

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال اللوغاريتمية) الدروس // الشعبة: الثالثة علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

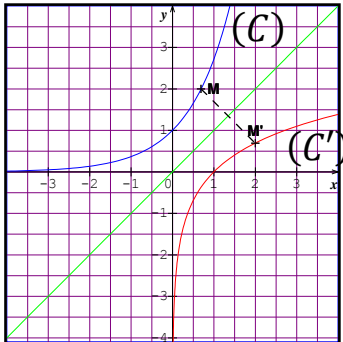
دروس: حول الدّوال اللوغاريتمية // التحضير الجيد للباكوريا // الشعبة: 03 ع؛ تر.

وعليه: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,693$

2. التمثيل البياني:

نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين "exp" و "ln".
□ النقطتين $M(x; y)$ و $M(y; x)$ متناظرتان بالنسبة للمنصف الأول (المستقيم الذي معادلته $y = x$).
□ بما أنّ: $b = e^a$ و $\ln b = a$ ، فالقول أنّ: $M(a; b)$ تنتمي إلى (C) معناه: $M'(b; a)$ تنتمي إلى (C') .
□ بما أنّ: $M(a; b)$ و $M'(b; a)$ متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول، فإنّ: (C) و (C') كذلك متناظرتان بالنسبة للمنصف الأول.

رسم المنحنى (C) ثم المنحنى (C') في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$



3. وضع تخمينات:

★ الدالة "ln" متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

1. اللوغاريتم النّبيري لعدد:

مبرهنة وتعريف:

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0; +\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$.
يسمى هذا العدد "اللوغاريتم النّبيري للعدد a "; ونرمز إليه بالرمز "ln a".

مثال:

العدد الحقيقي الوحيد b الذي يُحقق $e^b = 2$ ، هو إذن $\ln 2$.

2. تعريف الدالة "ln"

1. الدالة اللوغاريتمية النّبيرية:

1. النشاط 02 ص 77:

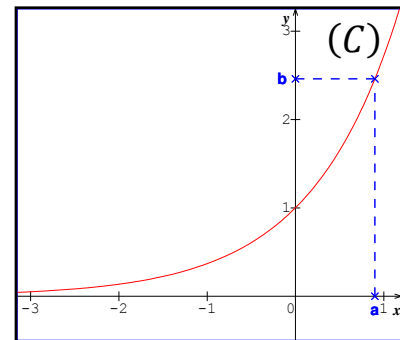
الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتمية النّبيرية.

الدالة الأسية مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي b من $]0; +\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a = b$.

□ بوضع: $a = \ln(b)$ نكون بذلك قد عرفنا دالة جديدة.



تعريف:

تسمى هذه الدالة "الدالة اللوغاريتمية النّبيرية"، ونرمز إليها بالرمز "ln".

1. حساب بعض الصور:

حساب الأعداد التالية: $\ln(e^2)$ و $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ ، $\ln(e)$ ، $\ln(1)$.

○ بما أنّ: $1 = e^0$ ، فإنّ: $\ln 1 = 0$.

○ بما أنّ: $e = e^1$ ، فإنّ: $\ln e = 1$.

○ بما أنّ: $\frac{1}{e} = e^{-1}$ ، فإنّ: $\ln \frac{1}{e} = -1$ ، و $\ln e^2 = 2$.

تعيين قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln(2)$:

لدينا: $\ln(2) \approx 0,693$

تبيان أنّ $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$ ، ثم استنتاج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

○ بوضع: $\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2$

نجد: $e^\alpha = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \times e^{\ln 2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 = e^0$

أي: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2 = 0$ ومنه: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

تعريف:

نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز إليها بالرمز "ln"، والتي تُرفق بكل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

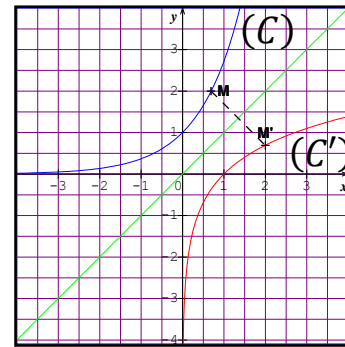
- من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،
 $x = e^y$ يعني $y = \ln x$.
- من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$.
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$.
- بما أن: $e^0 = 1$ ، فإن: $\ln 1 = 0$.
- وبما أن: $e^1 = e$ ، فإن: $\ln e = 1$.

ملاحظة:

نُعبّر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" هي الدالة العكسية للدالة الأسية "exp".

خاصية:

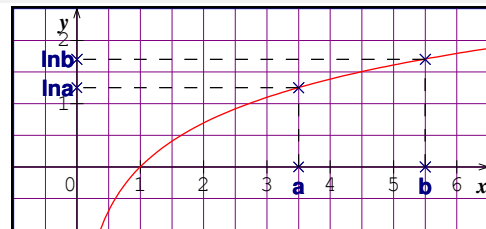
في معلم متعامد ومتجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية واللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).



③ اتجاه تجرّب الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

خاصية:

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.



نتائج:

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ،
 لدينا:
 $a < b$ يعني $\ln a < \ln b$
 $a = b$ يعني $\ln a = \ln b$
 $a > b$ يعني $\ln a > \ln b$
- من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x لدينا:
 $\ln x > 0$ يعني $x > 1$
 $\ln x < 0$ يعني $0 < x < 1$
 كما أن $\ln 1 = 0$

طريقة 01:

المعادلة $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ تعني $u(x) = v(x)$
 المتراجحة $\ln[u(x)] \geq \ln[v(x)]$ تعني $u(x) \geq v(x)$

طريقة 02:

لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c = 0$ مع $a \neq 0$

نضع $X = \ln(x)$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ ، ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

(التمرين 52 و 53 ص 106)

• في التمارين من 52 إلى 56 عين مجموعة تعريف الدالة f للمتغير الحقيقي x :

52 (1) $f: x \mapsto \ln(x+1)$

(2) $f: x \mapsto \ln(-2x+3)$

(3) $f: x \mapsto 2\ln(x^2+1)$

(4) $f: x \mapsto \ln|x|$

53 (1) $f: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

(2) $f: x \mapsto \ln(x^2-4)$

(3) $f: x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-2)$

(4) $f: x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$

الحل:

(1) $f: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

f معرفة من أجل $\frac{1}{x-1} > 0$ أي: $x > 1$

ومنه: $D_f =]1; +\infty[$

(2) $f: x \mapsto \ln(x^2-4)$

f معرفة من أجل $x^2-4 > 0$ أي: $x > 2$ أو $x < -2$

ومنه: $D_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

(3) $f: x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-2)$

f معرفة من أجل $x > -1$ و $x > 2$ ومنه: $D_f =]2; +\infty[$

(4) $f: x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$

f معرفة من أجل $x^2+2x-3 > 0$

ومنه: $D_f =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

(التمرين 54 ص 106)

54 (1) $f: x \mapsto \ln \sqrt{2-3x}$ (2) $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

(3) $f: x \mapsto \frac{1-x}{\ln x}$ (4) $f: x \mapsto \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$

الحل:

$$(1) f: x \mapsto \ln \sqrt{2-3x}$$

f معرفة إذا وفقط إذا كان: $2-3x > 0$

$$\text{ومنه: } x < \frac{2}{3}$$

$$\text{إذن: } D_f =]-\infty; \frac{2}{3}[$$

$$(2) f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

f معرفة إذا وفقط إذا كان: $x > 0$

$$\text{إذن: } D_f =]0; +\infty[$$

$$(3) f: x \mapsto \frac{1-x}{\ln x}$$

f معرفة إذا وفقط إذا كان: $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$

$$\text{إذن: } D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$(4) f: x \mapsto \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$$

f معرفة إذا وفقط إذا كان: $\begin{cases} \frac{x}{x-1} \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$

$$\text{أي: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{إذن: } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

التمرين 58 ص 106:

58 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(أ) \ln x = 2$$

$$(ب) \ln x = -3$$

$$(ج) 7 \ln x = 2$$

$$(د) \ln x + \ln 3 = 0$$

الحل:

$$(أ) \ln x = 2$$

لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد: $D_1 =]0; +\infty[$

$$\square \ln x = 2 \text{ معناه: } x = e^2 \in D_1 \text{ إذن: } S_1 = \{e^2\}$$

$$(ب) \ln x = -3$$

لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد: $D_2 =]0; +\infty[$

$$\square \ln x = -3 \text{ معناه: } x = e^{-3} \in D_2 \text{ إذن: } S_2 = \{e^{-3}\}$$

$$(ج) 7 \ln x = 2$$

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 =]0; +\infty[$

$$\square 7 \ln x = 2 \text{ معناه: } x = e^{\frac{2}{7}} \in D_3 \text{ إذن: } S_3 = \{e^{\frac{2}{7}}\}$$

$$(د) \ln x + \ln 3 = 0$$

لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد: $D_4 =]0; +\infty[$

$$\square \ln x + \ln 3 = 0 \text{ ومنه: } \ln x = -\ln 3$$

$$\text{وعليه: } \ln x = \ln \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \in D_4 \text{ وبالتالي:}$$

$$\text{إذن: } S_4 = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

التمرين 59 ص 106:

59 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(1) \ln(2x-3) = \ln(x+4)$$

$$(2) \ln(x^2+x) = 1$$

$$(3) \ln|1-x| = \ln 3$$

$$(4) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$$

الحل:

$$(1) \ln(2x-3) = \ln(x+4)$$

لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_1 = \left] \frac{3}{2}; +\infty[\cap]-4; +\infty[= \left] \frac{3}{2}; +\infty[$$

$$\square \text{ لدينا: } \ln(2x-3) = \ln(x+4)$$

$$\text{معناه: } (2x-3) = (x+4)$$

$$\text{ومنه: } x = 7 \in D_1 \text{ إذن: } S_1 = \{7\}$$

$$(2) \ln(x^2+x) = 1$$

لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_2 =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$\square \ln(x^2+x) = \ln e \text{ معناه: } \ln(x^2+x) = 1$$

$$\text{أي: } x^2+x = e$$

$$\text{ومنه: } x^2+x-e = 0$$

مميزها $\Delta = 1+4e > 0$ ، وبالتالي:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} \in D_2 \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4e}}{2} \in D_2 \end{cases}$$

$$\text{إذن: } S_2 = \left\{ \frac{-1-\sqrt{1+4e}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} \right\}$$

$$(3) \ln|1-x| = \ln 3$$

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\square \ln|1-x| = \ln 3 \text{ معناه: } |1-x| = 3$$

$$\begin{cases} 1-x = 3 \\ \text{أو} \\ 1-x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \in D_3 \\ \text{أو} \\ x = 4 \in D_3 \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{إذن: } S_3 = \{-2; 4\}$$

$$(4) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1 \text{ لتكن } D_4 \text{ مجموعة تعريفها نجد:}$$

$$D_4 =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\square \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e^{-1} \text{ معناه: } \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$$

$$\text{أي: } \frac{x+1}{x-1} = e^{-1}$$

$$\text{ومنه: } x = \frac{1+e}{1-e} \in D_4$$

$$\text{إذن: } S_4 = \left\{ \frac{1+e}{1-e} \right\}$$

② الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية:

مُلهِد:

a و b عددين حقيقيين موجبان تماما،
 لدينا:
$$\begin{cases} e^{\ln(ab)} = ab \\ e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab \end{cases}$$

 إذن: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

① الخاصية الأساسية:

خاصية:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ،

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

ملاحظة:

يتم تعميم إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما وهكذا يكون لدينا:
 من أجل كل أعداد حقيقية $a_1, a_2, \dots, a_n$ من $]0; +\infty[$ ،

$$\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$$

② نتائج:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ، ومن
 أجل كل عدد صحيح نسبي n ،

نتيجة ①: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ و $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

نتيجة ②: $\ln(a^n) = n \ln a$ ($n \in \mathbb{Z}$)

نتيجة ③: $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

البرهان:

ليكن a و b عددين حقيقيين من $]0; +\infty[$ ، وليكن n عدد
 صحيح نسبي؛

① $\square$ لدينا: $\ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln 1 = 0$
 $\ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$

أي: $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ إذن: $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\square$ ويكون:

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$

أي: $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ إذن: $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

② $\square$ نستعمل البرهان بالتراجع (محور المتتاليات العددية).

③ $\square$ لدينا: $\ln(\sqrt{a})^2 = \ln a$
 $\ln(\sqrt{a})^2 = 2 \ln(\sqrt{a})$

أي: $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a$ إذن: $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

(التمرين 67 ص 107: حلول المعادلات)

67 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

① $2 \ln(x - 3) = \ln 4$

(التمرين 61 ص 106: 61 حل في $\mathbb{R}$ المترجمات التالية:

① $\ln x < 1$ ② $\ln 2x > -1$

③ $\ln(2x + 3) < 5$ ④ $\ln(1 - x) \leq 2$

⑤ $\ln x > \ln(2x - 1)$ ⑥ $x \ln x - \ln x \geq 0$

الحل:

① $\ln x < 1$

لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد: $D_1 =]0; +\infty[$

معناه: $\ln x < \ln e$ أي: $0 < x < e$

إذن: $S_1 =]0; e[$

② $\ln 2x > -1$

لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد: $D_2 =]0; +\infty[$

معناه: $\ln 2x > \ln e^{-1}$

أي: $2x > e^{-1}$

إذن: $S_2 = \left] \frac{1}{2e}; +\infty \right[$

③ $\ln(2x + 3) < 5$

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 = \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$

معناه: $\ln(2x + 3) < \ln e^5$

أي: $2x + 3 < e^5$

ومنه: $0 < x < \frac{e^5 - 3}{2}$

إذن: $S_3 = \left] 0; \frac{e^5 - 3}{2} \right[$

④ $\ln(1 - x) \leq 2$

لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد: $D_4 =]-\infty; 1[$

معناه: $\ln(1 - x) \leq \ln e^2$

أي: $1 - x \leq e^2$

ومنه: $x \geq 1 - e^2$

إذن: $S_4 = [1 - e^2; 1[$

⑤ $\ln x > \ln(2x - 1)$

لتكن D_5 مجموعة تعريفها نجد:

$D_5 =]0; +\infty[\cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

معناه: $\ln x > \ln(2x - 1)$

ومنه: $x < 1$

إذن: $S_5 = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

⑥ $x \ln x - \ln x \geq 0$

لتكن D_6 مجموعة تعريفها نجد: $D_6 =]0; +\infty[$

معناه: $x \ln x - \ln x \geq 0$

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-	○	+
$\ln x$	-	○	+
$(x - 1) \ln x$	+	○	+

إذن: $S_6 =]0; +\infty[$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1 \in D_4 \\ x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3 \notin D_4 \end{cases}$$

إذن: $S_4 = \{1\}$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \quad (5)$$

لتكن D_5 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_5 =]-1; +\infty[\cap]1; +\infty[=]1; +\infty[$$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \quad \text{لدينا: } \otimes$$

$$\ln(x+1) = \ln e^{-1} + \ln(x-1) \quad \text{تكافئ:}$$

$$\ln(x+1) = \ln[e^{-1}(x-1)] \quad \text{ويكون:}$$

$$(x+1) = e^{-1}(x-1) \quad \text{أي:}$$

$$x+1 = \frac{x-1}{e} \quad \text{ومنه:}$$

$$x = \frac{-(e+1)}{e-1} \notin D_5 \quad \text{وعليه:}$$

إذن: $S_5 = \{ \}$

(التسعين) 68 ص 107: (حلول المتراجحات)

68 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$\ln(x-1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x+4) \quad (1)$$

$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \quad (2)$$

$$\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \quad (3)$$

$$\ln(35 - 8x) \geq 3 \ln 2 + \ln(x)^2 \quad (4)$$

الحل:

$$\ln(x-1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x+4) \quad (1)$$

لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_1 =]1; +\infty[\cap]-4; +\infty[=]1; +\infty[$$

$$\ln(x-1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x+4) \quad \text{لدينا: } \otimes$$

$$\ln \frac{x-1}{3} > \ln \frac{2}{x+4} \quad \text{نصبح:}$$

$$\frac{x-1}{3} > \frac{2}{x+4} \quad \text{أي:}$$

$$\frac{x-1}{3} - \frac{2}{x+4} > 0 \quad \text{معناه:}$$

$$\frac{(x-1)(x+4)-6}{3(x+4)} > 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$\frac{x^2+3x-10}{3(x+4)} > 0 \quad \text{وعليه:}$$

إذن: $S_1 =]2; +\infty[$

$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \quad (2)$$

$$D_2 = \left] \frac{5}{4}; +\infty \right[\quad \text{لتكن } D_2 \text{ مجموعة تعريفها نجد:}$$

$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \quad \text{لدينا: } \otimes$$

$$x^2 - 2x > 4x - 5 \quad \text{نصبح:}$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0 \quad \text{معناه:}$$

ندرس إشارة $x^2 - 6x + 5$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 5$	+	○	-	○	+

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \quad (2)$$

$$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad (3)$$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad (4)$$

$$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1) \quad (5)$$

الحل:

$$2 \ln(x-3) = \ln 4 \quad (1)$$

$$D_1 \text{ مجموعة تعريفها نجد: } D_1 =]3; +\infty[$$

$$2 \ln(x-3) = \ln 4 \quad \text{لدينا: } \otimes$$

$$\ln(x-3)^2 = \ln 4 \quad \text{تكافئ:}$$

$$(x-3)^2 = 4 \quad \text{أي:}$$

$$x-3 = -\sqrt{4} \text{ أو } x-3 = \sqrt{4} \quad \text{وعليه:}$$

$$x = 1 \notin D_1 \text{ أو } x = 5 \in D_1 \quad \text{ويكون:}$$

إذن: $S_1 = \{5\}$

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \quad (2)$$

لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_2 =]0; +\infty[\cap]1; +\infty[=]1; +\infty[$$

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \quad \text{لدينا: } \otimes$$

$$\ln[x \times (x-1)] = \ln(2 \times 3) \quad \text{تكافئ:}$$

$$x(x-1) = 6 \quad \text{أي:}$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

مميزها $\Delta = 1 - 4(1)(-6) = 25 > 0$ وبالتالي:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3 \in D_2 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2 \notin D_2 \end{cases}$$

إذن: $S_2 = \{3\}$

$$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad (3)$$

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_3 =]-4; +\infty[\cap]0; +\infty[=]0; +\infty[$$

$$2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x) \quad \text{لدينا: } \otimes$$

$$\ln(x)^2 = \ln[(x+4)(2x)] \quad \text{تكافئ:}$$

$$x^2 = 2x(x+4) \quad \text{ومنه:}$$

$$x(x+8) = 0 \quad \text{وعليه:}$$

$$x = -8 \notin D_3 \text{ أو } x = 0 \notin D_3 \quad \text{ويكون:}$$

إذن: $S_3 = \{ \}$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad (4)$$

لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_4 =]0; +\infty[\cap]-\infty; 4[\cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{1}{2}; 4 \right[$$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad \text{لدينا: } \otimes$$

$$\ln[x(4-x)] = \ln[3(2x-1)] \quad \text{تكافئ:}$$

$$x(4-x) = 3(2x-1) \quad \text{أي:}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

مميزها $\Delta = 4 - 4(1)(-3) = 16 > 0$ وبالتالي:

نلخص ذلك في جدول:

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	$\bigcirc$	+	
$\ln x - 1$	-	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+
الجداء	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$ +

3 إشارة العبارة $\ln x (\ln x - 1)$ على $]0; +\infty[$:

لدينا: $\ln x (\ln x - 1)$

نعلم أن: $\ln x = 0$ من أجل: $x = 1$

نضع: $\ln x - 1 = 0$ نجد: $x = e^1 = e$

نلخص ذلك في جدول:

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$	-	$\bigcirc$	+	
$\ln x - 1$	-	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+
الجداء	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$ +

4 إشارة العبارة $2x \ln(1 - x)$ على $]0; +\infty[$:

لدينا: $2x \ln(1 - x)$

معناه: $\ln(1 - x) > 0$ $1 - x > 1$ ومنه: $x < 0$

معناه: $\ln(1 - x) = 0$ $1 - x = 1$ ومنه: $x = 0$

معناه: $\ln(1 - x) < 0$ $0 < 1 - x < 1$ ومنه: $0 < x < 1$

نلخص ذلك في جدول:

x	0	1
x	-	+
$\ln(1 - x)$	-	-
$2x \ln(1 - x)$	-	-

5 إشارة العبارة $-x^2 \ln(x + 1)$ على $]0; +\infty[$:

لدينا: $-x^2 \ln(x + 1)$

معناه: $\ln(x + 1) > 0$ $x + 1 > 1$ ومنه: $x > 0$

معناه: $\ln(x + 1) = 0$ $x + 1 = 1$ ومنه: $x = 0$

معناه: $\ln(x + 1) < 0$ $0 < x + 1 < 1$ ومنه: $-1 < x < 0$

نلخص ذلك في جدول:

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x + 1)$	-	+	+	
$-\ln(x + 1)$	-	-	-	
$-x^2 \ln(x + 1)$	-	-	-	

3 دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

1 النهايات:

خواص:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad 1$$

2 الاستمرارية والاشتقاقية:

خواص:

نجد: $S_2 =]5; +\infty[$

3 $\ln x + \ln(x + 1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 =]0; +\infty[$

لدينا: $\ln x + \ln(x + 1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$

ومنه: $\ln[x(x + 1)] \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$

وعليه: $x(x + 1) \leq (x^2 - 2x + 2)$

ويكون: $x^2 + x \leq x^2 - 2x + 2$

أي: $x \leq \frac{2}{3}$

إذن: $S_3 =]0; \frac{2}{3}[$

4 $\ln(35 - 8x) \geq 3 \ln 2 + \ln(x)^2$

لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد:

$$D_4 =]-\infty; \frac{35}{8}[\cap \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; \frac{35}{8}[$$

لدينا: $\ln(35 - 8x) \geq 3 \ln 2 + \ln(x)^2$

تكافئ: $\ln(35 - 8x) \geq \ln[2^3(x)^2]$

أي: $35 - 8x \geq 8x^2$

ومنه: $8x^2 + 8x - 35 \leq 0$

ندرس إشارة $8x^2 + 8x - 35$

x	$-\infty$	$\frac{-4-\sqrt{74}}{4}$	$\frac{-4+\sqrt{74}}{4}$	$+\infty$
$8x^2 + 8x - 35$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$ +

نجد: $S_4 =]\frac{-4-\sqrt{74}}{4}; 0[\cup]0; \frac{-4+\sqrt{74}}{4}[$

التمرين 69 ص 107: (دراسة الإشارة)

69 ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0; +\infty[$:

1 $\ln x - \ln 3$ 2 $(\ln x + 1)(\ln x - 1)$

3 $\ln x (\ln x - 1)$ 4 $2x \ln(1 - x)$

5 $-x^2 \ln(x + 1)$

الحل:

1 إشارة العبارة $\ln x - \ln 3$ على $]0; +\infty[$:

لدينا: $\ln x - \ln 3 = \ln \frac{x}{3}$

معناه: $\ln \frac{x}{3} > 0$ $\frac{x}{3} > 1$ ومنه: $x > 3$

معناه: $\ln \frac{x}{3} = 0$ $\frac{x}{3} = 1$ ومنه: $x = 3$

معناه: $\ln \frac{x}{3} < 0$ $0 < \frac{x}{3} < 1$ ومنه: $0 < x < 3$

نلخص ذلك في جدول:

x	0	3	$+\infty$
$\ln x - \ln 3$	-	$\bigcirc$	+

2 إشارة العبارة $(\ln x + 1)(\ln x - 1)$ على $]0; +\infty[$:

لدينا: $(\ln x + 1)(\ln x - 1)$

نضع: $\ln x + 1 = 0$ نجد: $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

نضع: $\ln x - 1 = 0$ نجد: $x = e^1 = e$