

الحل

الجزء الأول:

(1) حساب النهايات:

• حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{-x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

المسألة

الف الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

وليكن (C_f) منحنىها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الجزء الأول:

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(4) أحسب $f(-x) + f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

(5) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) . ماذا تستنتج؟

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته: $y = x$ في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $1 < x_0 < 2$.

(7) أنشئ (D) و (C_f) .

(8) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = mx + 1$$

الجزء الثاني:

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

وليكن (C_h) منحنىها البياني في المعلم السابق.

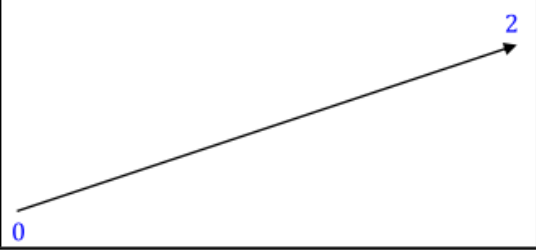
(1) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0.

(2) بين أن الدالة h زوجية.

(3) استنتج رسم المنحنى (C_h) انطلاقاً من (C_f) .



تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

(3) معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:تعطى معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 بالعلاقة:

$$(D) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

حيث:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ \text{و} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$(D) : y = x + 1$$

(4) حساب $f(-x) + f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= 1 + \frac{(-x)}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \end{aligned}$$

نجد:

$$f(-x) + f(x) = 2$$

استنتاج:

لدينا:

$$f(-x) + f(x) = 2$$

ونكتب:

$$f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$$

نستنتج أن:

النقطة $\omega(0; 1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

تذكير:

نقول عن نقطة $\omega(a; b)$ أنها مركز تناظر لمنحنى دالة f إذا كان:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $-\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا هو حامل محور الفواصل و $y = 0$ معادلة له.

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $+\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا (بوازي حامل محور الفواصل) و $y = 2$ معادلة له.(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'(x)$ حيث:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

نجد:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ و } x^2 + 1 > 0$$

ومنه:

$$\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

أي:

$$f'(x) > 0$$

إذن:

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

استنتاج:

بما أن المماس (D) يخرق المنحنى (C_f) في النقطة $\omega(0; 1)$ فإن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

(6) البرهان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته: $y = x$ في

نقطة فاصلتها x_0 حيث: $1 < x_0 < 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

أي:

$$f(x) = x$$

ونكتب:

$$f(x) - x = 0$$

ومنه:

فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x$ هي

$$\text{حلول المعادلة } f(x) - x = 0$$

نضع:

g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = f(x) - x$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$$

لأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x)$ حيث:

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} - 1$$

نجد:

$$g'(x) = \frac{1 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

دراسة إشارة الدالة المشتقة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$:

الدالة المشتقة $g'(x)$ تنعدم عند 0.

أي:

$$g'(0) = 0$$

(5) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D):

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على $\mathbb{R}$.

حيث:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - (x + 1) \\ &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - x - 1 \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - x \\ &= \frac{x - x\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

نجد:

$$f(x) - y = \frac{x(1 - \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

من أجل كل عدد حقيقي x:

لدينا:

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ x^2 + 1 &\geq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} &\geq 1 \\ -\sqrt{x^2 + 1} &\leq -1 \\ 1 - \sqrt{x^2 + 1} &\leq 0 \end{aligned}$$

$$1 - \sqrt{x^2 + 1} \leq 0$$

ولدينا:

$$\sqrt{x^2 + 1} > 0$$

ولدينا:

$$\begin{cases} x < 0 ; x \in]-\infty ; 0[\\ x > 0 ; x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$

نلخص الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$1 - \sqrt{x^2 + 1}$	-		-
$\sqrt{x^2 + 1}$	+		+
$f(x) - y = \frac{x(1 - \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}$	+		-
الوضعية	(D) يقع فوق (C_f)		(D) يقع تحت (C_f)
	(D) يخرق (C_f) في النقطة $\omega(0; 1)$		

من أجل كل عدد حقيقي x :

لدينا:

$$x^2 \geq 0$$

أي:

$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} \geq 1 \end{cases}$$

ونكتب:

$$(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$$

أي:

$$-(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \leq -1$$

نجد:

$$1 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \leq 0$$

ومنه:

$$g'(x) \leq 0$$

إذن:

الدالة g متناقصة على $\mathbb{R}$.تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x) = f(x) - x$	$+\infty$	1	$-\infty$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1; 2]$.

ولدينا:

$$g(1) = +0,707 \dots$$

$$g(2) = -0,105 \dots$$

لاحظ أن:

$$g(1) \times g(2) < 0$$

أي:

$$g(2) < 0 < g(1)$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[1; 2]$ بحيث: $g(x_0) = 0$.

لدينا من مبرهنة القيم المتوسطة:

$$g(x_0) = 0$$

أي:

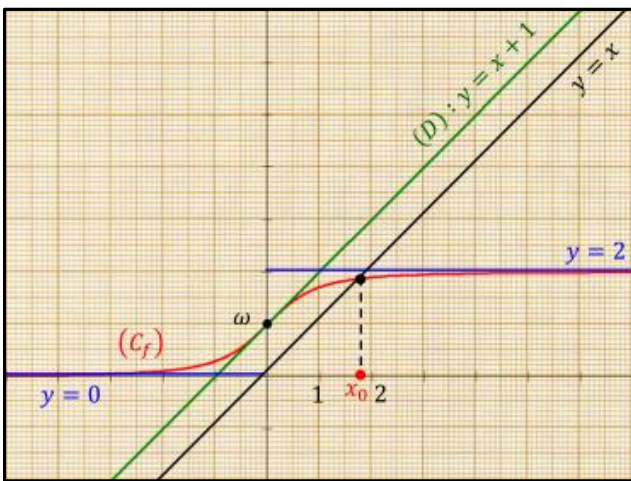
$$f(x_0) - x_0 = 0$$

ونكتب:

$$f(x_0) = x_0$$

ومنه:

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته: $y = x$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 حيث: $1 < x_0 < 2$.

(7) إنشاء (D) و (C_f) :

(8) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة:

$$f(x) = mx + 1$$

الحلول البيانية لهذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع المستقيمات (D_m) المعرفة بالمعادلة: $(D_m): y = mx + 1$

لاحظ أن:

جميع المستقيمات (D_m) تمر من النقطة $\omega(0; 1)$.وبالتالي المناقشة دورانية ومركزها النقطة $\omega(0; 1)$.الحالة الأولى: $m \in]-\infty; 0]$

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع المستقيمات (D_m) في نقطة وحيدة هي النقطة $\omega(0; 1)$.

الحالة الثانية: $m \in]0; 1]$

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع المستقيمات (D_m) في ثلاث نقط مختلفة (نقطة فاصلتها سالبة ونقطة فاصلتها معدومة $\omega(0; 1)$ ونقطة فاصلتها موجبة).

دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$= -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$= 1$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x}$$

ومنه:

الدالة h لا تقبل الاشتقاق عند القيمة 0.

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = -1$$

- المنحنى (C_h) الممثل للدالة h يقبل نصف مماس على يسار النقطة

(0 ; 1) معامل توجيه حامله هو -1 معادلته:

$$(D') : y = -x + 1$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 1$$

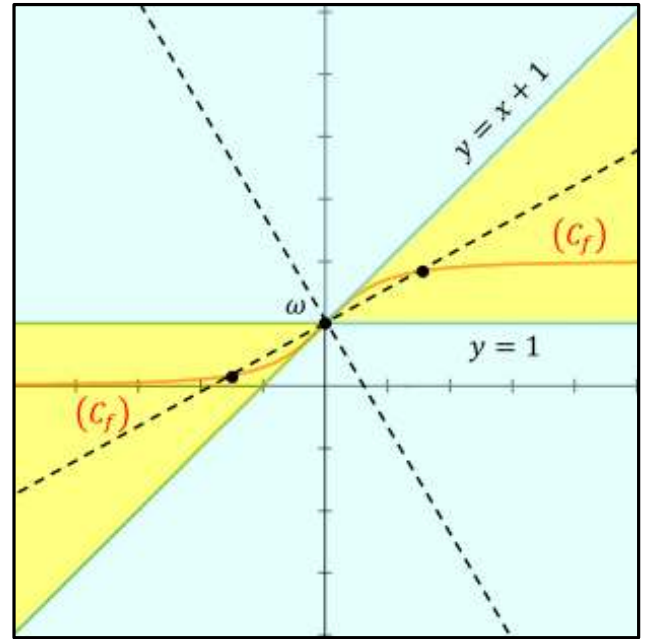
- المنحنى (C_h) الممثل للدالة h يقبل نصف مماس على يمين النقطة

(0 ; 1) معامل توجيه حامله هو 1 معادلته:

$$(D) : y = x + 1$$

الحالة الثالثة: $m \in [1 ; +\infty[$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع المستقيمات (D_m) في نقطةوحيدة هي النقطة $\omega(0 ; 1)$

النتائج موضحة في الشكل التالي:



الجزء الثاني:

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(1) دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة 0:نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{cases} h(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} ; x \leq 0 \\ h(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} ; x > 0 \end{cases}$$

حيث:

$$h(0) = 1$$

دراسة استمرارية الدالة h عند القيمة 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] = 1 = h(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] = 1 = h(0)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$$

ومنه:

الدالة h مستمرة عند القيمة 0.

(2) البرهان أن الدالة h زوجية:تكون الدالة h زوجية إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x :

$$h(-x) = h(x)$$

لدينا:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 1 + \frac{|-x|}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \\ &= 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

لأن:

$$(-x)^2 = x^2 \text{ و } |-x| = |x|$$

ومنه:

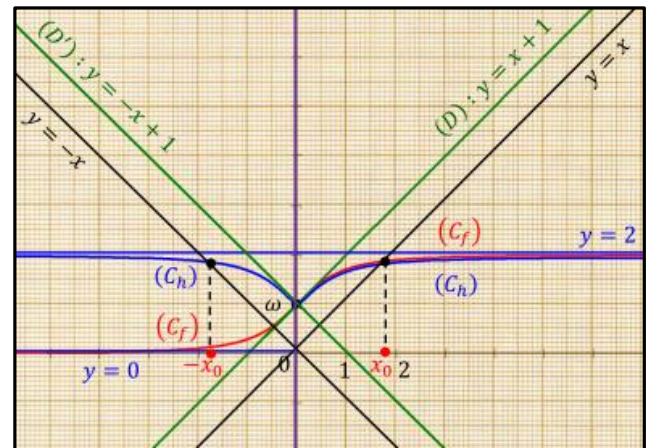
 h دالة زوجية.**(3) استنتاج رسم المنحنى (C_h) انطلاقاً من (C_f) :**بما أن h دالة زوجية فإن محور الترتيب هو محور تناظر بالنسبة للمنحنىالبياني (C_h) الممثل للدالة h .

ولدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$:

$$h(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x)$$

ومنه:

- على المجال $]0; +\infty[$ ، المنحنى البياني (C_h) الممثل للدالة h ينطبقعلى المنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f (لأن: $h(x) = f(x)$).- على المجال $]0; -\infty[$ ، المنحنى البياني (C_h) الممثل للدالة h هو نظيرالمنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f بالنسبة لمحور الترتيب.

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عبد الحميد