

5. الاحتمالات

للشعب: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

من تقديم الأستاذ: شعبان اسامة

التمرين ① : للمراجعة

في امتحان يجيب تلميذ على أسئلة متعددة الاختيارات (OCM) يشمل سؤالين ولكل سؤال توجد ثلاثة أجوبة مقترحة من بينها يوجد جواب واحد صحيح فقط. لكل جواب صحيح يحصل التلميذ على +1 ولكل جواب خاطئ يحصل على $-\frac{1}{2}$ وفي حالة عدم الإجابة يحصل على 0.

التلميذ يجيب عشوائيا على السؤالين المطروحين عليه. السؤالين المطروحين عليه.

(1) مثل كل المخارج الممكنة بواسطة شجرة احتمالات.

(2) احسب احتمال أن تكون علامته في الامتحان أكبر تماما من 0.

ليكن X مجموع النقاط المحصل عليها. إذا كان X سالباً يحصل التلميذ على 0.

(3) عين القيم الممكنة لـ X ثم أعط قانون الاحتمال.

(4) احسب الأمل الرياضي للمتغير X .

التمرين ② : للمراجعة

نقترح اللعبة التالية : يدفع اللاعب M ديناراً ثم يرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات 12 وجهاً مرقمة من 1 إلى 12

إذا ظهر رقم زوجي يحصل اللاعب على دينارين اثنين ، إذا ظهر أحد الأرقام 7 ، 9 ، 11 يحصل اللاعب على ثمانية

دنانير أما إذا ظهر أحد الأرقام 1 ، 3 ، 5 فإنه يحصل على ثلاثة دنانير

-1 عين قيمة M حتى تكون اللعبة عادلة

2. إذا كان $M = 4$ ، هل المشاركة في هذه اللعبة هي لصالح اللاعب ؟

التمرين ③ :

دفع لاعب xDA وأخذ حجري نرد عاديين ورماهما. إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين هو 7 ، يربح 20DA وإلا لا يربح أي شيء .

كم يجب على اللاعب أن يدفع في البداية حتى تكون اللعبة عادلة.

التمرين ④ :

(1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(E) \dots\dots\dots (x^2 - 5x + 6)(4x^2 + 3x - 1) = 0$$

(2) كيس به أربع كريات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 . نسحب

منه كرية واحدة و نرسم P_i إلى احتمال سحب الكرية التي

تحمل الرقم i و نضع $P_1 = 3\alpha^2$ ، $P_2 = \alpha^2$ ، $P_3 = \alpha$ و

$$P_4 = 2\alpha$$

حدّد قيمة α .

(3) نضع $\alpha = \frac{1}{4}$. أحسب احتمالات الأحداث التالية :

A : " سحب كرية تحمل رقماً فردياً " .

B : " سحب كرية تحمل الرقم 4 " .

C : " سحب كرية تحمل رقماً أصغر أو يساوي 3 " .

D : " سحب كرية تحمل رقماً حلاً للمعادلة (E) " .

التمرين ⑤ :

يتكون رقم الهاتف من 9 أرقام . الرقم الأول هو 0 و الأرقام الثمانية الأخرى كيفية .

1. ماعدد أرقام الهواتف الكلية ؟

2. ماعدد أرقام الهواتف التي تضم :

(أ) 3 مرات الرقم 1 ؟

(ب) على الأقل ثلاث مرات الرقم 1 ؟

(ج) مرتين الرقم 5 ومرة واحدة الرقم 2 ؟

(د) 5 أرقام زوجية فقط ؟

3. ما عدد أرقام الهواتف التي لا تضم الرقمين 6 و 9 ؟

التمرين ⑥ : حل في $\mathbb{N}^2$ الجمل التالية:

$$\begin{cases} 2C_x^2 = C_y^1 \\ C_{x+y-5}^2 = 4 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases} \quad (1)$$

التدريب 7 :

يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء .
نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد. ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

(أ) كرة بيضاء ؟ (ب) كرة بيضاء على الأقل ؟ (ج) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

(2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

(أ) أثبت أن $X_n = n^2 + 9n + 21 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

(ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

التدريب 8 :

يحتوي صندوق 10 كرات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كرات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3 .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من هذا الصندوق .
نعتبر الحادثتين A : " الكرات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني " و B : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم (1) أ- أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب- بين أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية

سحب عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله

الرياضياتي $E(X)$.

التدريب 9 :

كيس به 7 كرات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس .

(1) أ- أحسب إحتمال الحادثة A : " سحب كرتين مختلفتين في اللون " .

(2) أحسب إحتمال الحادثة B : " سحب كرتين من نفس اللون

(II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب (DA) ، α (حيث

α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على 100DA ، وإذا

سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على 50DA ،

وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه . وليكن X

المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

(1) برّر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{-\alpha, 50 - \alpha, 100 - \alpha\}$

ثم عرّف قانون إحتماله .

(2) بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو :

$$E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$$

ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

التدريب 10 :

كيس يحوي 9 كرات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كرات حمراء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث

كرات خضراء مرقمة بـ : -3 ، 2 ، 3 و كرية بيضاء مرقمة بـ : -1 .

نسحب عشوائيا 4 كرات في آن واحد .

(1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربع كرات من نفس اللون " .

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

C : " الحصول على أربع كرات مجموع أرقامها معدوم " .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد

الكرات الخضراء المتبقية في الكيس .

أ - عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون إحتماله .

ب - أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج - أحسب إحتمال الحادثة : " $X^2 - X > 0$ " .

التدريب 11 :

كيس به 10 كرات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها : 3 حمراء ،

3 خضراء و 4 بيضاء .

(1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كرات في آن واحد .

ما إحتمال الحصول على :

أ - نفس اللون ؟

ب - الألوان الثلاثة ؟

ج - كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث

كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضي.

التدريب 1 2 :

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 و الأخرى تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فاثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخرى تحملان الرقم 3 .
نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد ونحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

- (1) ما إحتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 ؟
- (2) ما هو إحتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين ؟
- (3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضي.

التدريب 1 3 :

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث :

A : " سحب كرتين من نفس اللون " ، B : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

(1) بيّن أن إحتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب إحتمال الحادثة B .

(2) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملتا نفس الرقم ؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضي.

التدريب 1 4 :

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كرتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

(1) عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(2) بيّن أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

(3) نسحب الآن من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع .
ما إحتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي ؟

التدريب 1 5 :

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية . اختر الإجابة الصحيحة مبررا إختيارك .
يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 .
(الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد.
 X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .

(1) قيم المتغير العشوائي X هي :

(2) أ) $\{1; 2; 3\}$ ب) $\{0; 2; 3\}$ ج) $\{0; 1; 2\}$.

(3) الأمل الرياضي $E(X)$ هو :

(4) أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ج) $E(X) = \frac{11}{10}$.

(5) إحتمال " الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة " .

يساوي : أ) $\frac{7}{10}$ ب) $\frac{9}{10}$ ج) $\frac{3}{5}$.

(6) إحتمال " باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1 " .

يساوي : أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{5}$.

التدريب 16 :

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 و ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكرات متشابهة لا نفرق عند اللمس) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من هذا الكيس .

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية :

A: " الحصول على كرية بيضاء واحدة " .

B: " الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر " .

C: " الحصول على ثلاث كرات تحمل أرقاما غير أولية " .

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل أرقاما أولية .

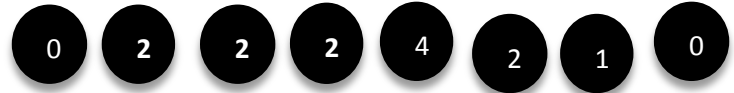
أ - عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عزّف قانون احتماله .

ب - أحسب $P(X^2 - X \leq 0)$.

التدريب 17 :

يحتوي صندوق على ثماني (08) كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو موضح في الشكل المقابل:

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.



1. نعتبر الحدث A: "من بين الكرات الثلاثة المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد 0".

الحدث B: "جاء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 8".

بين أن: $P(A) = \frac{5}{14}$ و أن: $P(B) = \frac{1}{7}$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجاء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة.

أ- بين أن: $P(X = 16) = \frac{3}{28}$.

ب- الجدول المرفق أسفله يتعلق بقانون الاحتمال المتغير العشوائي .

أتمم الجدول معللا اجابتك.

x_i	0	4	8	16
$P(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

التدريب 18 :

يحتوي صندوق على عشر كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس ثلاثة منها تحمل الرقم 0 وثلاثة أخرى تحمل الرقم π والأربعة المتبقية تحمل الرقم $\frac{\pi}{6}$.

نسحب عشوائيا وعلى التوالي دون إرجاع كرتان من الصندوق ونسجل العددين الظاهرين. نرمز لهذين العددين ب α و β .

(1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة العدد $\cos(\alpha + \beta)$.

أ. عرف قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X .

ب. أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(2) نقوم الآن باللعبة الآتية: يربح اللاعب 100DA عند حصوله على $\cos(\alpha + \beta) = 1$ ويخسر 50DA في باقي الحالات. ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة. أ. عين قانون الاحتمال ل Y .

ب. يكرر اللاعب هذه اللعبة ثلاث مرات بحيث يعيد اللاعب الكرتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة: ما هو احتمال أن يربح اللاعب 150DA .

التدريب 19 :

صندوق يحتوي على x كرة بيضاء حيث $x \geq 2$ و 5 كرات حمراء .

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق.

1.أ- احسب الاحتمال $P(x)$ لسحب 3 كرات حمراء.

ب- عين العدد الطبيعي x لكي يكون $P(x) = \frac{5}{28}$.

2. احسب الاحتمال $P'(x)$ لسحب كرة على الأكثر بيضاء.

3. نفرض أن $x = 5$ ، أحسب احتمال الحوادث التالية:

الحادثة A: "الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون".

الحادثة B: "من بين الكرات المسحوبة توجد على الأقل كرتان حمراوين".

الحادثة C: "سحب 3 كرات بيضاء علما أن الحادثة A محققة".

التدريب 20 :

يحتوي كيس أربع قريصات تحمل الأرقام 1، 2، 3، a ($a \in \mathbb{N}$).
نسحب قريصة واحدة ونعتبر P_k هو احتمال سحب القريصة ذات الرقم k

1. أحسب الأعداد الحقيقية P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a

إذا علمت أنها بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$ (تعطى كسورا غير قابلة للإختزال)

2. ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل قريصة مسحوبة بالرقم الذي تحمله. أوجد قيمة العدد a إذا علمت أن الأمل الرياضي هو $\frac{43}{9}$

التدريب 21 :

ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام: 1، 2، 3، 4، 5، 6 إذا كانت هذه الأرقام تتكون من: 3 أرقام؟

(2) 3 أرقام مختلفة؟

(3) 6 أرقام مختلفة؟

التدريب 22 :

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 كرات حمراء و 4 خضراء و 5 سوداء.

نسحب عشوائيا 3 كرات على التوالي بالإرجاع.

1. احسب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب.

2. احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على ثلاثة كرات من نفس اللون".

B : "الحصول على ثلاثة كرات من ألوان مختلفة".

C : "الحصول على كرتين من نفس اللون"

التدريب 23 :

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 كرات حمراء و 4 خضراء و 5 سوداء.

نسحب عشوائيا 3 كرات على التوالي بدون الإرجاع.

1. احسب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب.

2. احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على ثلاثة كرات من نفس اللون".

B : "الحصول على ثلاثة كرات من ألوان مختلفة".

C : "الحصول على كرتين من نفس اللون"

التدريب 24 :

يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10.

نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع.

أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4.

التدريب 25 :

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمسابقة توظيف، يسحب مترشح عشوائيا بالتتالي وبدون إرجاع بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات، ثمان بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات و بطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية، لا يمكن التمييز بين البطاقات باللمس.

1 / نعتبر الحادثتين A و B حيث:

A هي الحادثة: "سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية"

B هي الحادثة: "سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين"

أحسب $P(A)$ و $P(B)$.

2 / ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

أ. عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

ج. أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغير

العشوائي X .

التدريب 26 :

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 وثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 وكرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 .

- نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد .

1- أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "

B " الكرتان من نفس اللون "

C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "

- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2- ما احتمال الحوادث التالية :

D " الكرتان من لونين مختلفين "

E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "

التدريب 27 :

1) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام مختلفة مثنى مثنى والتي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9 ؟

2) من بين هذه الأعداد . ما عدد الأعداد :

أ) الزوجية ؟

ب) مضاعفات 5 ؟

ج) الأصغر من 500 ؟

د) فردية ؟

تحدثون هذا الملف في صفحة

