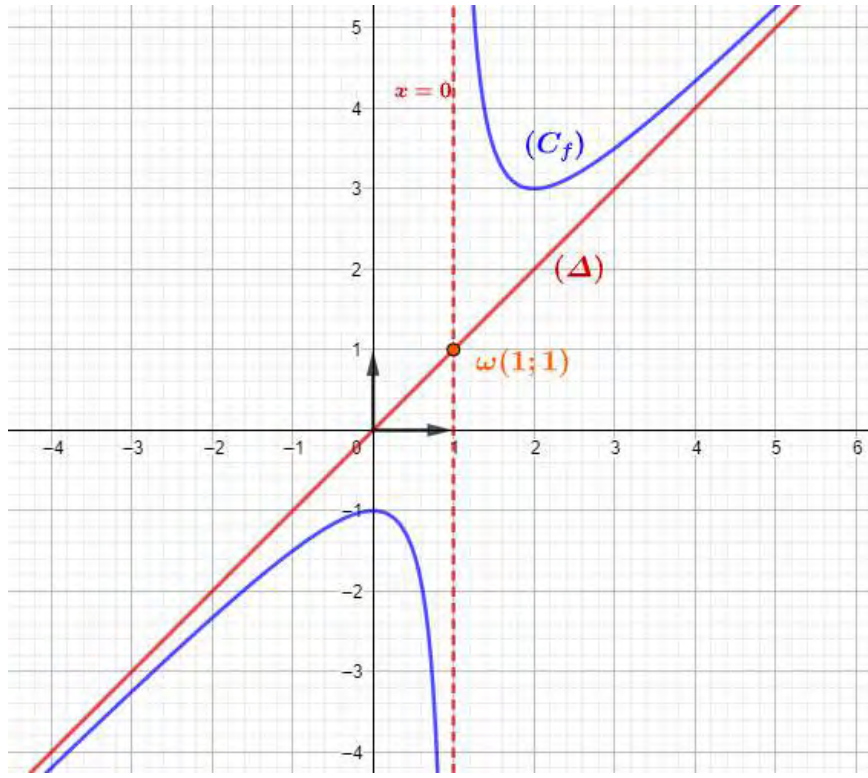
معناه: $(2(1) - x) \in D_f$

• ولدينا:

$$\begin{aligned}
 f(2(1) - x) + f(x) &= \frac{(2-x)^2 - (2-x) + 1}{(2-x) - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \\
 &= \frac{4 - 4x + x^2 - 2 + x + 1}{2 - x - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \\
 &= \frac{x^2 - 3x + 3}{-(x-1)} + \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \\
 &= \frac{-x^2 + 3x - 3}{x - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \\
 &= \frac{-2x - 2}{x - 1} \\
 &= \frac{2(x-1)}{x-1} \\
 &= 2 = 2(1)
 \end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

6 رسم كل من (Δ) و (C_f) :



7 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty; -1[$ للمعادلة حل موجب

لما $m = -1$ للمعادلة حل معدوم

لما $m \in]-1; 0[$ للمعادلة حل سالب

لما $m = 0$ للمعادلة لا تقبل حلولاً

لما $m \in]0; +\infty[$ للمعادلة حل موجب

(III)

1 دراسة شفعية الدالة h :

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

2 توضيح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.



07

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

1 إيجاد الأعداد a, b, c :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax + b + \frac{c}{x-3} \\
 &= \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3} \\
 &= \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3}
 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -8 \\ -3b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

2

أ/ استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x-5)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3} - (x-5) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x-3} \right] = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 5$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ ب/ تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{1}{x-3}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-3)$:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\frac{1}{x-3}$	-		+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

3 دراسة تغيرات الدالة f :

أولا: حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3} \right] = -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3} \right] = +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي:

المستقيم $x = 3$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ثانياً: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

لدينا: $(x-3)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $(x^2 - 6x + 8)$:

$$\Delta = 36 - 4(1)(8) = 4 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$$

ثالثاً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$				
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

④ إيجاد إحداثي النقطة ω :

$$\begin{cases} y = x - 5 \dots (1) \\ x = 3 \dots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y = 3 - 5 = -2$ ومنه $\omega(3; -2)$

- اثبات أن ω مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

أولاً نثبت أن $(2(3) - x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

معناه: $x \in]-\infty; 3[$ أو $x \in]3; +\infty[$ معناه: $x < 3$ أو $x > 3$ معناه: $-x > -3$ أو $-x < -3$

معناه: $6 - x < 3$ أو $6 - x > 3$ معناه: $(6 - x) \in]-\infty; 3[$ أو $(6 - x) \in]3; +\infty[$

إذن: $(6 - x) \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

ثانياً نثبت أن $f(2(3) - x) + f(x) = 2(-2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
f(6 - x) + f(x) &= 6 - x - 5 + \frac{1}{6 - x - 3} + x - 5 + \frac{1}{x - 3} \\
&= \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{x - 3} - 4 \\
&= \frac{1}{3 - x} - \frac{1}{3 - x} - 4 = -4
\end{aligned}$$

إذن النقطة $\omega(3; -2)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

5 التمثيل البياني:

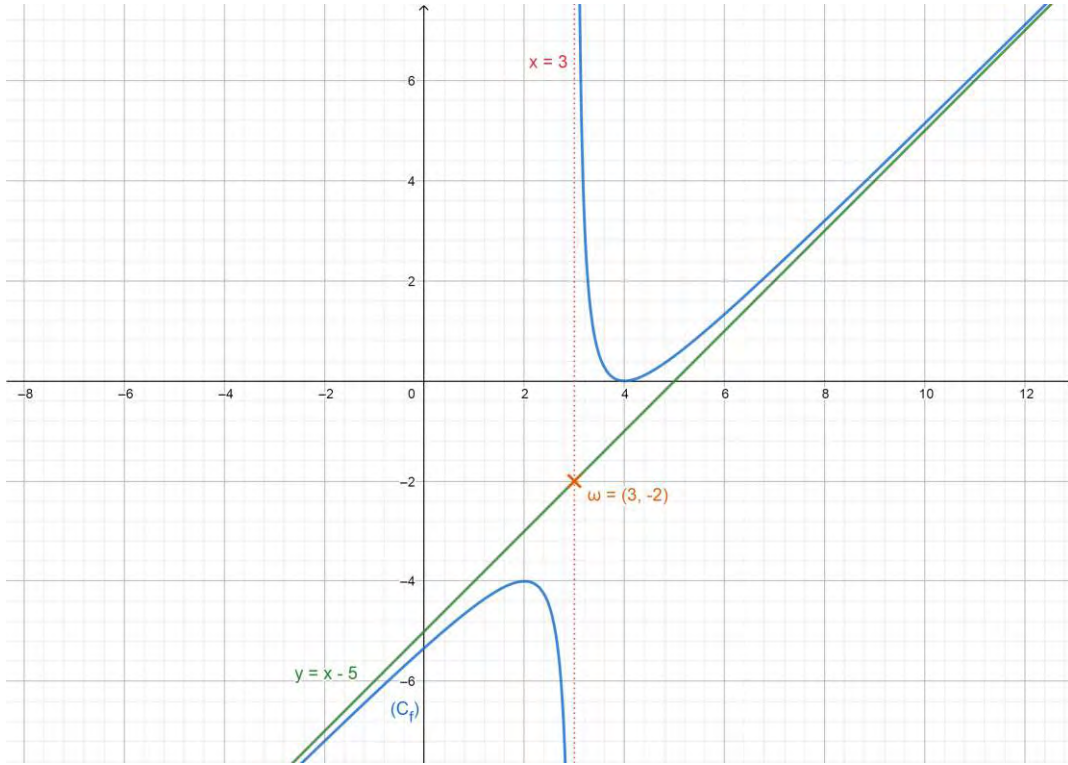
خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$

نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x - 5$.

نعين ω مركز تناظر المنحنى (C_f)

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6 استنتاج رسم المنحنى (C_h) :

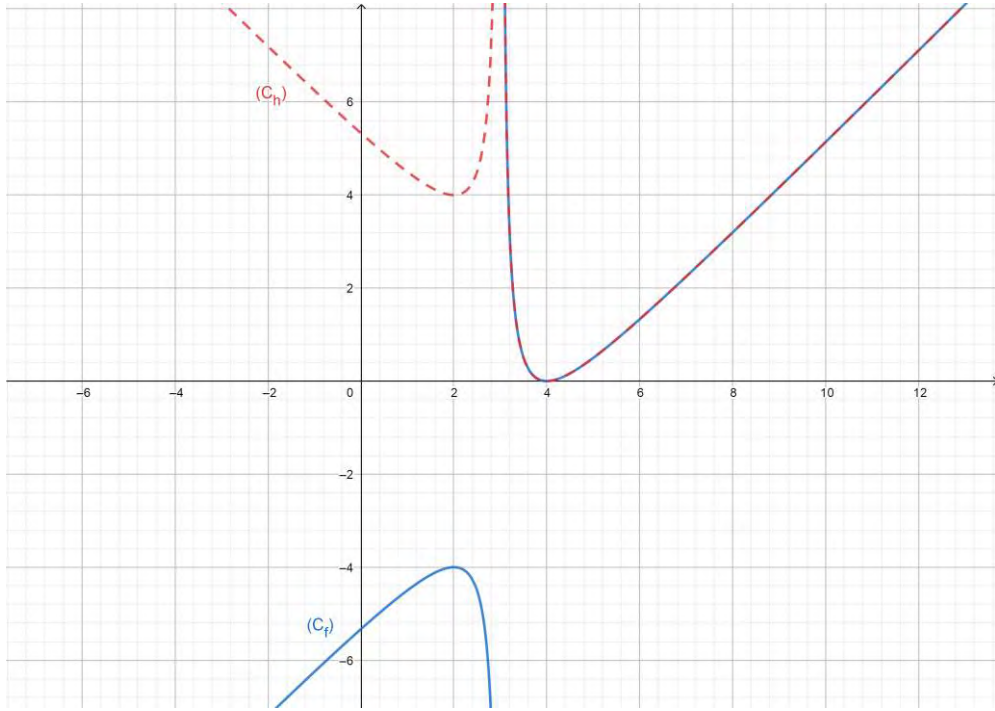
لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(x-4)^2}{|x-3|} \\ &= \frac{|(x-4)^2|}{|x-3|} \\ &= \left| \frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} \right| \\ &= |f(x)| \end{aligned}$$

ومنه:

(C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $f(x) \geq 0$

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$.





08

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

أولاً: حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x^3 - 6x^2 + 6x + 3] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^3 - 6x^2 + 6x + 3] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

ثانياً: حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 6x^2 - 12x + 6 \\
 &= 6(x - 1)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

ثالثاً: تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$-\infty$	3	$+\infty$

②

أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :لدينا الدالة g رتيبة ومستمرة على مجال تعريفهاولدينا: $g(-0.3) = 0.606$ و $g(-0.4) = -4.88$ ولدينا: $g(-0.3) \times g(-0.4) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ب/ تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(II)

① تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} \\
 &= \frac{(x^2 - 2x - 1)(x-1) - 5}{x-1} \\
 &= \frac{(x^2 - 2x - 1)(x-1) - 5}{x-1} \\
 &= \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x-1}
 \end{aligned}$$

②

أ/ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2] = +\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1} \right] = +\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-2 - \frac{5}{0^-} \right] = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-2 - \frac{5}{0^+} \right] = -\infty \end{aligned}$$

نلاحظ أن المستقيم $(x = 1)$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2 + \frac{5}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{2(x - 1)^3 + 5}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 3}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

لدينا $(x - 1)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة $g(x)$.

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	$+\infty$

③ حساب: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{5}{x - 1} \right] = 0$$

المنحني (C_p) الممثل للدالة: $(x^2 - 2x - 1)$ هو منحنى تقارب للدالة f بجوار $\pm\infty$

④ دراسة الوضع النسبي بين (C_p) والمنحني (C_f) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - p(x)]$

لدينا:

$$f(x) - p(x) = -\frac{5}{x - 1} = \frac{5}{1 - x}$$

لدينا: $0 < 5$ إذن الإشارة من إشارة المقام

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - p(x)$	$+$		$-$
الوضعية	(C_p) فوق (C_f)		(C_p) تحت (C_f)

⑤ تبين أن $\left[f(\alpha) = \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2 \right]$

يكفي أن نثبت أن: $\left(f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = 0 \right)$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ ، ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 &= \alpha^2 - 2\alpha - 1 - \frac{5}{\alpha - 1} - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 \\ &= \frac{2(\alpha - 1)(\alpha^2 - 2\alpha - 1) - 2(5) + 15 + 2(2(\alpha - 1))}{2(\alpha - 1)} \\ &= \frac{2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2(\alpha - 1)} \\ &= \frac{g(\alpha)}{2(\alpha - 1)} = \frac{0}{2(\alpha - 1)} = 0 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $0.4 < \alpha < -0.3$

ومنه: $0.3 < -\alpha < 0.4$

ومنه: $1.3 < 1 - \alpha < 1.4$

ومنه: $2.6 < 2(1 - \alpha) < 2.8$

ومنه: $\frac{1}{2.8} < \frac{1}{2(1-\alpha)} < \frac{1}{2.6}$

ومنه: $\frac{15}{2.8} - 2 < \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2 < \frac{15}{2.6} - 2$

إذن: $3.36 < f(\alpha) < 3.77$

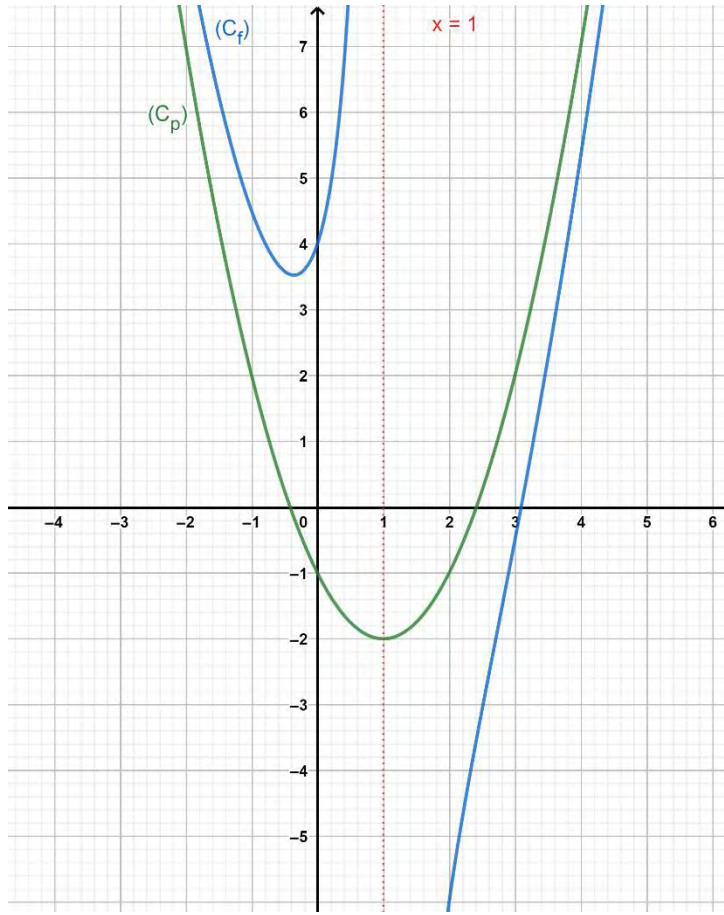
⑥ التمثيل البياني لكل من (C_p) و (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيم المقارب: $x = 1$

نرسم المنحني المقارب ذو المعادلة $(x^2 - 2x - 1)$.

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)





09

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f :
لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &\neq 0 \\ (x-1)(x-2) &\neq 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \text{و} \\ x-2 \neq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{و} \\ x \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\}$ - تبين أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} \\ &= \frac{a(x-1)(x-2) + b(x-2) + c(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{ax^3 + (-3a + b + c)x + (2a - 2b - c)}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -3a + b + c = 2 \\ 2a - 2b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 5 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 - c \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 9 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

2

أ / دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\frac{4}{0^-} = +\infty \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{4}{0^+} = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -\frac{4}{0^-} = +\infty \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\frac{4}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

ثانياً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-2)^2} \\ &= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-5x^2 + 2x + 7}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$= \frac{-5(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

لدينا: المقام $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$-5(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \text{أو} \\ x - \frac{7}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{أو} \\ x = \frac{7}{5} \end{cases}$$

ثالثًا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{7}{5}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	1	0	$+\infty$	$-\infty$	-24	$+\infty$

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$

$x = 2$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$

$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

$$= \frac{-4(x-2) + 9(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط $\times$ إشارة المقام

دراسة إشارة البسط:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{و} \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{و} \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	1	2	$+\infty$
$5x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 3x + 2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

- الوضعية:

- $x \in]\frac{1}{5}; 1[\cup]2; +\infty[$ لما (Δ) فوق (C_f)
 - $x \in]-\infty; \frac{1}{5}[\cup]1; 2[$ لما (Δ) تحت (C_f)
 - $x = \frac{1}{5}$ لما (Δ) يقطع (C_f)
- ③ تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

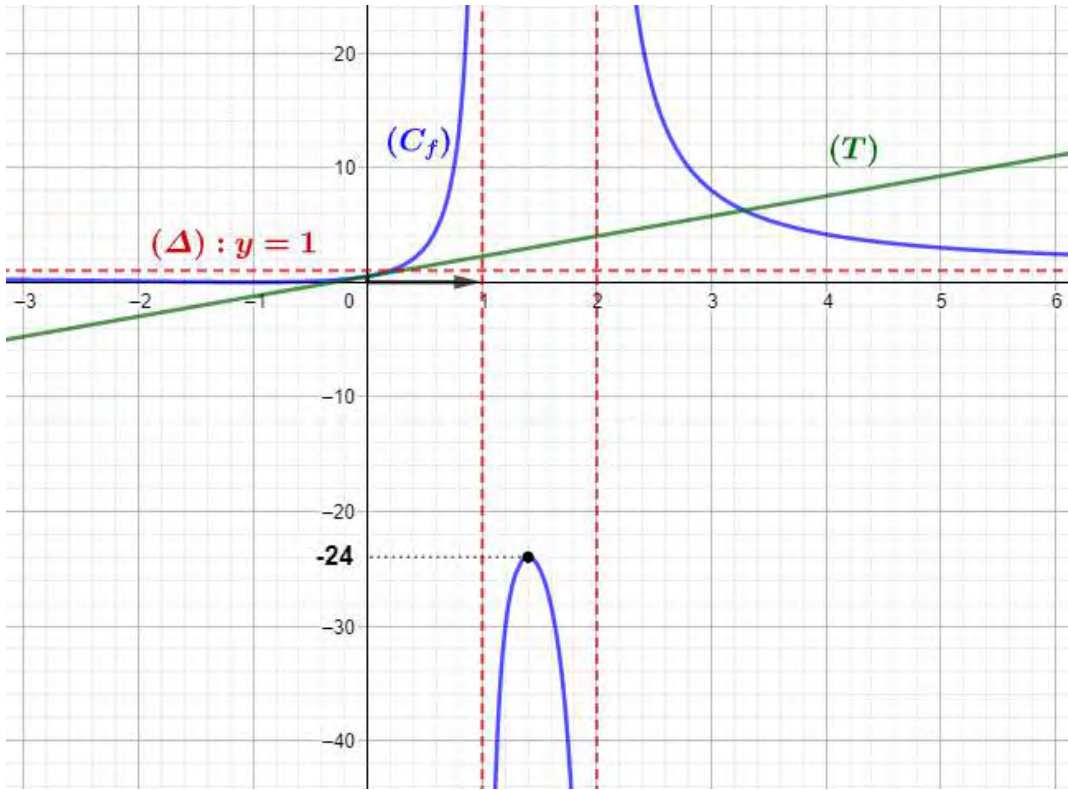
④ التمثيل البياني:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$

نعين المماس ذو المعادلة $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II)

① تعيين مجموعة تعريف الدالة h :

لتكون الدالة h معرفة يجب أن يكون:

$$x^2 - 3|x| + 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0, x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0, x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1) \neq 0 \\ (x+2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

ومنه: $D_h = \mathbb{R} - \{-2; -1; 1; 2\}$

② كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) ; & x \geq 0 \\ f(-x) ; & x < 0 \end{cases}$$

③ دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 :

◀ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند a وكلتا النهايتان تساوي $f(a)$ ، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد ▶

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right) = \left(\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right) = \left(\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right) = \frac{1}{2}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} [h(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [h(x)] = \frac{1}{2}$ فإن: الدالة h مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 7x}{2x(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+7}{2(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 - 7x}{2x(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-7}{2(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ومنه المنحنى (C_h) يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما: $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

④ دراسة شفعية الدالة h :

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 + 2|-x| + 1}{(-x)^2 - 3|-x| + 2} = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

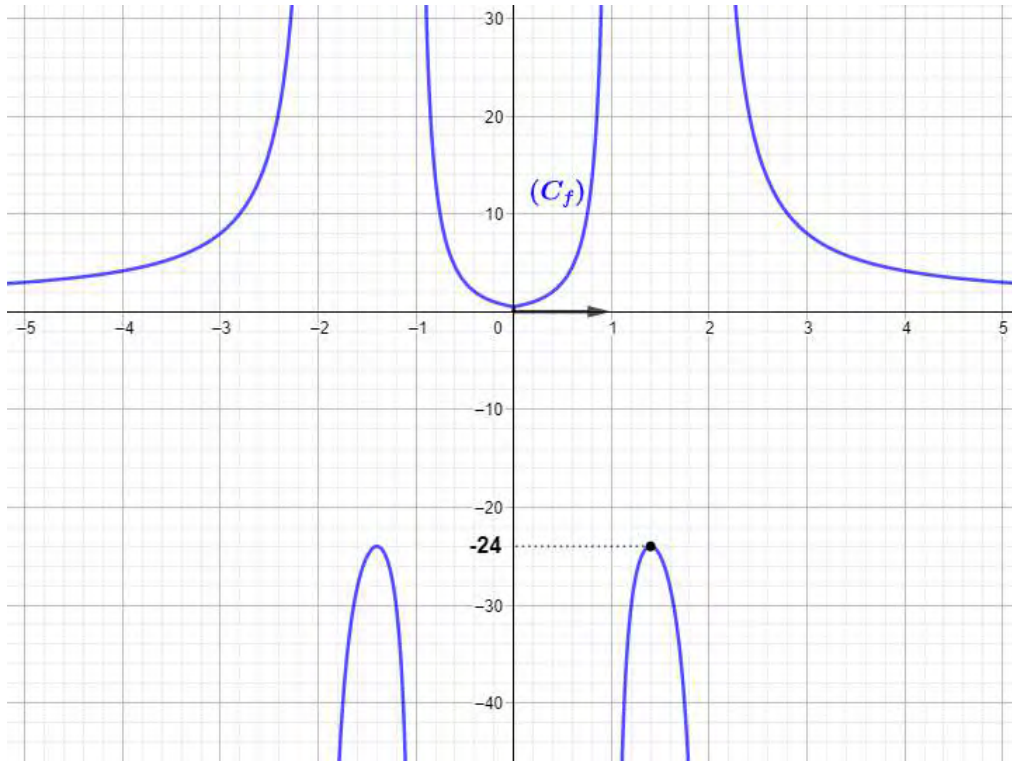
⑤ استنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقاً من (C_f) :

لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$ ، ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$.

ولما $x < 0$ لدينا: $h(x) = f(-x)$ ، ومنه (C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.



6 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 (m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m-1 &= 0 \Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m - 1 = 0 \\
 &\Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 2x + 1 \\
 &\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \\
 &\Rightarrow f(x) = m
 \end{aligned}$$

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y = m$

لما: $m < -24$ المعادلة تقبل حلان موجبان

لما: $m = -24$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

لما: $-24 < m < 0$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالب

لما: $0 < m < \frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلان سالبان

لما: $m = \frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا وحلا معدوم

لما: $\frac{1}{2} < m < 1$ المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة

لما: $m = 1$ المعادلة تقبل حل موجب

لما: $m > 1$ المعادلة تقبل حلان موجبان



10

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 برهان أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$: G مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.- حساب $G'(x)$:

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= F'(x) - F'(-x) \\
 &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(-x)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0
 \end{aligned}$$

ومنه الدالة G ثابتة.2 حساب $G(0)$:

$$G(0) = F(0) - F(-0) = 0$$

- استنتاج أن G فردية:بما أن الدالة G ثابتة، إذن من كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$ ومنه الدالة F فردية

(II)

1 تبرير أن H تقبل الاشتقاق على I وحساب $H'(x)$: H مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ إذن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
 H'(x) &= F'(x) + \left[F\left(\frac{1}{x}\right) \right]' \\
 &= F'(x) - \frac{1}{x^2} F'(x) \\
 &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0
 \end{aligned}$$

ومنه الدالة H ثابتة.2 برهان أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$:

$$H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$$

وبما أن الدالة H ثابتة فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه:

$$H(x) = 2F(1)$$

3 استنتاج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [H(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] + F(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)]$$

ومنه:

$$2F(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)]$$

الاستنتاج: (C_f) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

وبما أن F فردية فإن (C_f) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

(III)

① حساب $T'(x)$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= [F(\tan x) - x]' = (\tan' x)F'(\tan x) - 1 \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) \\ &= (1 + \tan^2 x) \left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

ومنه T دالة ثابتة.

② حساب $F(1)$:

لدينا: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ومنه $0 \in D_T$ أي:

$$T(0) = F(\tan 0) - 0 = F(0) - 0 = 0 - 0 = 0$$

وبما أن T ثابتة فإنه من أجل كل $x \in D_T$ فإنه $T(x) = 0$ ، إذن:

$$F(\tan x) = T(x) + x = 0 + x = x$$

ولدينا من جهة أخرى: $F(\tan x) = F(1)$ أي $\tan x = 1$

وهذا يكافئ: $x = \frac{\pi}{4}$ لأن: $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ، إذن: $F(1) = F(\tan \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

(IV)

① انجاز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F' موجبة تماما ومنه الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

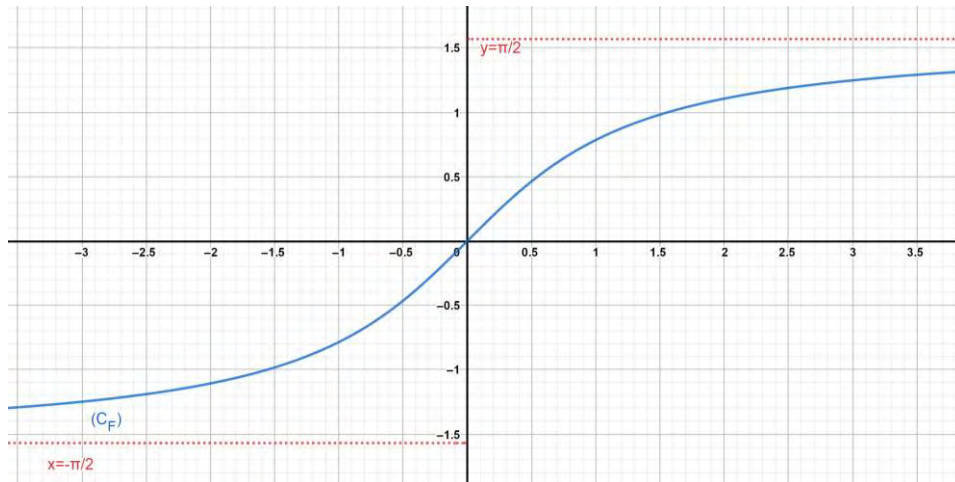
ولدينا $F(1) = \frac{\pi}{4}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

وبما أن الدالة F فردية فإن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x)] = -\frac{\pi}{2}$ ، ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

② رسم المنحنى (C_f) والمستقيمات المقاربة:





11

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1

أ / حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3] = +\infty
 \end{aligned}$$

ب / دراسة تغيرات الدالة g :أولاً: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ ,

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماماً.ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2

أ / تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty \quad \text{و} \quad g(2) = -3$$

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times g(2) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $[2; +\infty[$.ب / حصر العدد α :

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.7	2.8	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.1	1.8	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.7$

ج/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

① تعيين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \\
 &= +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{0^+} \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

② تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{ax^3 + x^2(-2a+b) + x(a-2b) + b+c}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

③

أ/ تبين أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (d) :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} - (x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f) :

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		+
الوضعية	(d) فوق (C_f)		(d) فوق (C_f)

4

أ/ دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^3 - 4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	α	$-\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$(x-1)^3$	-	+		+
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب/ تبين أن (C_f) يقطع مرة واحدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(0) = 1$ و $f(-1) = -1.5$

ولدينا $f(-1) \times f(0) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث: $-1 \leq \beta \leq 0$

ج/ تبين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$

لدينا سابقاً: $g(\alpha) = 0$ ، إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{0}{(\alpha-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5 < \alpha < 2.7$

ومنه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.7$

ومنه: $2.25 < (\alpha - 1)^2 < 2.89$

ومنه: $\frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25}$

ومنه: $\frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{2.25}$

إذن: $2.07 < f(\alpha) < 2.66$

⑤ إنشاء (C_f) :

حساب $f(0)$:

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

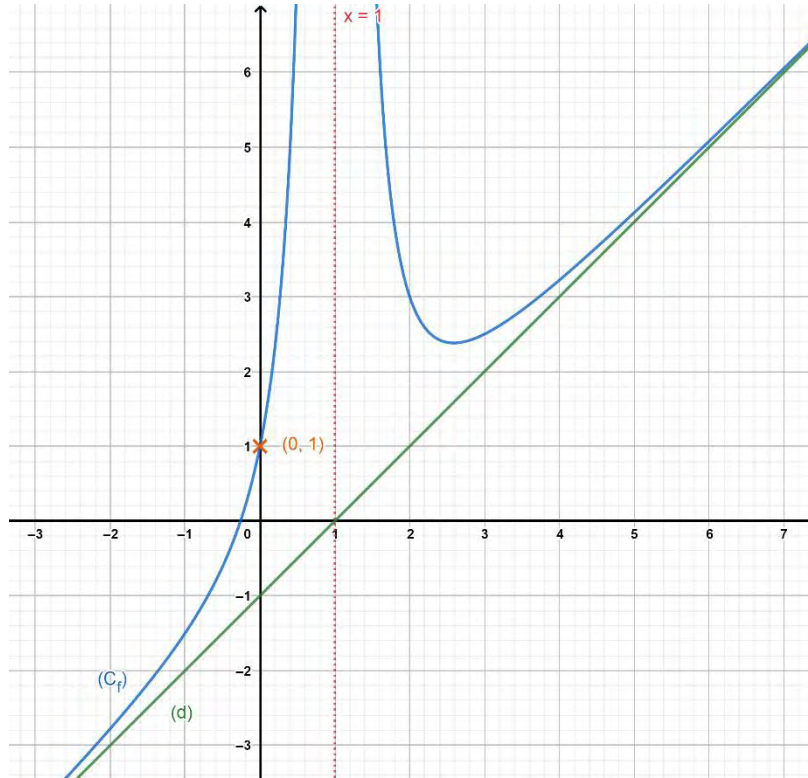
خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$

نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

① تبين أن h زوجية:

لدينا: $x \in D_h$ معناه: $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

معناه: $x < -1$ أو $-1 < x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $-x > 1$ أو $1 > -x > -1$ أو $-x < -1$

معناه: $(-x) \in]1; +\infty[$ أو $(-x) \in]-1; 1[$ أو $(-x) \in]-\infty; -1[$

معناه: $(-x) \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

ومنه: $(-x) \in D_h$

ولدينا: $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

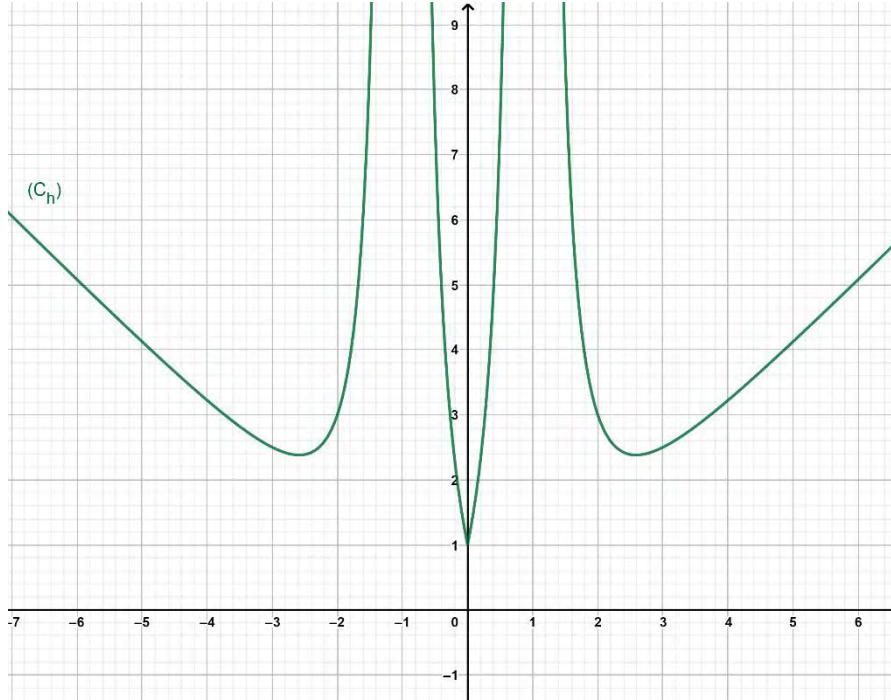
ومنه الدالة h زوجية.

② انشاء (C_h) :

لدينا: $f(|x|) = h(x)$

ومنه لما $x \geq 0$ ، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$ ، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب (yy')



③ المناقشة البيانية:

أولاً: $f(x) = m$

لما $m < 1$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما $m = 1$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما $1 < m < f(\alpha)$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب
لما $m = f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين موجبين
لما $m > f(\alpha)$	المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة

ثانياً: $f(x) = x + m$

لما $m \leq -1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما $-1 < m < 1$	المعادلة تقبل حلان متمايزان
لما $m = 1$	المعادلة تقبل حلان موجبان
لما $m > 1$	المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان



12

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

أولاً: حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - \sqrt{1+x^2}] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x + x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right) \right] = -\infty
 \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

ثانياً: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ثالثاً: دراسة $g'(x)$:لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط:لما: $x \geq 0$ لدينا:

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{1+x^2} - x &= \frac{(2\sqrt{1+x^2} - x)(2\sqrt{1+x^2} + x)}{2\sqrt{1+x^2} + x} \\
 &= \frac{4(1+x^2) - x^2}{2\sqrt{1+x^2} + x} \\
 &= \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{1+x^2} + x} > 0
 \end{aligned}$$

لما: $x \leq 0$ واضح أن $2\sqrt{1+x^2} - x > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ أي أن الدالة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$ ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α تعيين α :لدينا: $g(x) = 0$ أي:

$$\begin{aligned}
2x - \sqrt{1+x^2} &\Rightarrow 2x = \sqrt{1+x^2} \\
&\Rightarrow 4x^2 = 1+x^2 \\
&\Rightarrow 3x^2 = 1 \\
&\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مقبول}) \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

x_2 مرفوض لأن $x \geq 0$.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ومنه}$$

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1

أ / حساب نهايات الدالة f :

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-2x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} + 1 \right) \right] = +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - 1 \right) \right] = +\infty
\end{aligned}$$

ب / حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$.

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$+\infty$

② حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x]$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x + 3x] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} + 2x] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(2\sqrt{1+x^2} + 2x)(2\sqrt{1+x^2} - 2x)}{2\sqrt{1+x^2} - 2x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{2(\sqrt{1+x^2} - x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{-x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \right] = 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $-3x = y$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

③

أ/ تبين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - 2x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2\sqrt{1+x^2} - 2x)(2\sqrt{1+x^2} + 2x)}{2\sqrt{1+x^2} + 2x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{2(\sqrt{1+x^2} + x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2} + x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \right] = 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-3x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) + 3x &= 2\sqrt{1+x^2} + 2x \\
&= \frac{2}{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \geq 0
\end{aligned}$$

لأن $x < 0$

إشارة الفرق الموجبة ومنه المنحنى (C_f) فوق (d) .

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d') :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= 2\sqrt{1+x^2} - 2x \\
&= \frac{2}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \geq 0
\end{aligned}$$

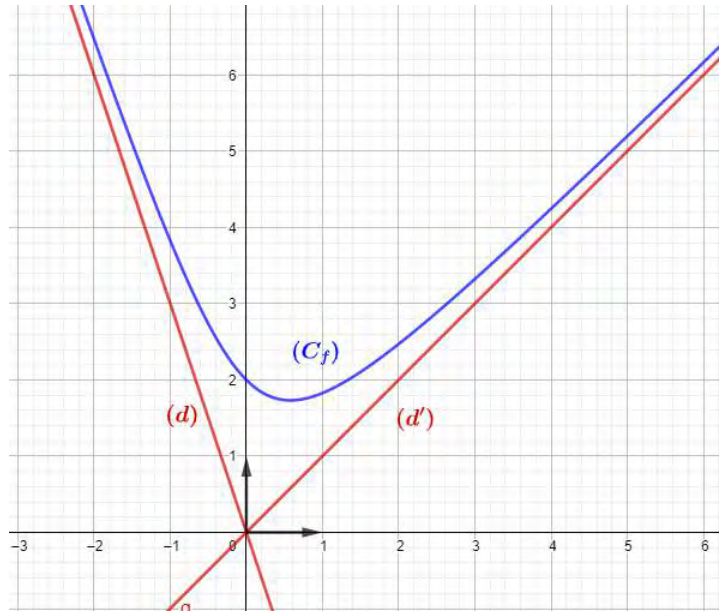
إشارة الفرق الموجبة ومنه المنحنى (C_f) فوق (d') .

④ إنشاء المنحنى (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

نرسم المستقيمات المقاربة المائلة: (d) و (d')

ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)





13

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g تشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty \\ \bullet g(-1) &= -2 \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2 + 12x + 7$$

لحل المعادلة $g'(x) = 0$ نستعمل المميز Δ لدينا: $\Delta = -24 < 0$ ، إذن المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ وعليه: $g'(x) > 0$

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	-2	$+\infty$

2 حساب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0,1)$ و $g(-0,2)$:

$$g(-0,2) \approx -0.018 ; g(-0,1) \approx 0.36$$

3 استنتاج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0.2; -0.1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$:لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-0.2; -0.1]$ ولدينا: $g(-0,2) \times g(-0,1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.2; -0.1[$ 4 استنتاج إشارة الدالة g على المجال $[-1, +\infty[$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -1$.ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

② تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b+c)x + b}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 4 \\ a + 2b + c = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

إذن:

$$f(x) = 2x - \frac{x}{(x+1)^2}$$

③

أ/ تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - \frac{x}{(x+1)^2} - 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x}{(x+1)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) :

$$f(x) - y_{(D)} = 0 \Rightarrow -\frac{x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذن:

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y_{(D)}$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in [-1; 0[$
- (C_f) يقطع (D) لما $x = 0$
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]0; +\infty[$

④

أ/ تبين أنه من أجل كل x من $]-1, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x^2 + 8x + 1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3 + 4x^2 + x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(6x^2 + 8x + 1)(x+1) - 2(2x^3 + 4x^2 + x)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{6x^3 + 8x^2 + x + 6x^2 + 8x + 1 - 4x^3 - 8x^2 - 2x}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(x+1)^3 \geq 0$ لما $x \in D_f$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

5 كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= \frac{55}{27}(x-2) + \frac{34}{9} \\ &= \frac{55}{27}x - \frac{8}{27} \end{aligned}$$

6 تبين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f) :

(C_f) يقبل نقطة انعطاف معناه أن f'' تنعدم وتغير إشارتها:

لدينا:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{g'(x)(x+1)^3 - 3(x+1)^2 g(x)}{(x+1)^6} \\ &= \frac{g'(x)(x+1) - 3g(x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(6x^2 + 12x + 7)(x+1) - 3(2x^3 + 6x^2 + 7x + 1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{6x^3 + 12x^2 + 7x + 6x^2 + 12x + 7 - 6x^3 - 18x^2 - 21x - 3}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-2x + 4}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^4 \geq 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط:

$$-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

المشتقة f'' تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة 2 وتغير إشارتها، فهي تقبل نقطة انعطاف.

7 تعيين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل:

فوصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة: $f(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2} = 0 \\ &\Rightarrow 2x^3 + 4x^2 + x = 0 \\ &\Rightarrow x(2x^2 + 4x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ 2x^2 + 4x + 1 = 0 \dots (*) \end{cases} \end{aligned}$$

لحل المعادلة (*) نستعمل المميز Δ :

لدينا: $\Delta = 16 - 4(2)(1) = 8$ إذن:

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \text{ أو } x = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ 0; \left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \right); \left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

(III)

1 تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) :

أولاً: نبين أن $(-2 - x) \in D_h$:

لدينا: $x \in D_h$

معناه: $x < -1$ أو $x > -1$

معناه: $(-x) < 1$ أو $(-x) > 1$

معناه: $x \in]-1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$

معناه: $(-2 - x) < -1$ أو $(-2 - x) > -1$

إذن: $(-2 - x) \in D_h$

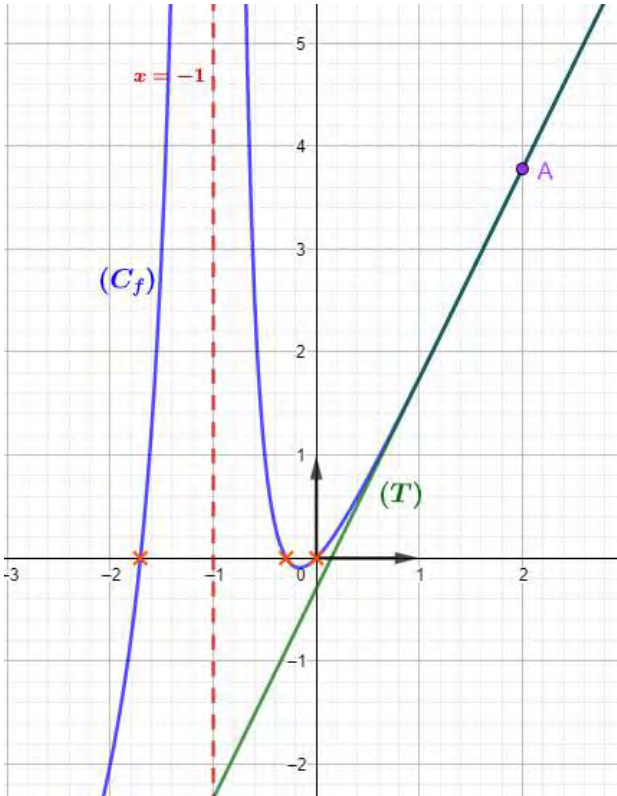
ثانياً: نبين أن: $h(2(-1) - x) = h(x)$ أي نبين أن $h(-2 - x) = h(x)$:

$$\begin{aligned} h(-2 - x) &= \begin{cases} f(-2 - x) & ; (-2 - x) > -1 \\ f(-(-2 - x) - 2) & ; (-2 - x) < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(-2 - x) & ; -x > 1 \\ f(2 + x - 2) & ; -x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(-2 - x) & ; x > -1 \\ f(x) & ; x > -1 \end{cases} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

إذن: $x = -1$ محور تناظر لـ (C_h)

2 التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$
- نعين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل (xx')
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



محور تناظر:

لإثبات أن المستقيم ذو

المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ

(C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

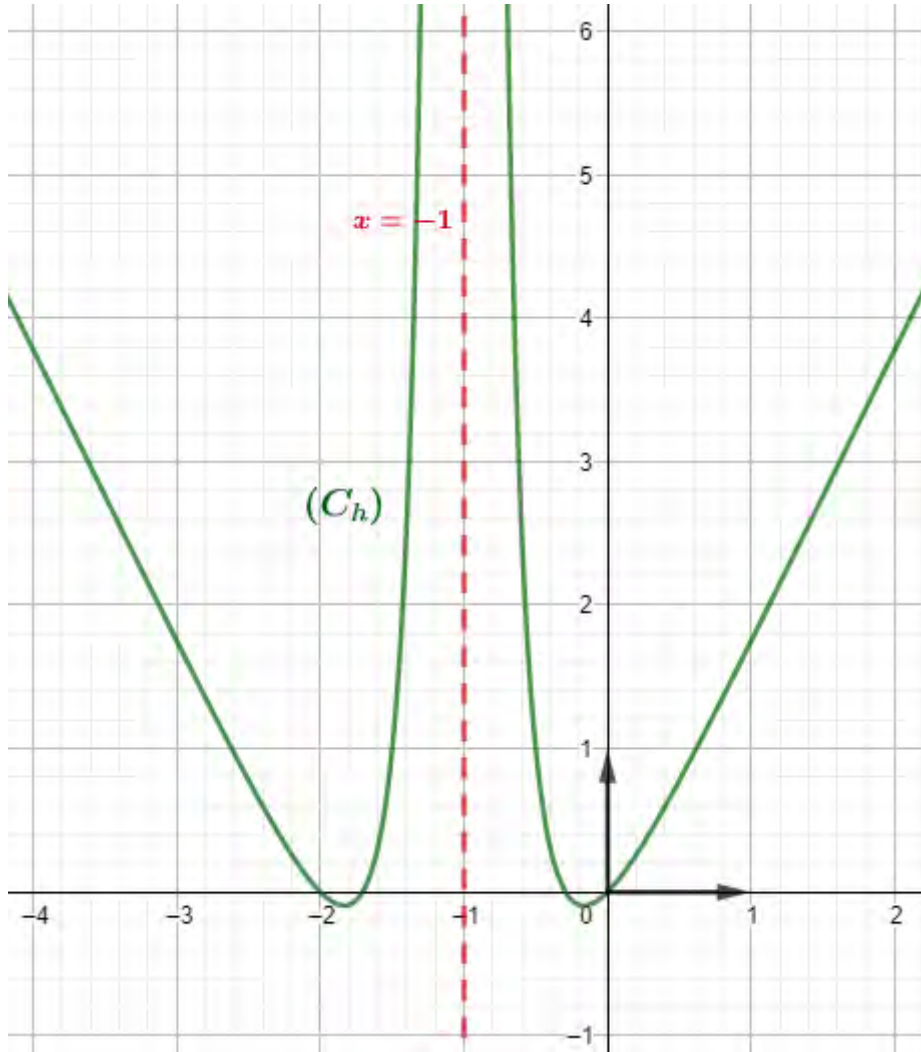
- رسم (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x > -1 \\ f(-2-x) & ; x < -1 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x > -1$

و (C_h) متناظر بالنسبة للمستقيم $x = -1$





14

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I) تعيين α و β :

لدينا: $f(0) = -1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2 + \alpha(0) + \beta}{2(0) - 2} = -1 \Rightarrow \frac{\beta}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

ولدينا: $f(0) = -1$ تقبل قيمة حدية لـ f معناها: $f'(0) = 0$

نعين أولاً $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x + \alpha)(2x - 2) - 2(x^2 + \alpha x + \beta)}{(2x - 2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 2\alpha x - 2\alpha - 2x^2 - 2\alpha x - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 2\alpha - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\frac{2(0)^2 - 4(0) - 2\alpha - 2\beta}{(2(0) - 2)^2} = 0 \Rightarrow -2\alpha - 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha = 2\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \quad \text{ومنه:}$$

(II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -2$:

① حساب: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$= \frac{1}{0^-}$$

$$= -\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

② حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \right) \\
&= +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

3

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax + b + \frac{c}{2x - 2} \\
&= \frac{(ax + b)(2x - 2) + c}{2x - 2} \\
&= \frac{2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b + c}{2x - 2} \\
&= \frac{2ax^2 + (2b - 2a)x - 2b + c}{2x - 2}
\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = -2 \\ -2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}} \quad \text{إذن:}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2x-2} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x - 2 = 0$ معناه: $x = 1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	$\parallel$	$+$

ومنه:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 1[$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]1; +\infty[$

4

أ/ تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x-2) - 2(x^2 - 2x + 2)}{(2x-2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x - 2)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 4x}{(2x - 2)^2} \\
&= \frac{2x(x - 2)}{(2x - 2)^2}
\end{aligned}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(2x - 2)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x - 2)$:
لدينا:

$$2x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -1$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$	$\nearrow +\infty$	

5

أ/ إيجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:
نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ) :

$$y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

ومنه: $\omega(1; 0)$

ب/ تبين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ معناه: $x < 1$ أو $x > 1$
معناه: $(-x) < -1$ أو $(-x) > -1$ معناه: $(2(1) - x) < 1$ أو $(2(1) - x) > 1$
معناه: $(2(1) - x) \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ معناه: $(2(1) - x) \in D_f$

• ولدينا:

$$\begin{aligned}
f(2(1) - x) + f(x) &= \frac{(2 - x)^2 - 2(2 - x) + 2}{2(2 - x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= 0 \frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x - 2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= 0 = 2(0)
\end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز

تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1; 0)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ يحقق:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega \Rightarrow f'(a)(1 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} - \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} a + \frac{a^2 - 2a + 2}{2a-2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2a(a-2) - 2a^2(a-2) + (a^2 - 2a + 2)(2a-2)}{(2a-2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 4a - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 4a + 4a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1$$

لدينا: $a \notin \mathbb{R} - \{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

6 رسم كل من (Δ) و (C_f) :

الرسم في الشكل المقابل.

7 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \frac{1}{2}x + m$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty; -1[$ للمعادلة حل موجب	لما $m = -1$ للمعادلة حل معدوم
لما $m \in]-1; -\frac{1}{2}[$ للمعادلة حل سالب	لما $m = -\frac{1}{2}$ للمعادلة لا تقبل حلولاً
لما $m \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$ للمعادلة حل موجب	

(III)

1 دراسة شفعية الدالة h :

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

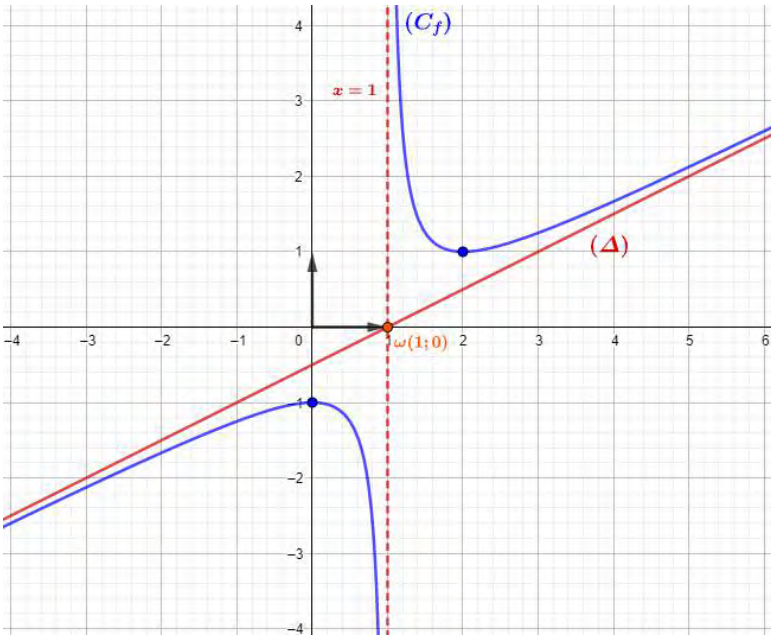
2 توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.





15

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 4x^2 + 7x - 4) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) \\
 &= +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + 7x - 4) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ وتشكيل جدول تغيراتها:

$$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$

لدينا: $\Delta = 64 - 4 \times 7 \times 6 = -104$ ، ومنه $\Delta < 0$ إذن المعادلة $g'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2

أ/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :لدينا: الدالة g مستمرة و متزايدة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(0.7) \times g(0.8) < 0$ لأن: $g(0.7) \approx -0.37$ و $g(0.8) \approx 0.06$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $0.7 < \alpha < 0.8$.ب/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2

أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{2} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{2(x+1)(2x^2-2x+1) + 2(1-3x)}{4(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(2x^2-2x+1) + 1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{2x^3 - 4x + 2}{2(2x^2-2x+1)} \\ &= \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) :

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}(x+1) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-3x}{4x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-3}{4x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

وأيضا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}(x+1) \right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ بجوار $\pm\infty$.

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

لدينا: $(2x^2 - 2x + 1 > 0)$

لأن $\Delta < 0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$\begin{aligned} 1 - 3x = 0 &\Rightarrow -3x = -1 \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
-----	-----------	---------------	-----------

$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	0	-
-----------------------	---	---	---

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; \frac{1}{3}[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = \frac{1}{3}$ أي في النقطة ذات الإحداثيات $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]\frac{1}{3}; +\infty[$

3

أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(3x^2 - 2)(2x^2 - 2x + 1) - (4x - 2)(x^3 - 2x + 1)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} \\
 &= \frac{6x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 4x^2 + 4x - 2 - 4x^4 + 8x^2 - 4x + 2x^3 - 4x + 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2} \\
 &= \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(2x^2 - 2x + 1)^2} \\
 &= \frac{x(2x^3 - 4x^2 + 7x - 4)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} \\
 &= \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

ب/ استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

بما أن $(2x^2 - 2x + 1)^2 > 0$ فالإشارة من $x \cdot g(x)$

ومنه:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	-	0	+	+
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	-0.1	$+\infty$

4 حساب $f(1)$:

$$f(1) = \frac{1 - 2 + 1}{2 - 2 + 1} = 0$$

- حل المعادلة $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} = 0 \\
 &\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \\
 &\Rightarrow (x - 1)(x^2 + ax + b) = 0
 \end{aligned}$$

نبحث أولاً عن a و b :

$$(x-1)(x^2+ax+b) = x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b$$

$$= x^3+x^2(a-1)+x(b-a)-b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b-a=-2 \\ -b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$ معناها: $x=1$

ولدينا: $x^2+x-1=0$ نحلها باستعمال المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5$$

ومنه:

$$x^2+x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.62 \\ \text{أو} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.62 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $s = \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

5 إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :

• نعين النقطة $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)

• نعين النقط ذات الفواصل

(C_f) تقاطع $1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ نقط

مع حامل محور الفواصل.

• نعين النقطة ذات الترتيبة 1 ، نقطة

تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب.

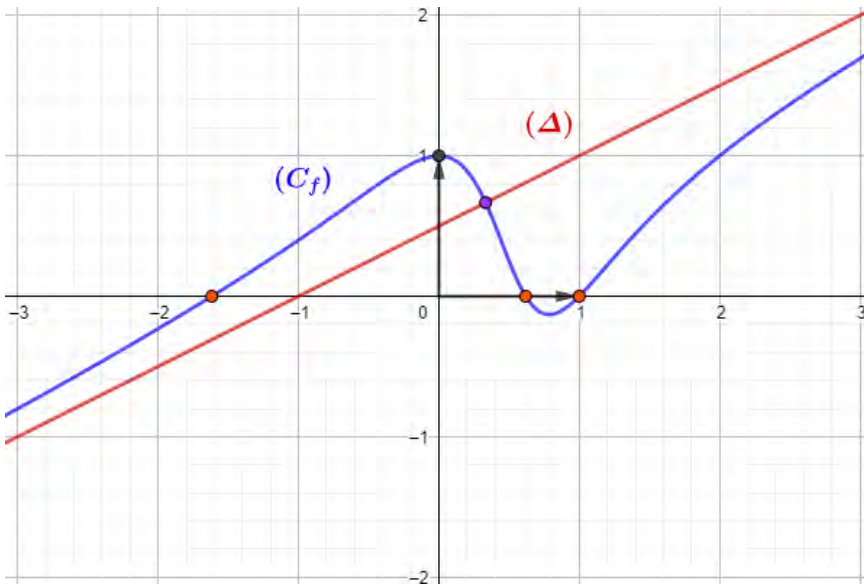
• نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)

ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

• باستعمال جدول تغيرات الدالة f

نكمل رسم (C_f) ، مع الاستعانة

بجدول الوضعية بين (C_f) و (Δ)



6

أ/ التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x + 1} - 2$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + x - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

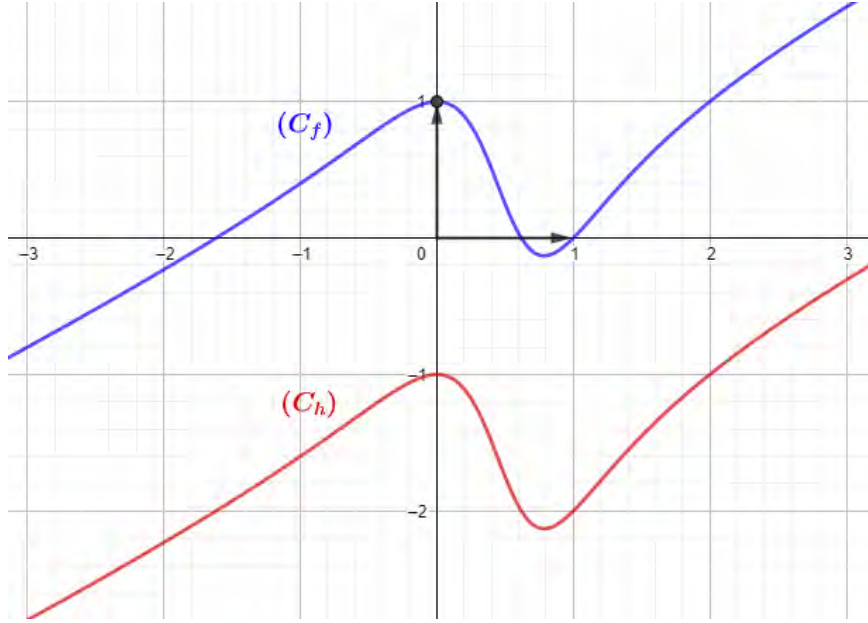
$$= h(x)$$

ب/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط:

$$h(x) = f(x) - 2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- إنشاء (C_h) :





16

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

① حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + x - 2}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \frac{-2}{0^+} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \frac{-2}{0^-} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

② دراسة تغيرات الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(3x^2 + 1)(2x) - 2(x^3 + x - 2)}{(2x)^2} \\ &= \frac{6x^3 + 2x - 2x^3 - 2x + 4}{4x^2} \\ &= \frac{4x^3 + 4}{4x^2} \\ &= \frac{x^3 + 1}{x^2}\end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:نلاحظ أن (-1) جذر لـ $(x^3 + 1)$ ومنه: $x^3 + 1 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

باستعمال طريقة هورنر أو المطابقة أو القسمة الاقليدية نجد:

	1	0	0	1
-1	0	-1	1	-1
	1	-1	1	0

إذن: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ نستعمل المميز Δ لحل المعادلة $(x^2 - x + 1)$:لدينا: $\Delta = -3 < 0$ ومنه: $f'(x) = 0$ معناه $x = -1$ ، إذن:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----------

$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

3

أ/ تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{2x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + b + \frac{c}{2x} \\ &= \frac{(ax^2 + b)(2x) + c}{2x} \\ &= \frac{2ax^3 + 2bx + c}{2x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \quad \text{إذن:} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \quad \text{بالمطابق نجد:}$$

ب/ استنتاج أن (C_f) يقبل منحنى (C) مقارب بجوار $\pm\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{1}{x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المنحنى (C) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

4

أ/ تبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x^3 + x - 2}{2x} = 0 \\ &\Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

نلاحظ أن (1) جذر لـ $(x^3 + x - 2)$ ومنه: $x^3 + x - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

باستعمال طريقة هورنر أو المطابقة أو القسمة الاقليدية نجد:

	1	0	1	-2
1	0	1	1	2
	1	1	2	0

إذن: $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$

نستعمل المميز Δ لحل المعادلة $(x^2 + x + 2)$:

لدينا: $\Delta = -7 < 0$

ومنه: $f(x) = 0$ معناه $x = 1$ ، إذن: (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $A(1; 0)$

ب/ كتابة معادلة للمماس (T) عند النقطة A :

$$\begin{aligned} y_{(T)} &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= 2(x - 1) \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

ج / تبين أن المماس (T) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة أخرى B :

نعين نقط تقاطع (T) مع (C_f) بحل المعادلة $f(x) = y_{(T)}$

$$f(x) = y_{(T)} \Rightarrow \frac{x^3 + x - 2}{2x} = 2x - 2$$

$$\Rightarrow x^3 + x - 2 = 4x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

وضعنا (1) جذر للمعادلة $f(x) = y_{(T)}$ لأننا نعلم سابقاً أن النقطة A ذات الفاصلة 1 يكون عندها المماس (T).

ومنه باستعمال جدول هورنر نجد:

	1	-4	5	-2
1	0	1	-3	2
	1	-3	2	0

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2) \quad \text{إذن:}$$

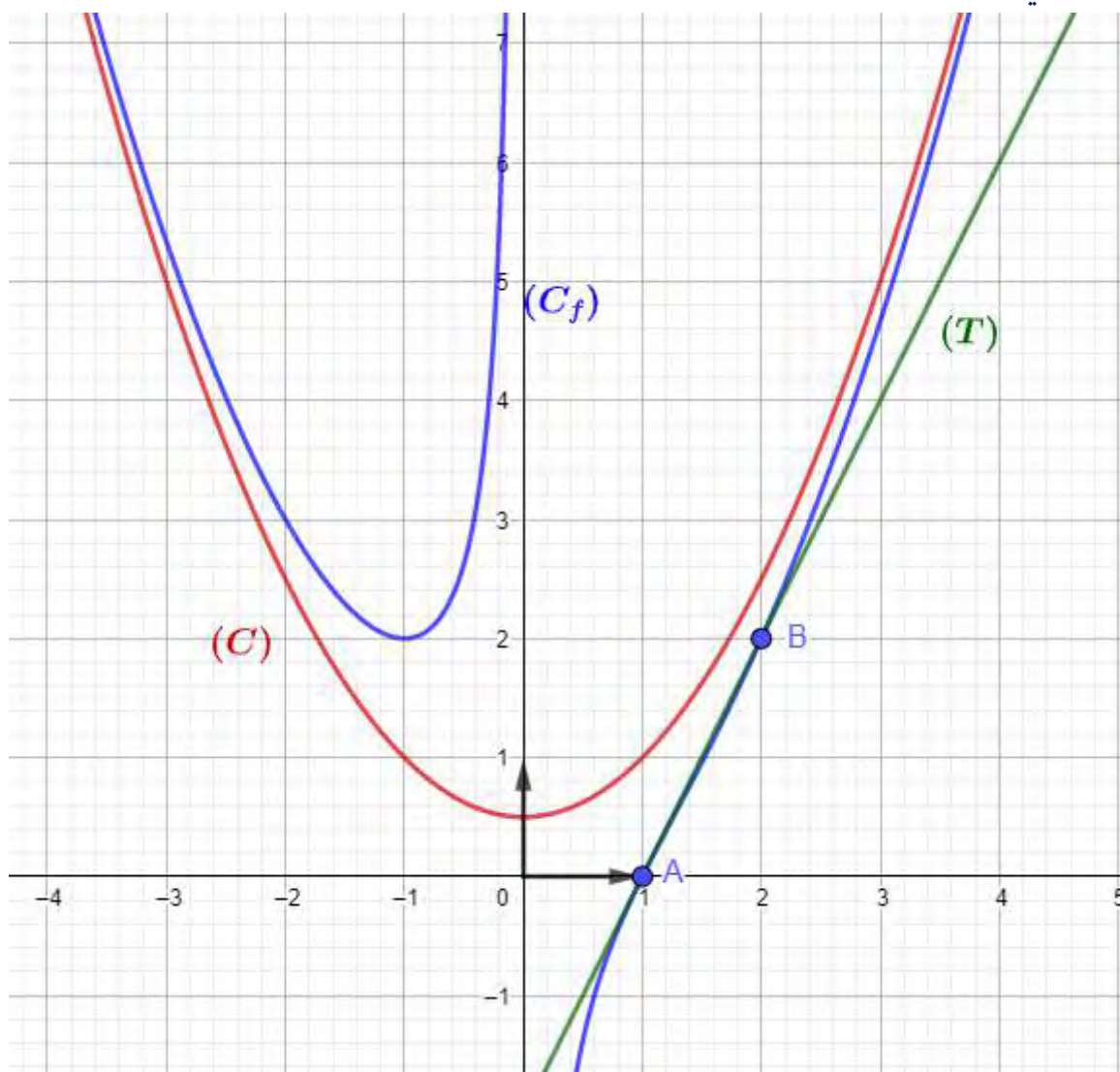
نستعمل المميز Δ لحل المعادلة $(x^2 - 3x + 2)$:

لدينا: $\Delta = 1$ ومنه: $x_1 = 2$ و $x_2 = 1$

إذن: $f(x) = y_{(T)}$ معناه $x = 1$ أو $x = 2$

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع (T) في نقطتين A(1; 0) و B(2; 2)

5 التمثيل البياني:



6 المناقشة البيانية:

حلل المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$ وبما أن ميل المستقيمات معدوم فالمناقشة أفقية، والحلول هي:

- لما $m < 2$ للمعادلة حل موجب
- لما $m = 2$ المعادلة تقبل حل موجب وحل مضاعف سالب
- لما $m > 2$ المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب

(II)

1 دراسة شفعية الدالة h :

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{-(-x)^2|-x| - |-x| - 2}{2(-x)} \\ &= -\frac{-(x)^2|x| - |x| - 2}{2(x)} \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة h فردية

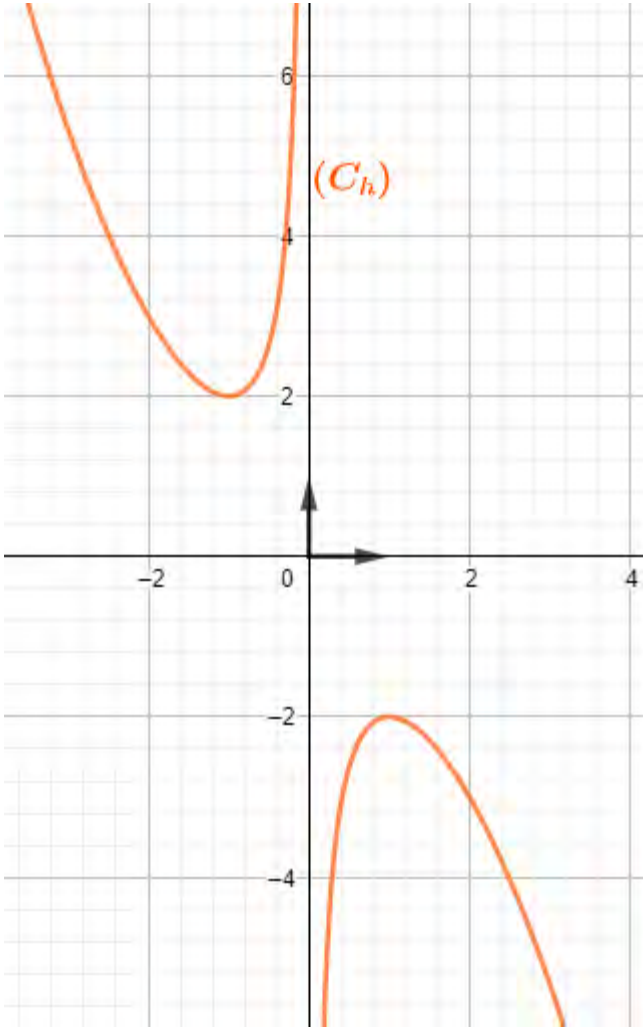
2 إنشاء (C_f) مع شرح كيفية إنشائه:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x^2|x| - |x| - 2}{2x} \\ &= \begin{cases} \frac{-x^2(x) - (x) - 2}{2x} & ; x > 0 \\ \frac{-x^2(-x) - (-x) - 2}{2x} & ; x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{-x^3 - x - 2}{2x} & ; x > 0 \\ \frac{x^3 + x - 2}{2x} & ; x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -f(x) & ; x > 0 \\ \frac{x^3 + x - 2}{2x} & ; x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$ لدينا: $h(x) = -f(x)$

أي: لما $x < 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $] -\infty; 0[$ وبما أن الدالة h فردية فهي متناظرة بالنسبة للمبدأ.





17

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1

أ/ حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{4}{\underbrace{x+1}_0} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow -1}^- \left(-x + \frac{4}{\underbrace{x+1}_0} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1}^+ f(x) = \lim_{x \rightarrow -1}^+ \left(-x + \frac{4}{x+1} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\bullet f(0) = 4$$

ب/ جدول تغيرات الدالة بقراءة بيانية:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	4

2

أ/ حساب نهاية g عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{\underbrace{x+1}_0} \right)$$

$$= +\infty$$

ب/ التحقق من أن (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$ ج/ دراسة تغيرات الدالة g :

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

لدينا: $(x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x^2 + 2x - 2)$
 $x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

ومنه:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \text{أو} \\ x = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \text{ (مرفوض)} \end{cases}$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	4	3	$+\infty$

(II)

1

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{k(h) - k(0)}{h} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{k(h) - k(0)}{h} \right)$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{k(h) - k(0)}{h} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{|h| + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h^2 + h + 4 - 4h - 4}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h^2 - 3h}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h - 3}{1} \right) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{k(h) - k(0)}{h} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{|h| + \frac{4}{h+1} - 4}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-h^2 - h + 4 - 4h - 4}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-h^2 - 5h}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-h - 5) \\ &= -5 \end{aligned}$$

- نستنتج أن الدالة k لا تقبل الاشتقاق عند 0

المنحنى (C_k) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معاملا توجيههما هما -3 و -5

② كتابة معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند الناقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

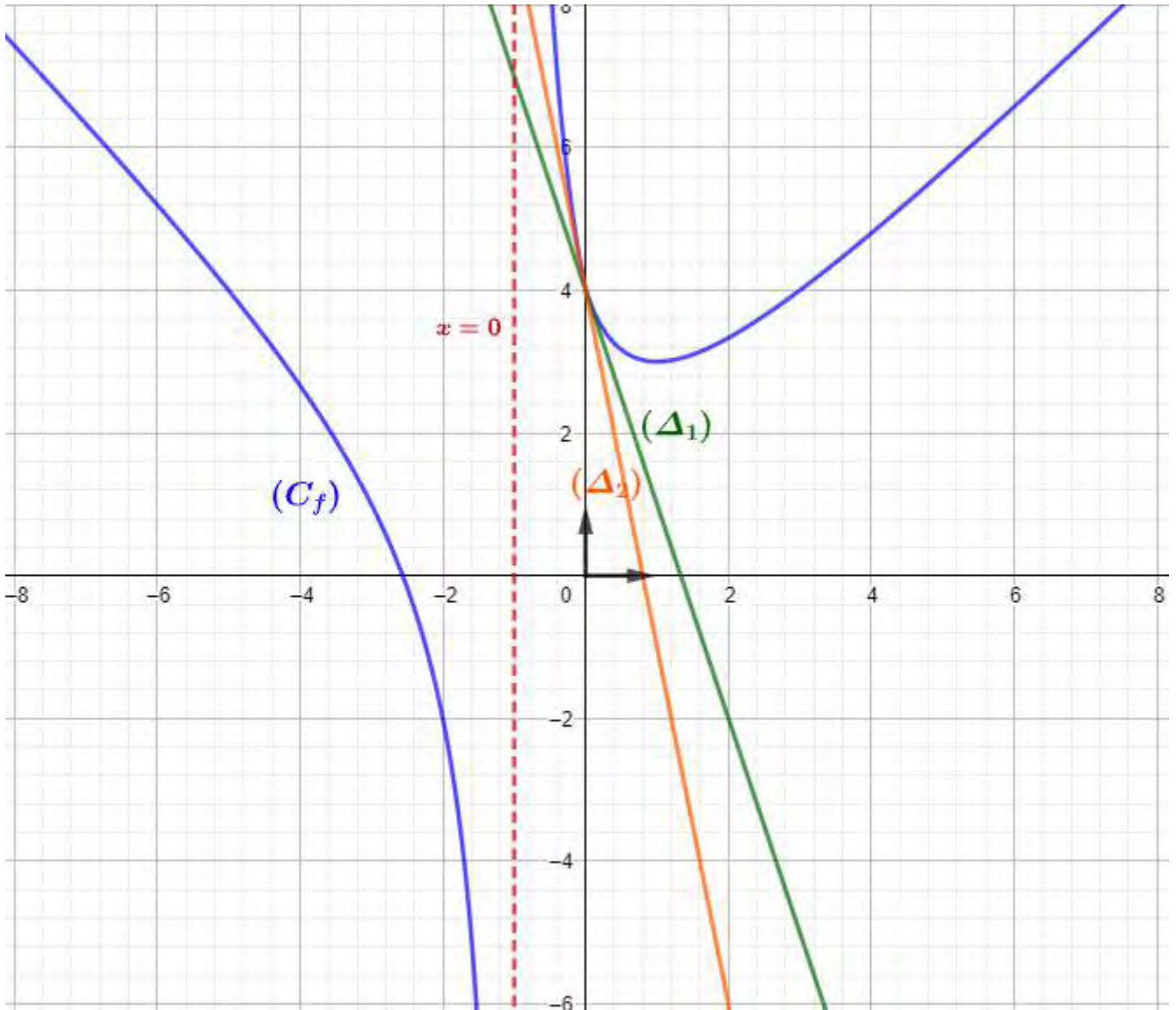
لدينا:

$$\begin{aligned} y_{(\Delta_1)} &= -3x + k(0) \\ &= -3x + 4 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} y_{(\Delta_2)} &= -5x + k(0) \\ &= -5x + 4 \end{aligned}$$

③ رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) :





18

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

1

أ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-2	$+\infty$

- تحديد $g(0)$:

$$g(0) = -1$$

- إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

ب/ تعليل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ يحقق: $g(\alpha) = 0$:لدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة على $]-1; +\infty[$

$$\text{ولدينا: } g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2

أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

ب/ تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) &= f'(\alpha) \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha + 1)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

(Γ) يقبل مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α ج/ حساب: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} \right) \\ &= \frac{-1 + 3 - 3 + 2}{0^+} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$

- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} - (x+1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2 - (x^2 + 2x + 1)(x+1)}{(x+1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2 - x^3 - 2x^2 - x - x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(x+1)^2} \right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $x = x + 1$

د / تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

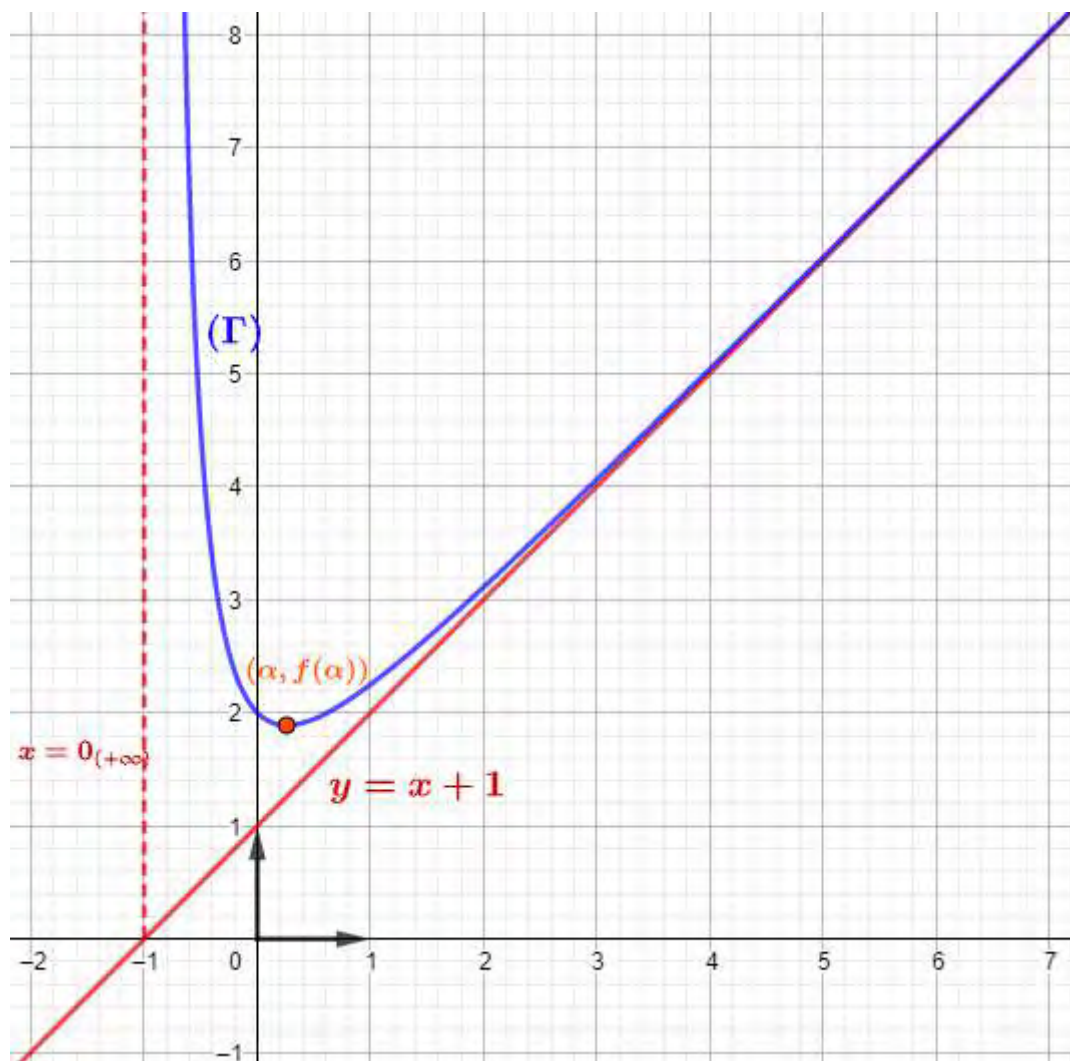
③ نأخذ $\alpha \approx 0.26$

أ / تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} :

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= \frac{(0.26)^3 + 3(0.26)^2 + 3(0.26) + 2}{(0.26 + 1)^2} \\ &= 1.88988158226 \\ &\approx 1.89\end{aligned}$$

ب / رسم المنحنى (Γ) :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x + 1$
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نكمل رسم (Γ)





19

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 6x + 3 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 \end{aligned}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ② حساب $g(-2)$:

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- حل المعادلة $g(x) = 0$:لدينا (-2) جذر لـ $g(x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - (-2))(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b \\ &= x^3 + (a + 2)x^2 + (b + 2a)x + 2b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ b + 2a = 3 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (x + 2)(x^2 + x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لحل المعادلة $(x^2 + x + 1 = 0)$ نستعمل المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

ومنه $(x^2 + x + 1) > 0$ في $\mathbb{R}$

إذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2}$$

① تبين أن: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x^2 + 14x + 8)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2)}{(x + 1)^4} \\
&= \frac{(6x^2 + 14x + 8)(x + 1) - 2(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2)}{(x + 1)^3} \\
&= \frac{6x^3 + 14x^2 + 8x + 6x^2 + 14x + 8 - 4x^3 - 14x^2 - 16x - 4}{(x + 1)^3} \\
&= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{(x + 1)^3} \\
&= \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x + 1)^3} \\
&= \frac{2g(x)}{(x + 1)^3}
\end{aligned}$$

② دراسة تغيرات الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} \right) \\
&= \frac{-1}{(0^-)^2} = -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \frac{-1}{(0^+)^2} = -\infty
\end{aligned}$$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
(x + 1)^3 = 0 &\Rightarrow (x + 1)^2(x + 1) = 0 \\
&\Rightarrow x + 1 = 0 \\
&\Rightarrow x = -1
\end{aligned}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ كالآتي:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$2g(x)$	-	0	+	+
$(x + 1)^3$	-		-	+
$f'(x)$	+	0	-	+

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$

③ تبين أن: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b)x + b + c}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 7 \\ a + 2b = 8 \\ b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

④

أ/ تبين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad \text{لدينا:}$$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 3)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} - (2x + 3) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-1}{(x+1)^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = 2x + 3$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ ومنه $(f(x) - y_{(\Delta)}) < 0$

إذن (C_f) تحت (Δ) لما $x \in D_f$.

⑤ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $[-0.35; -0.34]$ $\alpha \in$

لدينا الدالة f مستمرة ومنتزعة على المجال $[-1; +\infty[$

ولدينا: $f(-0.35) \times f(-0.34) < 0$ لأن: $f(-0.35) \approx -0.07$ و $f(-0.34) \approx 0.02$

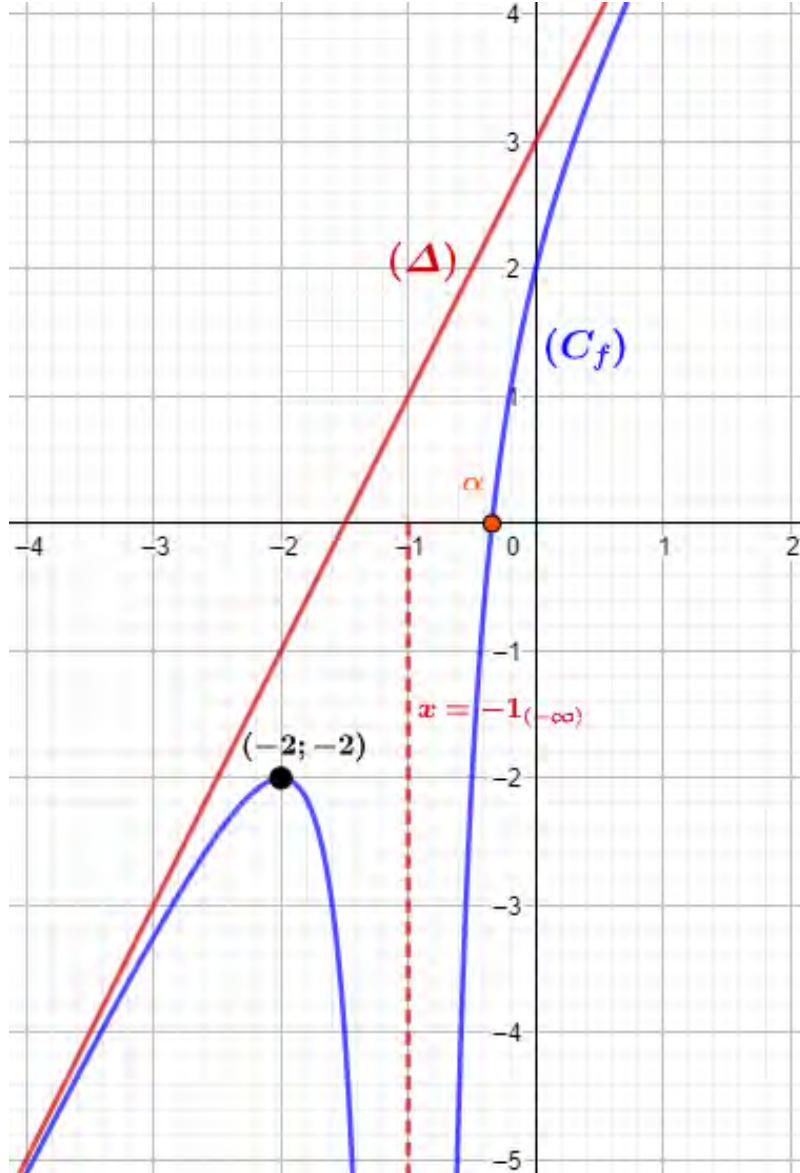
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $-0.35 < \alpha < -0.34$

⑥ رسم المنحنى (C_f) :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $-\infty$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = 2x + 3$.
- نعين النقطة α نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(-2; -2)$ لتسهيل الرسم
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة (Δ) .



7 المناقشة البيانية

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات المائلة ذات المعادلة $y_m = 2x + m$ ، وهي:

لما	$m < -2$	المعادلة تقبل ثلاث حلول سالبة
لما	$m = -2$	المعادلة تقبل حل سالب وجذر مضاعف سالب
لما	$-2 < m < 2$	المعادلة تقبل حل سالب
لما	$m = 2$	المعادلة تقبل حل معدوم
لما	$m > 2$	المعادلة تقبل حل موجب

(III)

1 تبين أن الدالة h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

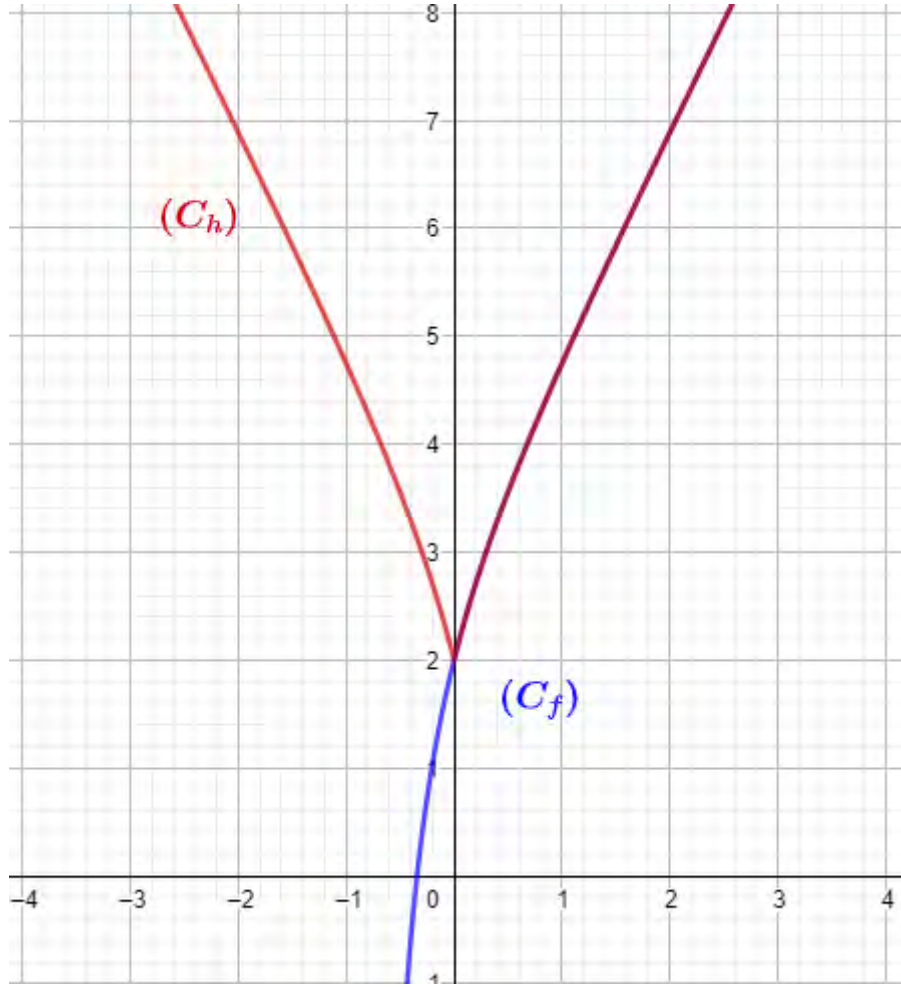
$h(-x) = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية.

2 رسم المنحنى (C_h) :

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $x \in \mathbb{R}_+$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور الترتيب.





20

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x + 16) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x + 16) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 3 \\ &= 3(x^2 + 1) \end{aligned}$$

لدينا: $(x^2 + 1) > 0$ ومنه $g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$ - جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.5 < \alpha < -2$:لدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(-2) \times g(-2.5) < 0$ لأن: $g(-2) \approx 2$ و $g(-2.5) \approx -7.13$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.5 < \alpha < -2$ 3 استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 - 8)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 16x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 3x + 16)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

② دراسة تغيرات الدالة f :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

لدينا: $(x^2 + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة x في إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+
x	-	+	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-8	$+\infty$

③ تبين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha^3 = -(3\alpha + 16) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha\alpha^2 + 3\alpha + 16 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(3\alpha + 16)}{\alpha} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^3 - 8}{\alpha^2 + 1} \\ &= \frac{(-3\alpha - 16 - 8)}{\left(\frac{-(3\alpha + 16)}{\alpha} + 1\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-3\alpha - 16 + \alpha}{\alpha}\right)} \\
&= \frac{(-3\alpha - 24)}{\left(\frac{-2\alpha - 16}{\alpha}\right)} \\
&= \frac{3\alpha(\alpha + 8)}{2(\alpha + 8)} \\
&= \frac{3}{2}\alpha
\end{aligned}$$

- تعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $-2.5 < \alpha < -2$

ومنه: $-7.5 < 3\alpha < -6$

ومنه: $-3.75 < \frac{3}{2}\alpha < -3$

إذن: $-3.75 < f(\alpha) < -3$

4

أ/ تبين أن (Δ) المستقيم المنصف الأول مقارب مائل لـ (C_f) :

معادلة المستقيم المنصف الأول هي: $y = x$

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y_{(\Delta)}] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 8 - x^3 - x}{x^2 + 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-8 - x}{x^2 + 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{x}{x^2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{1}{x} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

$$\begin{aligned}
f(x) - y_{(\Delta)} &= \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} - x \\
&= \frac{-8 - x}{x^2 + 1} \\
&= \frac{-(x + 8)}{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

لدينا: $(x^2 + 1) > 0$ ومنه:

$$-(x + 8) = 0 \Rightarrow x = -8$$

ومنه:

x	$-\infty$	-8	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; -8[$

- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = -8$ أي في النقطة ذات الفاصلة $(-8; -8)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-8; +\infty[$

5

أ/ إيجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

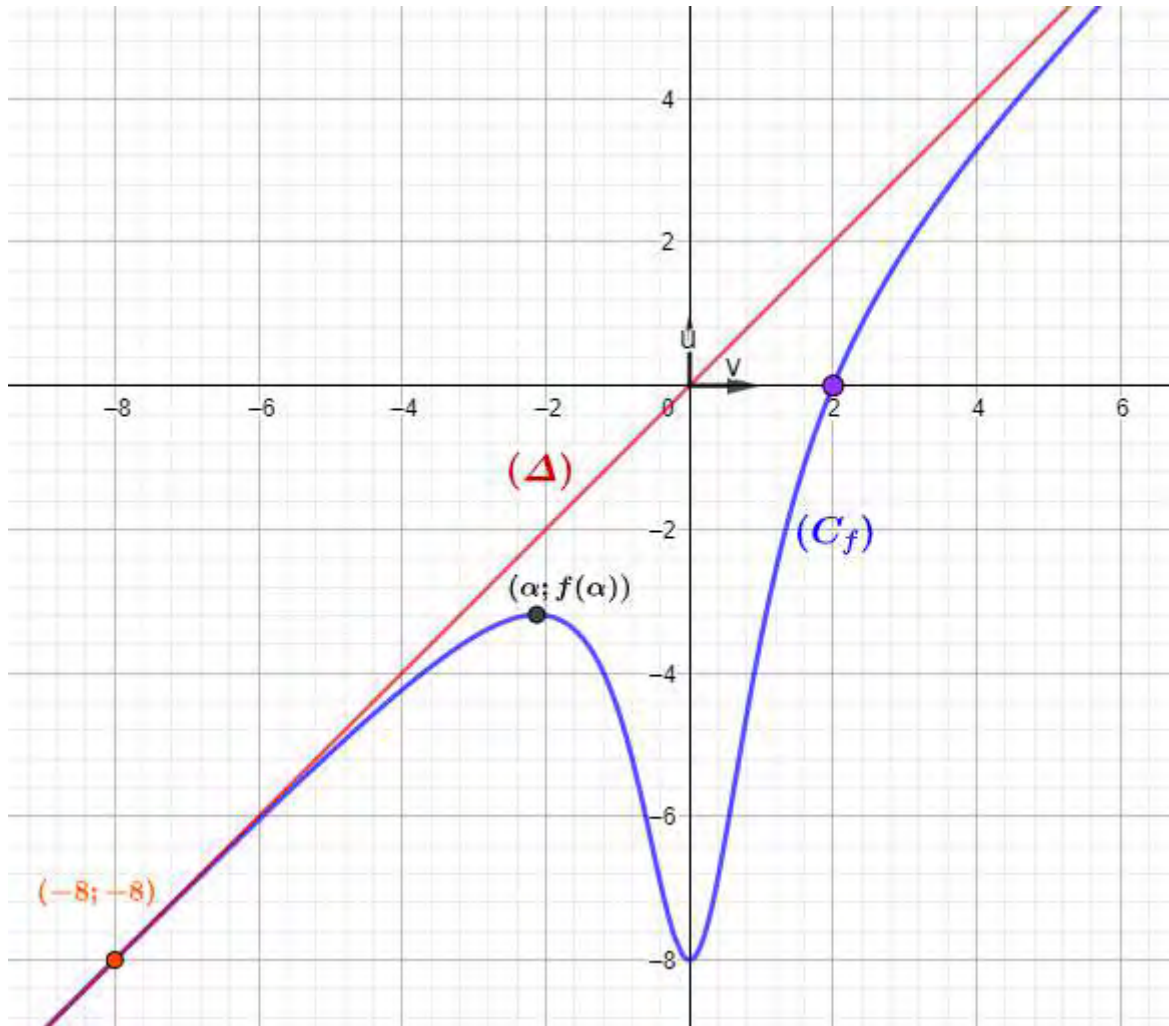
حلل المعادلة $f(x) = 0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} = 0 \\ &\Rightarrow x^3 - 8 = 0 \\ &\Rightarrow x^3 = 8 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{2\}$

ب/ التمثيل البياني:

- نرسم **المستقيم المقارب المائل** (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = x$.
- نعين **النقطة ذات الاحداثيات** $(-8; -8)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) .
- نعين **النقطة ذات الفاصلة** -2 نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .



ج/ المناقشة البيانية:

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0 \Rightarrow x^3 - 8 - m(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 = m(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1} = m$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة $y_m = m$ ، وهي:

لما	$m < -8$	المعادلة تقبل حل سالب
لما	$m = -8$	المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف معدوم $x = -8$ ، وحل سالب
لما	$-8 < m < -2$	المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبين
لما	$m = -2$	المعادلة تقبل حلين: حل موجب وحل مضاعف سالب
لما	$m > -2$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

① دراسة شفعية الدالة h :

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{|-x|(-x)^2 - 8}{(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

② كتابة h دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1} \\ &= \begin{cases} \frac{xx^2 - 8}{x^2 + 1} & ; x \geq 0 \\ \frac{-x(-x)^2 - 8}{(-x)^2 + 1} & ; x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

③ استنتاج رسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقاً من المنحنى (C_f) :

لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_h) يطابق (C_f) لما $x > 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور الترتيب.



21

حل المسألة رقم:

مشاهدة المسألة

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 3x - 5) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \\
 &= +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\
 &= 3(x^2 - 2x + 1) \\
 &= 3(x - 1)^2
 \end{aligned}$$

لدينا: $(x - 1)^2 > 0$ ومنه: $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ - تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تملك حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]2; 3[$:لدينا: • الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على $\mathbb{R}$

$$g(2) \approx -3 \quad \text{و} \quad g(3) \approx 4 \quad \text{لأن:} \quad g(2) \times g(3) < 0$$

3 تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $\frac{n}{10} < \alpha < \frac{n+1}{10}$:نقسم المجال $]2; 3[$ على 10 ونحسب صور الدالة:

x	...	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3	...
$g(x)$	...	-3	-2.6	-2.2	-2.8	-1.2	-1.6	0.09	0.9	1.8	2.8	4	...
n	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	...

من الجدول نجد أن $n = 25$

$$\frac{25}{10} < \alpha < \frac{25+1}{10} \quad \text{ومنه:}$$

$$2.5 < \alpha < 2.6 \quad \text{إذن:}$$

4 استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

① حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \\ &= +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \frac{2}{(0^+)^2} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{2}{(0^-)^2} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \end{aligned}$$

② تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x نجد $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 6x + 3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 6x + 3)(x-1) - 2(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 3x^2 + 6x - 3 - 2x^3 + 6x^2 - 6x - 2}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

③ دراسة تغيرات الدالة f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g(x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)(x-1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $(x-1)^2$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في $(x-1)$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$x-1$	-		+	+
$g(x)$	-		0	+
$f'(x)$	+		0	+

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

④ تبين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0 \\ \Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 - 3\alpha + 5$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2} \\ = \frac{3\alpha^2 - 3\alpha + 5 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2} \\ = \frac{6}{(\alpha - 1)^2}$$

- تعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5 < \alpha < 2.6$

ومنه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.6$

ومنه: $(1.5)^2 < (\alpha - 1)^2 < (1.6)^2$

ومنه: $\frac{1}{(1.6)^2} < \frac{1}{(\alpha - 1)^2} < \frac{1}{(1.5)^2}$

ومنه: $\frac{6}{(1.6)^2} < \frac{6}{(\alpha - 1)^2} < \frac{6}{(1.5)^2}$

ومنه: $2.34 < f(\alpha) < 2.67$

5

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2} \\ = \frac{(ax + b)(x - 1)^2 + c}{(x - 1)^2} \\ = \frac{(ax + b)(x^2 - 2x + 1) + c}{(x - 1)^2} \\ = \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + c}{(x - 1)^2} \\ = \frac{ax^3 + (b - 2a)x^2 + (a - 2b)x + b + c}{(x - 1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x - 1)^2}$$

ب/ تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{(x - 1)^2} - (x - 1) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \right]$$

$$= 0$$

ومنه: ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = x - 1$
 ج/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :
 لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

بما أن: $(x-1)^2 > 0$ ، فإن: $(f(x) - y_{(\Delta)}) > 0$

ومنه: (C_f) يقع فوق (Δ) على D_f .

⑥ تعيين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

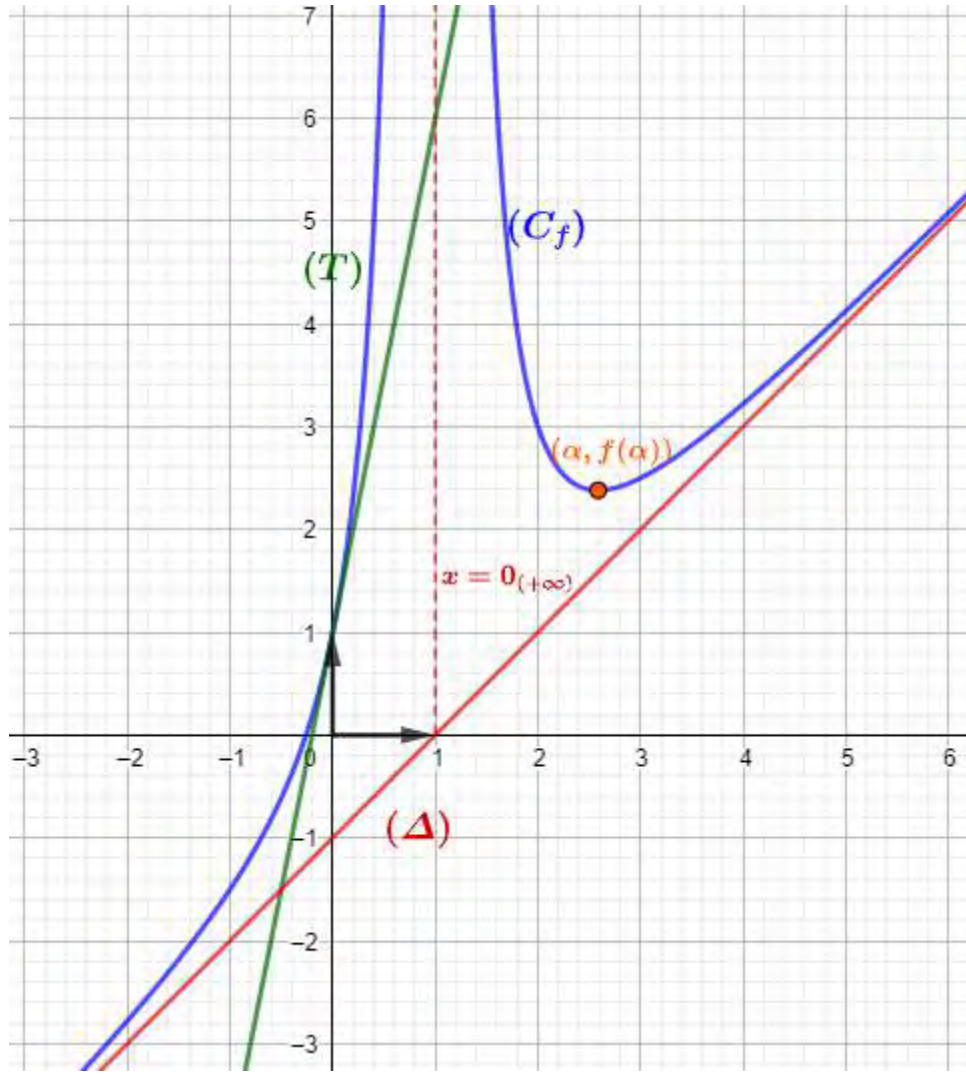
$$y_{(T)} = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$= \frac{g(0)}{(-1)^3}x + f(0)$$

$$= 5x + 1$$

⑦ التمثيل البياني:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$.
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) ذو المعادلة $y_{(\Delta)} = x - 1$.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $y_{(T)} = 5x + 1$.
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$.
- باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .



8 المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m &= 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - mx^2 + 3x + 2mx + 1 + m = 0 \\
 &\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = mx^2 - 2mx + m \\
 &\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x^2 - 2x + 1) \\
 &\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x-1)^2 \\
 &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = m \\
 &\Rightarrow f(x) = m
 \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة: $y_m = m$ وهي:

لما	$m < 1$	المعادلة تقبل حل سالب
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حل معدوم
لما	$1 < m < f(\alpha)$	المعادلة تقبل حل موجب
لما	$m = f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف موجب والآخر موجب
لما	$m > f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين موجبين

**22****حل المسألة رقم:**

مشاهدة المسألة

1 كتابة عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x + 2| + \frac{1}{x + 1}$$

$$= \begin{cases} x + 2 + \frac{1}{x + 1} & ; x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[\\ -x - 2 + \frac{1}{x + 1} & ; x \in]-\infty; -2] \end{cases}$$

2 دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند (-2) :لدينا: $f(-2) = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x - 2 + \frac{1}{x + 1} - (-1)}{x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x - 1 + \frac{1}{x + 1}}{x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x^2 - x - x - 1 + 1}{(x + 2)(x + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x^2 - 2x}{(x + 2)(x + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x}{x + 1} \right) \\ &= \frac{2}{-1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

لدينا: $(-2) \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليسار

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x + 2 + \frac{1}{x + 1} - (-1)}{x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x + 3 + \frac{1}{x + 1} + 1}{x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + x + 3x + 3 + 1}{(x + 2)(x + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 2)(x + 1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+2}{x+1} \right) \\
&= \frac{0}{-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

لدينا: $0 \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليمين وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right) \neq \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)} \right)$$

ومنه الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند -2

- التفسير الهندسي للنتيجة:

المنحنى (C_f) يقبل نصفين مماسين عند النقطة ذات الفاصلة -2 معاملي توجيههما 0 و -2

③

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{0^+} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{0^-} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = -1$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x+1} \right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - 2 + \frac{1}{x+1} \right) \\
&= -(-\infty) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

④ دراسة تغيرات الدالة f :

- دراسة $f'(x)$:

• لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ و $(x+2) \geq 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة x .

إذن: $f'(x) > 0$ لما: $x \in]0; +\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; 0[$

• لما: $x \in]-\infty; -2]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x - 2 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة البسط عكس إشارة $(x^2 + 2x + 3)$:

لدينا: $\Delta = 4 - 4(1)(3) = -8 < 0$

ومنه: $(x^2 + 2x + 3) > 0$

إذن: $f'(x) < 0$ لما: $x \in]-\infty; -2]$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

5

أ/ برهان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2) :

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x+2 + \frac{1}{x+1} - x-2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_1) بجوار $+\infty$ معادلته: $y_{(\Delta_1)} = x+2$

- لما: $x \in]-\infty; -2]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-2)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x-2 + \frac{1}{x+1} + x+2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_2) بجوار $-\infty$ معادلته: $y_{(\Delta_2)} = -x-2$

ب/ دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_1) :

- لما: $x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_{(\Delta_1)}$:

$$f(x) - y_{(\Delta_1)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

ومنه:

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta_1)}$	-	+	

- إذن:

• (C_f) تحت (Δ_1) لما: $x \in [-2; -1[$

• (C_f) فوق (Δ_1) لما: $x \in]-1; +\infty[$

- دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_2) :

- لما: $x \in]-\infty; -2]$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_{(\Delta_2)}$:

$$f(x) - y_{(\Delta_2)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $(x+1) < 0$ على المجال $]-\infty; -2]$

ومنه: $(f(x) - y_{(\Delta_2)}) < 0$

• (C_f) تحت (Δ_1) لما: $x \in]-\infty; -2]$

⑥ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; -2]$ حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$:

لدينا: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2]$

ولدينا: $f(-2.6) \times f(-2.7) < 0$ لأن $f(-2.6) \approx -0.02$ و $f(-2.7) \approx 0.11$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$.

⑦ التمثيل البياني:

• نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$.

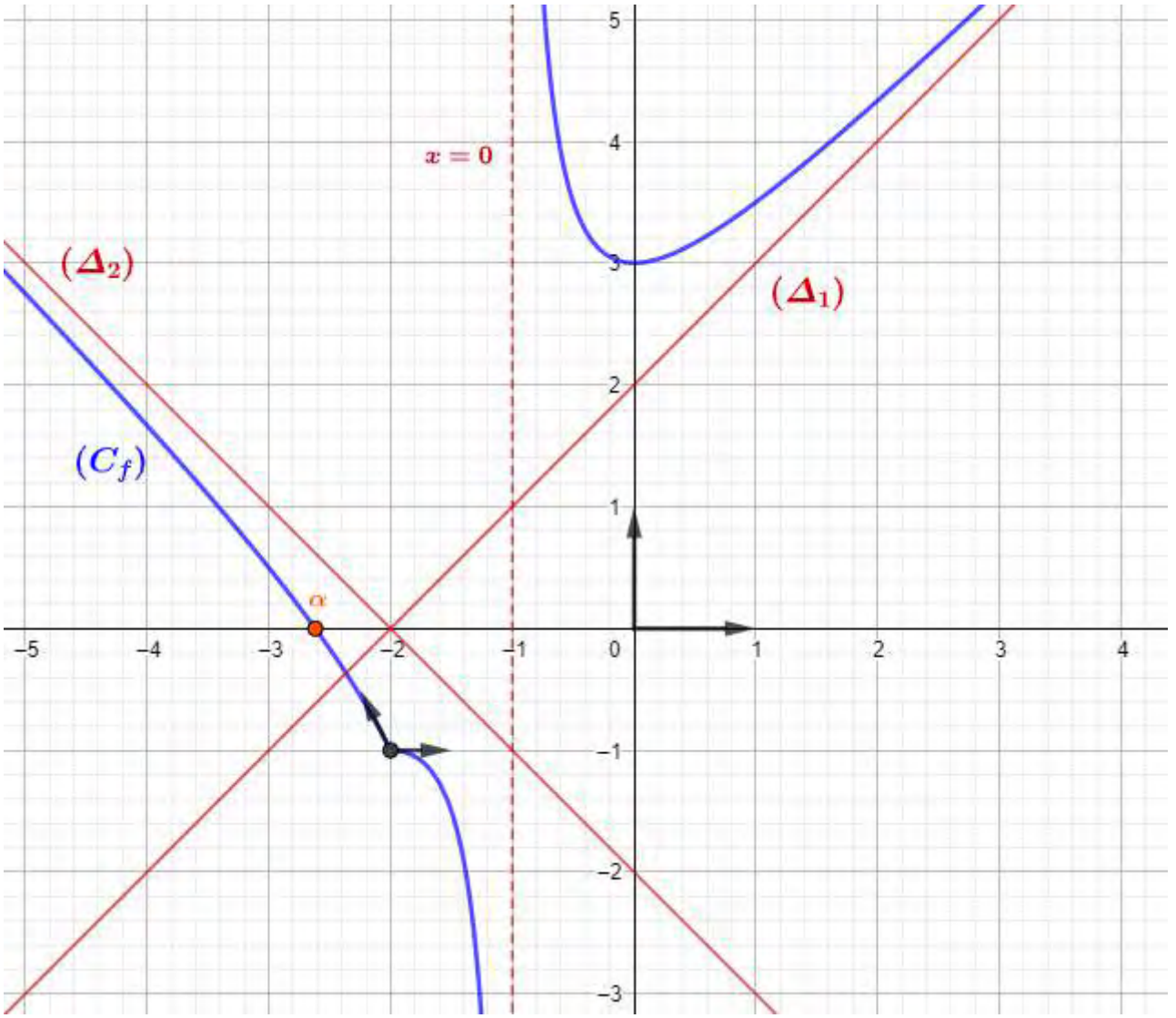
• نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ_1) ذو المعادلة $y_{(\Delta_1)} = x + 2$.

• نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ_2) ذو المعادلة $y_{(\Delta_2)} = -x - 2$.

• نعين النقطة α نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

• باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ_1) و (Δ_2)

(ولا تنسى التركيز عند رسم البيان في النقطة ذات الاحداثيات $(-2; -1)$ ، لأن المنحنى هناك يقبل نصف مماسين)



♥ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ♥

لا تنسونا من صالح دعائكم



#الخليل_للمرياضيات