

ملخص الدالة الأسية

تعريف: الدالة f التي هي معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق الشرطين الآتيين :

$f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$ تسمى الدالة الأسية ونرمز لها بـ: $\exp(x)$ أو بالكتابة المبسطة e^x .

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x, y و من أجل كل عدد صحيح n .

$$(1) \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad , \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (2) \quad , \quad e^{nx} = (e^x)^n \quad (3) \quad , \quad e^x > 0 \quad (4)$$

$$(5) \quad e^x = e^y \text{ معناه } x = y \quad (6) \quad , \quad e^x < e^y \text{ معناه } x < y \quad (7) \quad , \quad e^x > e^y \text{ معناه } x > y$$

$$(8) \quad e^0 = 1 \quad (9) \quad , \quad x > 0 \text{ يكافئ } e^x > 1 \quad (10) \quad , \quad x < 0 \text{ يكافئ } 0 < e^x < 1$$

دراسة الدالة الأسية:

الدالة $x \rightarrow e^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(e^x)' = e^x$ بصفة عامة إذا كانت الدالة u

قابلة للإشتقاق على D فإنه من أجل كل $x \in D$: $[e^{u(x)}]' = u'(x) \times e^{u(x)}$

النمىات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad , \quad \lim_{u(x) \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{u(x) \rightarrow -\infty} e^{u(x)} = 0 \quad , \quad \lim_{u(x) \rightarrow -\infty} u(x) \times e^{u(x)} = 0$$

$$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1 \quad \text{تعميم} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{u(x) \rightarrow +\infty} \frac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty \quad \text{تعميم} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{فإن } \alpha \in \mathbb{N}^* \quad (1) \text{ من أجل}$$

$$(2) \quad \ln e^{u(x)} = u(x) \quad , \quad e^{\ln u(x)} = u(x)$$

دراسة إشارة العبارات الأسية:

الحالة الأولى $[f(x) \times e^{u(x)}]$ هنا الإشارة من إشارة الدالة f

الحالة الثانية العبارة من الشكل : $ae^{\alpha x + \beta} + b$ حيث a, b, α, β أعداد حقيقية مع $a\alpha \neq 0$.

$$(1) \quad \text{إذا كان } a \text{ و } b \text{ موجبين فإن } ae^{\alpha x + \beta} + b > 0$$

$$(2) \quad \text{إذا كان } a \text{ و } b \text{ سالبين فإن } ae^{\alpha x + \beta} + b < 0$$

(3) إذا كان a و b مختلفين في الإشارة فإن المعادلة $ae^{\alpha x + \beta} + b = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 والإشارة كمايلي

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ae^{\alpha x + \beta} + b$	مخالف لإشارة $a\alpha$	موافق لإشارة $a\alpha$	موافق لإشارة $a\alpha$

التمرين الأول

بسط العبارات التالية:

$$(1) (e^x)^2 \times e^{-3x} \quad , \quad (2) \frac{e^{-2x+1}}{e^{2x}} \quad , \quad (3) \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-2x}}$$

التمرين الثاني

أثبت صحة المساواة في كل حالة ممايلي

$$(1) \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1} = \frac{1 - e^{-3x}}{1 + e^{-3x}} \quad , \quad (2) e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \\ (3) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad , \quad (4) (e^x + e^{-x})^2 = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}}$$

التمرين الثالث

✓ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(1) e^{-2x} + 1 = 0 \quad , \quad (2) e^{-3x+6} - 1 = 0 \quad , \quad (3) e^{2x-1} - e = 0$$

$$(4) e^{4x} = e^{x-1} \quad , \quad (5) e^{2x+1} \cdot e^{2x} = e^{3x-4} \quad , \quad (6) e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$$

$$(7) e^{-x^2} = \frac{1}{e} \quad , \quad (8) e^{-x^2} = \frac{1}{e^{3x-4}} \quad , \quad (9) e^{\frac{x+4}{-x+6}} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(10) e^{-3x+4} - (e^x)^{-4} = 0 \quad , \quad (11) e^{2x} = 2 - e^x$$

✓✓ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$(1) e^{3x+6} < 0 \quad , \quad (2) e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \quad , \quad (3) e^x < e^{-2x}$$

$$(4) e^{2x^2} > e^{5x+3} \quad , \quad (5) e^{x+1} > e^{\frac{-2}{x}} \quad , \quad (6) e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$$

التمرين الرابع

أدرس إشارة كل من العبارات التالية :

$$B(x) = -2e^{-x+1} - 5 \quad , \quad A(x) = 2e^{x+1} + 3$$

$$D(x) = e^{-2x+1} - 1 \quad , \quad C(x) = 2e^{x+3} - 4$$

$$K(x) = e^{2x} + e^x - 6 \quad , \quad E(x) = (x^2 + x - 2)e^{3-x}$$

$$G(x) = e^{2x} - 7e^x + 12$$

التمرين الخامس

أحسب مشتقات الدوال التالية

$$(1) f(x) = (2x + 1)e^x - 1 \quad , \quad (2) g(x) = x - (x + 1)e^{-x} + 3$$

$$(3) h(x) = e^x - ex - 1 \quad , \quad (4) t(x) = \frac{2x + 2}{e^x + 2}$$

$$(5) k(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} \quad , \quad (6) G(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

$$(7) e(x) = (-3x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} - x + 4 \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-3x} + 1 \quad (1) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 4)e^x \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - x \quad (4) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 1} \quad (9) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 3)e^x \quad (8) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2 + x} \quad (7) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad (12) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{3} \quad (11) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} + 1}{e^x + 1} \quad (10) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} \quad (15) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \quad (14) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad (13) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (17) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-4x}}{x} \quad (16) \end{aligned}$$

المسألة الأولى

- ❖ $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$: $\mathbb{R}$ على g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.
 - (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $0,36 < \alpha < 0,37$
 - (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- ❖ $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$: $\mathbb{R}$ بـ :
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- (1) (أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$
 - (ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$
 - (2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - (3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
 - (4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.
 - (5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0,1$.

المسألة الثانية

- ❖ $g(x) = (x + 2)e^x - 2$: كمايلي $\mathbb{R}$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$:
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
 - (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- ❖ $f(x) = 2x + 3 - (x + 1)e^x$: كمايلي $\mathbb{R}$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$:
- و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- (2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$
 ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ج) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث :
 $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$
 ب) أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

المسألة الثالثة

- ❖ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
- (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $1,59 < \alpha < 1,6$
- (3) استنتج إشارة $g(x)$
- ❖ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{2x - 2}{e^x - 2x}$
- (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهم على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.
- (2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$
 ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 ج) أحسب $f(1)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.
- (3) أ) بيّن أن : $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ حيث : α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء الاول.
 ب) استنتج حصر للعدد α (تدور النتائج إلى 10^{-2})
 ج) أرسم (C_f) .
- (4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$
- (5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = [f(x)]^2$
- أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.
 ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

المسألة الرابعة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$

(1) (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلة له.

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(2) أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.

(3) h الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي : $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$

أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.

(4) أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.

(5) نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $f(x) = m(x-2) \dots (E)$ ناقش بيانها حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

(6) g الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

إعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيرات الدالة g .

حلول المسائل

حل المسألة الأولى

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + e^{2x-2})$.
من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = +\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) \left(\frac{1-2x}{2x-2} - \frac{e^{2x-2}}{2x-2} \right) = -\infty$$

ومنه الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ وبالأخص المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.
التحقق أن $0,36 < \alpha < 0,37$.

$g(0,36) \approx 0,002$ و $g(0,37) \approx -0,02$ إذن $g(0,36) \times g(0,37) < 0$ ومنه $0,36 < \alpha < 0,37$.
(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x < \alpha$ فإن $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$.

إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$ ؛ كما أن $g(\alpha) = 0$.

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

(1) أ) تبين أن $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2}g(-x)$$

ب) إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(-x)$.

إذا كان $x < -\alpha$ فإن $-x > \alpha$ ومنه $g(-x) < 0$ أي $f'(x) < 0$.

إذا كان $x > -\alpha$ فإن $-x < \alpha$ ومنه $g(-x) > 0$ أي $f'(x) > 0$.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$.

(2) حساب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x+2} - x + 1 = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^2 \times 2xe^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\alpha)$	$+\infty$

(3) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^2 \times 2x e^{2x} = 0$$

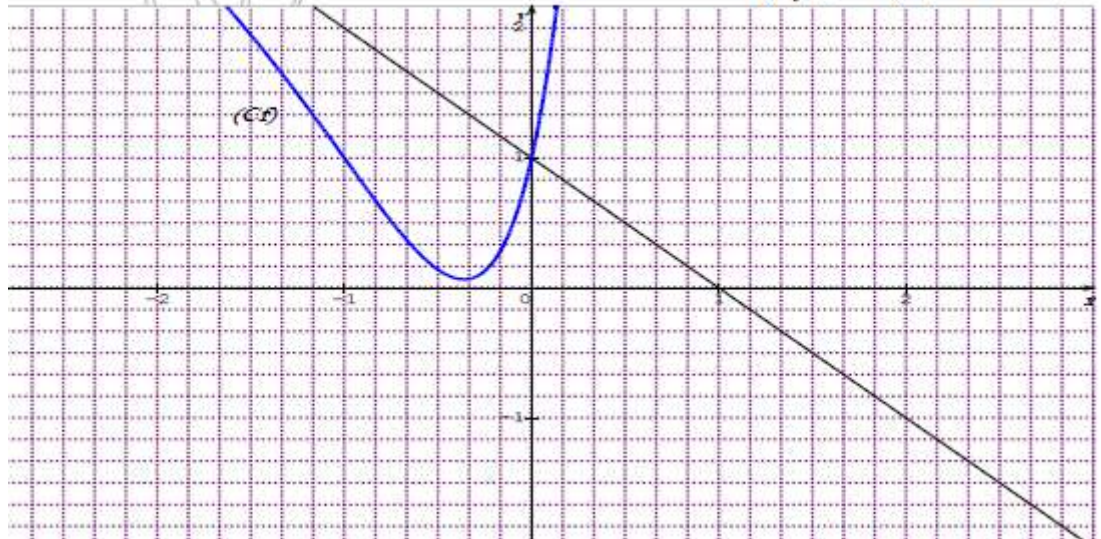
ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x + 1$ بحوار $-\infty$.

(4) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

$f(x) + x - 1 = x e^{2x+2}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x+2} > 0$ ومنه إشارة $f(x) + x - 1$ هي نفس إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) + x - 1$	-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.	(C_f) فوق (Δ)

(5) انشاء (Δ) و (C_f) .



حل المسألة الثانية

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x+2)e^x - 2$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x + 2e^x - 2 = -2 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^x - 2 = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = e^x + (x+2)e^x = e^x(x+3)$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(x+3)$.

من أجل $x \in]-\infty; -3[$ يكون $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -3[$.

و من أجل $x \in]-3; +\infty[$ يكون $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-3; +\infty[$.

وجداول تغيّراتها يكون كما يلي:

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	-2	$-e^{-3}-2$	0	$+\infty$

$$g(0) = (0+2)e^0 - 2 = 0$$

استنتاج إشارة $g(x)$.

من أجل $g(x) < 0 : x \in]-\infty; 0[$ ومن أجل $g(x) > 0 : x \in]0; +\infty[$ و $g(0) = 0$.

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (x+1) \left(\frac{2x+3}{x+1} - e^x \right) = -\infty \quad (1)$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 3 - (x+1)e^x = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + e^x = 0$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$.

$$f'(x) = 2 - [e^x + e^x(x+1)] = 2 - e^x(x+2) = -g(x)$$

(ب) استنتاج إشارة $f'(x)$.

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$.

من أجل $f'(x) > 0 : x \in]-\infty; 0[$ ومنه $g(x) < 0$ ومنه $f'(0) = 0$.

ومن أجل $g(x) > 0 : x \in]0; +\infty[$ ومنه $f'(x) < 0$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$

(ج) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x - e^x = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

$$\text{لدينا } f(x) - (2x + 3) = -(x+1)e^x = (-x-1)e^x$$

ومنه إشارة $f(x) - (2x + 3)$ هي نفس إشارة $(-x-1)$ لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

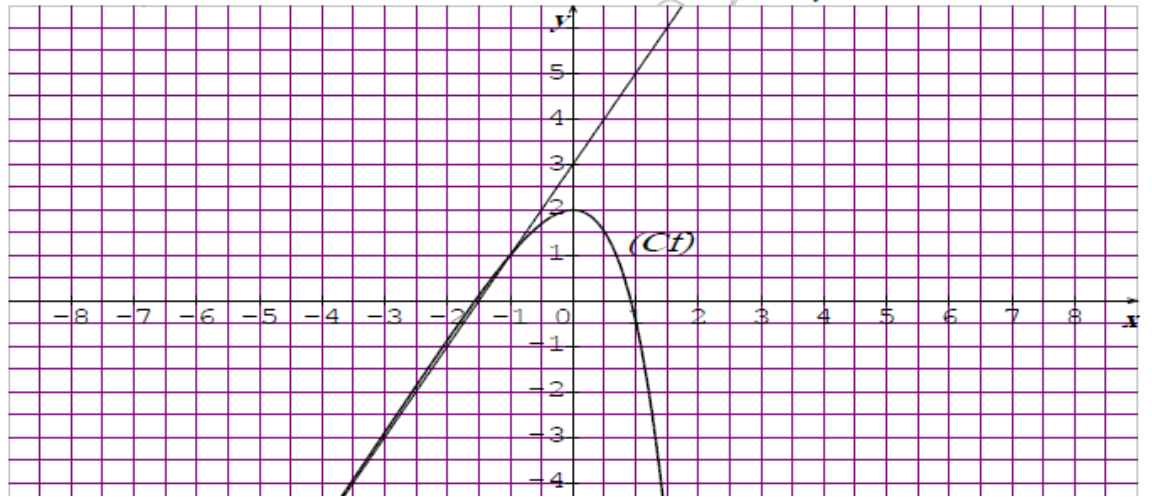
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - (2x + 3)$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 1)$	(C_f) تحت (Δ)

3 أ) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$.

الدالة f ، مستمرة ومنتزادة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ وبالخصوص على المجال $[-1,56; -1,55]$ و $f(-1,56) \approx -0,002$ و $f(-1,55) \approx 0,17$ أي $f(-1,55) \times f(-1,56) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]-1,56; -1,55]$ بحيث $f(\beta) = 0$.

وكذلك، الدالة f مستمرة ومنتزادة تماما على المجال $[0; +\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,92; 0,93]$ و $f(0,92) \approx 0,02$ و $f(0,93) \approx -0,03$ أي $f(0,92) \times f(0,93) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,92; 0,93[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

ب) رسم (Δ) والمنحنى (C_f) .



حل المسألة الثالثة

I- لدينا: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$ ، حيث $D_g = \mathbb{R}$.

1. دراسة تغيرات الدالة g .

- النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4 + (4 - 2x)e^x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4 + (4 - 2x)e^x) = -4$.

- المشتق وإشارته: من أجل كل عدد حقيقي لدينا $g'(x) = -2e^x + (4 - 2x)e^x = 2(1 - x)e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

- جدول التغيرات.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-4	0	$-\infty$

$$g(0) = -4 + (4 - 2 \times 0)e^0 = 0$$

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين.

بما أن $g(0) = 0$ فإن العدد 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.

ولدينا الدالة $g(x)$ معرفة ومستمرة ومنتزادة تماما على المجال $[1,59; 1,60]$.

و $g(1,59) = 0,02$ ، $g(1,60) = -0,04$ أي $g(1,59) \times g(1,60) < 0$.

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$g(x)$	-	0	+	0	-

3. استنتاج إشارة $g(x)$.

-II لدينا : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ ، حيث $D_f = \mathbb{R}$.

1. إثبات أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين .

- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-2}{e^x-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2x}{2x} \right) = -1$.

وبالتالي : (C_f) يقبل بحوار $(-\infty)$ مقارب أفقي معادلته $y = -1$.

- ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{e^x-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \cdot \frac{x}{e^x} \right) = 0$.

وبالتالي : (C_f) يقبل بحوار $(+\infty)$ مقارب أفقي معادلته $y = 0$.

2. أ- حساب $f'(x)$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = \frac{2(e^x-2x) - (e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2} = \frac{2e^x-4x+4x-4 - (2x-2)e^x}{(e^x-2x)^2}$

أي : $f'(x) = \frac{-4 + (4-2x)e^x}{(e^x-2x)^2}$.

ومنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f'(x)$	-1		$f(\alpha)$		-2	0

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f .

$$f(0) = \frac{2 \times 0 - 2}{e^0 - 2 \times 0} = -2$$

ج- حساب $f(1)$ ، ثم استنتاج ، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

لدينا : $f(1) = \frac{2 \times 1 - 2}{e^1 - 2 \times 1} = 0$.

بالاستعانة بجدول التغيرات نستنتج : $x \in]-\infty; 1[$ و $f(x) < 0$ و $x \in]1; +\infty[$ و $f(x) > 0$.

3. أ- كتابة $f(\alpha)$ بدلالة α .

لدينا : $f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$ ، ولدينا : $-4+(4-2\alpha)e^\alpha = 0$ ، أي : $e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$.

إذن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha}$ ، أي : $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ، ومنه : $f(\alpha) = \frac{1-\alpha+1}{\alpha-1} = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

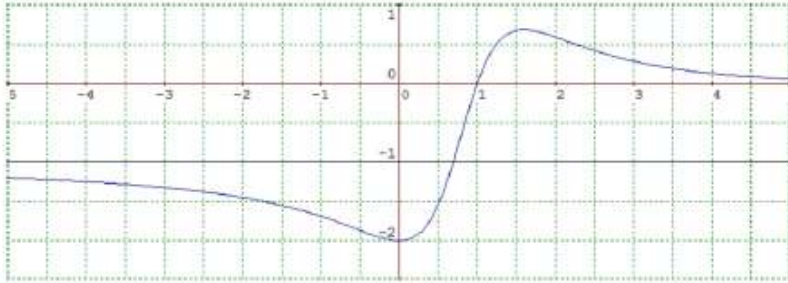
لدينا : $1,59 < \alpha < 1,60$ ، إذن : $0,59 < \alpha-1 < 0,60$.

وبالتالي : $\frac{1}{0,60} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,59}$.

أي : $-1 + \frac{1}{0,60} < -1 + \frac{1}{\alpha-1} < -1 + \frac{1}{0,59}$.

ومنه $0,66 < f(\alpha) < 0,69$.

ج- رسم (C_f) .



- $(0; -2)$ و $(1; 0)$ نقطتي تقاطع مع محوري الفواصل والترتيب .

- $y=0$ و $y=-1$ معادلتين مقاربتين أفقيتين للمنحني (C_f) .

4. المناقشة البيانية لحلول المعادلة .

لدينا : $2x-2 = (e^x-2x)(m+1)$ ، وبالتالي : $\frac{2x-2}{e^x-2x} = m+1$ ، إذن : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = m+1 \end{cases}$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني مع المستقيم ذو المعادلة $y = m+1$ ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

أ- $m+1 < -2$ أي $m < -3$ لا توجد حلول للمعادلة .

ب- $m = -3$ للمعادلة حل مضاعف $x = 0$.

ج- $-2 < m+1 < -1$ أي $-3 < m < -2$ للمعادلة حلين أحدهما موجب وآخر سالب .

د- $-2 \leq m < -1$ للمعادلة حل وحيد موجب .

هـ- $m = -1$ للمعادلة حل وحيد معلوم .

و- $0 < m+1 < f(\alpha)$ أي $-1 < m < -2 + \frac{1}{\alpha-1}$ للمعادلة حلين متميزين موجبين .

ز- $m = -2 + \frac{1}{\alpha-1}$ للمعادلة حل مضاعف موجب $x = \alpha$.

ح- $m > -2 + \frac{1}{\alpha-1}$ لا توجد حلول للمعادلة .

5. لدينا $h(x) = [f(x)]^2$ ، حيث $D_h = \mathbb{R}$.

أ- حساب $h'(x)$.

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		-	0	+	
$h'(x)$	+	0	-	0	-

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$					

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $h'(x) = 2.f'(x).f(x)$.

- إشارة $h'(x)$.

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x).f(x)$. أنظر الجدول أعلاه .

ب- جدول تغيرات الدالة h .

جدول تغيرات الدالة h بالشكل المقابل .

حل المسألة الرابعة

$$f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$$

1- أ- حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3)e^{-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{e^{x-1}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3)e^{-x+1} = +\infty$.

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب- إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$:

نحسب المشتقة $f'(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1} - (-3x^2 + 4x)e^{-x+1} = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ محققة .

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2 - 5x + 4)$

لدينا $x(x^2 - 5x + 4)$ له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$		
إشارة $(x^2 - 5x + 4)$	+	+	0	-	0	+	
إشارة x	-	0	+	+	+	+	
إشارة $f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

و منه f متزايدة على المجالين $[0; 1]$ و $[4; +\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty; 0]$ و $[1; 4]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$				1				0

2- كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f(2) = 0$ و $f'(2) = -4e^{-1}$ و منه معادلة المماس (T) هي $y = -\frac{4}{e}x + \frac{8}{e}$.

3- دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ $h(x) = x^2.e^{-x+2} - 4$

دراسة تغيرات الدالة h : $h'(x) = 2x.e^{-x+2} - x^2.e^{-x+2} = x(2-x)e^{-x+2}$ إشارتها من إشارة $(2-x)$

و منه فهي موجبة على المجال $[0; 2]$ و سالبة على المجال $[2; +\infty[$ و منه الدالة h متزايدة على

المجال $[0; 2]$ و متناقصة على المجال $[2; +\infty[$ و لدينا $h(2) = 0$ إذن قيمة حدية كبرى و منه

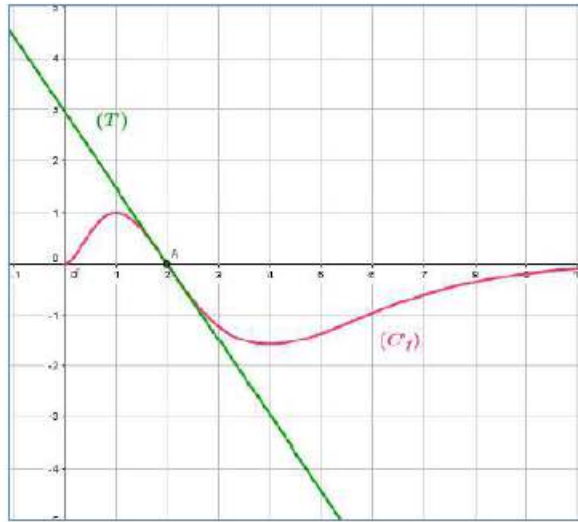
$h(x)$ إشارتها سالبة .

تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$:

$$f(x) - y = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1} + 4e^{-1}x - 8e^{-1} = -x^3.e^{-x+1} + 2x^2.e^{-x+1} + 4xe^{-1} - 8e^{-1}$$

$$f(x) - y = -x^3.e^{-x+1} + 4x.e^{-1} + 2x^2.e^{-x+1} - 8e^{-1} = -xe^{-1}(x^2.e^{-x+2} - 4) + 2e^{-1}(x^2.e^{-x+2} - 4)$$

اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان (C_f) يقع فوق (T) على المجال $[0; 2[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $[2; +\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2 .



4- رسم المنحنى البياني (C_f) و المماس (T) :

5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $f(x) = m(x-2) \dots (E)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = m(x-2)$.

لما $m \in]-\infty; -\frac{4}{e}]$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

لما $m \in]-\frac{4}{e}; 0[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة (E) ثلاثة حلول.

لما $m = 0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة (E) حلين .

لما $m \in]0; +\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

6- لدينا $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t = \frac{1}{x}$

و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} t = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} t = +\infty$ نجد $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$.

المشتقة : هي $g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x) = -\frac{1}{x^3} \left(\frac{1}{x^2} - 5\frac{1}{x} + 4\right) e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي

$g'(x) = \frac{1}{x^5} (-1 + 5x - 4x^2) e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $(-1 + 5x - 4x^2)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ و متناقصة على المجالين $[1; +\infty[$ و $]0; \frac{1}{4}]$

و $g(1) = f(1)$, $g\left(\frac{1}{4}\right) = f(4)$

بالتوفيق لطلبة بكالوريا 2021

مع تحيات الأستاذة قريرة سمير