

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المدة : ساعة ونصف

المستوى : ثالثة تقني رياضي

□ التمرين الأول:

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) U_n$.

(1) أ) برهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $U_n \geq 0$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، استنتج أنها متقاربة ثم عين نهاية المتتالية (U_n) .

(2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = \frac{U_n}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول V_1 .

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

(3) نعتبر المتتالية العددية بدلالة (W_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $W_n = \ln(V_n)$.

أ) برهن أن المتتالية (W_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول W_1 .

(4) أحسب بدلالة n كل من P_n و S_n حيث: $P_n = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ و $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

□ التمرين الثاني:

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

وحدة الطول 1cm

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$.

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$.

(4) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

(6) أحسب $f(0)$ ، $f(3)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$.

(1) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة: $g: x \mapsto xe^{-x+1}$.

(2) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(3) أحسب I_1 ثم استنتج I_2 .

(4) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهم: $x = 0$ و $x = 1$.

التمرين الأول :

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) U_n$.

(1) أ) نبرهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $U_n \geq 0$.

نسمي الخاصية $p(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n \geq 0$

من أجل $n = 1$ لدينا : $U_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ ومنه $p(1)$ صحيحة

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n عدد طبيعي كفي حيث : $n \geq 1$

و نثبت صحة $p(n+1)$ أي $U_{n+1} \geq 0$

لدينا من الفرض : $U_n \geq 0$ ومنه $\frac{n+1}{2n} U_n \geq 0$ وعليه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n \geq 0$

(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) واستنتاج أنها متقاربة

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{n+1}{2n} - 1\right) U_n = \frac{n+1-2n}{2n} U_n = \frac{1-n}{2n} U_n$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $\frac{1-n}{2n} \leq 0$ و $U_n \geq 0$ ومنه

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \text{ . إذن } (U_n) \text{ متتالية متناقصة}$$

بما أن (U_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 0 فهي متقاربة.

-تعيين نهاية المتتالية (U_n) .

بما أن المتتالية (U_n) متقاربة والدالة f المعرفة بـ $f(x) = x$ مستمرة من أجل كل $x \geq 1$ فإن نهاية المتتالية (U_n) تحقق: $\ell = \frac{1}{2}$ حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

ومنه $\frac{1}{2} \ell = 0$ إذن $\ell = 0$.

(2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = \frac{U_n}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{n+1} = \frac{U_n}{2n} = \frac{1}{2} V_n$$

إذن V_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_1 = \frac{1}{2}$

(ب) تعين عبارة V_n : $V_n = V_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

تعين عبارة U_n : لدينا $V_n = \frac{U_n}{n}$ ومنه $U_n = nV_n$ إذن: $U_n = \frac{n}{2^n}$

(3) نعتبر المتتالية العددية بدلالة (W_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $W_n = \ln(V_n)$.

أ) برهان أن المتتالية (W_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$W_{n+1} - W_n = \ln(V_{n+1}) - \ln(V_n) = \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = -\ln 2 = r$$

$$W_1 = \ln V_1 = -\ln 2$$

(4) حساب بدلالة n كل من S_n و P_n

S_n عبارة عن مجموع حدود متتالية حسابية

$$\text{إذن: } S_n = \frac{n}{2} (W_n + W_1) = \frac{n}{2} (-\ln 2 - (n-1)\ln 2 - \ln 2)$$

$$S_n = -\frac{n \ln 2}{2} (n+1) \text{ ومنه :}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n)}{2}} \text{ ومنه } P_n = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n} \text{ حساب } P_n$$

التمرين الثاني: (1) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$ • (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ • وحدة الطول 1cm

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - (x^2 + 1)e^{-x+1} = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x^2 + 1)e^{-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 e^{-x} e^1 - e^{-x+1} = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

(ب) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; +\infty[$

$$\text{ودالتها المشتقة: } f'(x) = 1 - (2x)e^{-x+1} + (x^2 + 1)e^{-x+1} = 1 + e^{-x+1}(x^2 + 1 - 2x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

(ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $(x-1)^2 e^{-x+1} \geq 0$ ومنه $1 + (x-1)^2 e^{-x+1} > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
- تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 + 1)e^{-x+1} = 0$$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - x = -(x^2 + 1)e^{-x+1} < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty; +\infty[$.

(3) نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.8 < \alpha < 1.9$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty; +\infty[$ وبالأخص المجال $[1.8; 1.9]$ ولدينا $f(1.8) < 0$ و $f(1.9) > 0$ إذن $f(1.8) \times f(1.9) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.8 < \alpha < 1.9$.

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 1 - 2 \text{ ومنه } (T) : y = x - 2$$

(5) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} - (x-1)^2 e^{-x+1} = e^{-x+1}(x-1)(2-x+1) = (3-x)(x-1)e^{-x+1} = -(x-3)(x-1)e^{-x+1}$$

استنتاج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

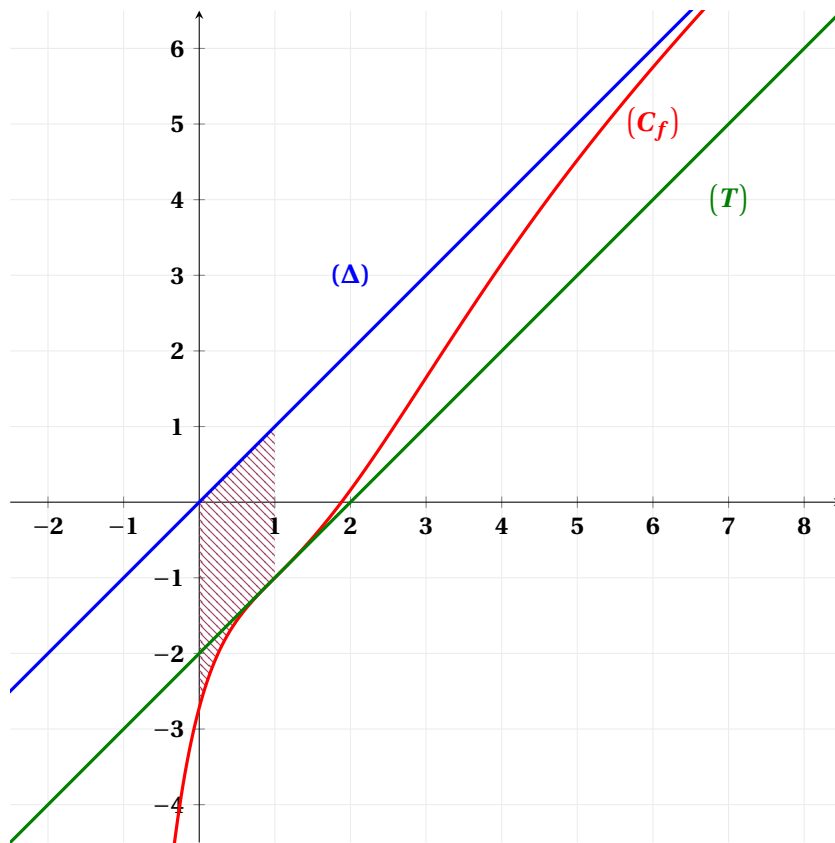
$f''(x) = 0$ يكافئ $x = 3$ أو $x = 1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	0

الدالة f'' تنعدم عند 1 و 3 وتغير إشارتها ومنه (C_f) يقبل نقطتي انعطاف هما: $(1; f(1))$ و $(3; f(3))$.

$$f(3) = 3 - 10e^{-2} \approx 1.65, \quad f(0) = -e \quad (6)$$

رسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .



(7) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$.

عدد وإشارة الحلول	m
حل وحيد سالب تماماً	$m \in]-\infty; -e[$
حل معدوم	$m = -e$
حل موجب تماماً	$m \in]-e; 0[$
لا يوجد حلول.	$m \geq 0$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$.

(1) نبين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة: $g: x \mapsto xe^{-x+1}$.

الدالة G قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $G'(x) = -e^{-x+1} + (x+1)e^{-x+1} = (x+1-1)e^{-x+1} = xe^{-x+1} = g(x)$.

(2) باستعمال التكامل بالتجزئة نبين أن: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$$

$$U(x) = x^{n+1} \quad U'(x) = (n+1)x^n$$

$$V'(x) = e^{-x+1} \quad V(x) = -e^{-x+1}$$

$$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x+1}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{-x+1} dx = -1^{n+1} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx = -1 + (n+1)I_n$$

(3) نحسب I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1} dx = \int_0^1 g(x) dx = [G(x)]_0^1 = -2e^0 + e = e - 2$$

استنتاج I_2 : $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2e - 4 = 2e - 5$

(4) الحساب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : نعلم مما سبق أن $f(x) - x < 0$ من أجل كل $x \in [0; 1]$

$$\int_0^1 [f(x) - x] dx = \int_0^1 -(x^2 + 1)e^{-x+1} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x+1} dx = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$$

ومنه

$$\int_0^1 [f(x) - x] dx = I_2 + I_0 = I_2 + I_1 + 1 = 2e - 5 + e - 2 + 1 = 3e - 6 \text{ Cm}^2$$