

الملخص الشامل في الأعداد والحساب

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف : ليكن a و b عددين صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول b مضاعف للعدد a .

أمثلة :

4 يقسم 48 لأن $48 = 12 \times 4$ ، ونكتب $4|48$ وأيضا $12|48$.

-5 يقسم 2025 لأن $2025 = (-405) \times (-5)$ ، ونكتب $-5|2025$ وأيضا $-405|2025$.

خواص :

① a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة. إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

② 3 يقسم 6 و 6 يقسم 18 ، إذن 3 يقسم 18 .

③ a و b عددين صحيحان و a غير معدوم. إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، mb يقسم a .

④ 2 يقسم 6 و عليه 2 يقسم 6×5 ، 3 يقسم 9 و عليه 3 يقسم $9 \times (-4)$.

⑤ a و b عددين صحيحان و a غير معدوم.



إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb .

⑥ 4 يقسم 8 و عليه 4 يقسم 4×5 ، 5 يقسم 10 و عليه 5 يقسم 5×8 .

⑦ a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، $mb + nc$ يقسم a .

⑧ 7 يقسم 14 و 21 ومنه 7 يقسم $21 \times 8 + 14 \times 3$.

تمرين تطبيقي : n عدد طبيعي غير معدوم ، عين قيم n في كل حالة من الحالات التالية :

① 6 يقسم $(3n - 6)$.

② $(3n + 5)$ قاسم للعدد 8 .

③ $(2n + 27)$ مضاعف لـ $(n + 1)$.

④ $\frac{10n-4}{3n+1} \in \mathbb{N}$.

⑤ $\frac{3n^2+6n+4}{n+4} \in \mathbb{N}$.

حل التمرين التطبيقي :

- ① 6 يقسم $3n - 6$ معناه يوجد عدد طبيعي k حيث : $3n - 6 = 6k$ ، ومنه : $n = 2k + 2$.
- ② $3n + 5$ قاسم للعدد 8 معناه $3n + 5 \in \{1; 2; 4; 8\}$ ، ومنه $3n \in \{-4; -3; -1; 3\}$.
- بالقسمة على 3 مع مراعاة أن n عدد طبيعي نستنتج أن : $n = 1$.
- ③ $2n + 27$ مضاعف لـ $n + 1$ ومنه :
- أي أن : $n + 1 | 2n + 27$ ، وبالتالي : $\begin{cases} n + 1 | 2n + 27 \\ n + 1 | -2(n + 1) \end{cases}$ ، أي : $n + 1 | 2n + 27 - 2(n + 1)$.
- أي أن : $n + 1 | 25$ ، ومنه $n + 1 \in \{1; 5; 25\}$ ، ومنه $n \in \{4; 24\}$.
- ④ $\frac{10n-4}{3n+1} \in \mathbb{N}$ معناه $3n + 1 | 10n - 4$ ، وبالتالي : $\begin{cases} 3n + 1 | 10n - 4 \\ 3n + 1 | 3n + 1 \end{cases}$ ، ومنه : $\begin{cases} 3n + 1 | -3(10n - 4) \\ 3n + 1 | 10(3n + 1) \end{cases}$ ، ومنه $3n + 1 | 10(3n + 1) - 3(10n - 4)$ ، ومنه $3n + 1 | 22$ ، ومنه $3n + 1 \in \{1; 2; 11; 22\}$ ، ومنه $n = 7$.
- ⑤ $\frac{3n^2+6n+4}{n+4} \in \mathbb{N}$ معناه $n + 4 | 3n^2 + 6n + 4$.
- بملاحظة أن : $3n^2 + 6n + 4 = (3n - 6)(n + 4) + 28$.
- لدينا : $\begin{cases} n + 4 | 3n^2 + 6n + 4 \\ n + 4 | (n + 4)(3n - 6) \end{cases}$ ، ومنه : $\begin{cases} n + 4 | 3n^2 + 6n + 4 \\ n + 4 | (n + 4)(3n - 6) \end{cases}$ ، ومنه $n + 4 | 28$ ، ومنه $n + 4 | 3n^2 + 6n + 4 - (n + 4)(3n - 6)$ ، ومنه : $(n + 4) \in \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$ ، ومنه $n \in \{3; 10; 24\}$.

ملاحظات :

في $\mathbb{Z}$ العددين a و $-a$ لهما نفس القواسم . مجموعة قواسم العدد 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تمرين تطبيقي :

a و b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a = 7n - 4$ و $b = 9n + 3$.

بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 56 .

حل التمرين التطبيقي :

ليكن d هو قاسم مشترك للعددين a و b ، لدينا :

$$\begin{cases} d | 7n - 4 \\ d | 9n + 3 \end{cases} \text{ ، ومنه } \begin{cases} d | (7n - 4)(-9) \\ d | (9n + 3)(7) \end{cases} \text{ ، ومنه } d | (7n - 4)(-9) + 7(9n + 3) \text{ ، أي } d | 56 .$$

تمرين تطبيقي :

برهن أنه إذا كان 2 يقسم $a^2 + b^2$ فإن 2 يقسم $(a + b)^2$.

حل التمرين التطبيقي :

نعلم أن : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

لدينا من جهة (1) $2 | a^2 + b^2$ ، ومن جهة أخرى (2) $2 | 2ab$.

بجمع (1) مع (2) نجد $2 | a^2 + b^2 + 2ab$ ، أي أن $2 | (a + b)^2$.

مبرهنة: ليكن a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الصحيحة حيث: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q, r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على b . يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b .

مثال: a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 8.

لنعين باقي قسمته على 5 وعلى 2.

لدينا $a = 10k + 8$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه $a = 5(2k + 1) + 3$ ، ومنه باقي قسمة a على 5 هي 3.

لدينا $a = 10k + 8$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه $a = 2(5k + 4) + 0$ ، ومنه باقي قسمة a على 2 هي 0.

القاسم المشترك الأكبر لعددین طبيعین PGCD:

a و b عددان طبيعيان غير معدومان، D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب.

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ونرمز له بـ $PGCD(a, b)$.

ملاحظات:

$PGCD(a, a) = a$ ، $PGCD(1, a) = 1$ ، $PGCD(0, a) = a$ و a غير معدوم.

تمرین تطبیقي:

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n - 1$ و $n^2 + n + 3$.

① بين أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$ ، ② استنتج أن a يقسم $3n + 2$.

③ بين إذن أن a يقسم 5، ④ ماهي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a .

حل التمرین التطبیقي:

① تبیین أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$: نعلم أن $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$

لدينا $\begin{cases} a|n - 1 \\ n - 1|(n - 1)^2 \end{cases}$ ومنه بالتعدي نجد $a|(n - 1)^2$ ، ومنه $a|n^2 - 2n + 1$.

② استنتج أن a يقسم $3n + 2$.

لدينا $\begin{cases} a|n^2 + n + 3 \\ a|n^2 - 2n + 1 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} a|(n^2 + n + 3)(1) \\ a|(n^2 - 2n + 1)(-1) \end{cases}$ ، ومنه $a|n^2 + n + 3 - n^2 + 2n - 1$

ومنه $a|3n + 2$ ، وهو المطلوب.

③ تبیین إذن أن a يقسم 5: لدينا $\begin{cases} a|n - 1 \\ a|3n + 2 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} a|(n - 1)(-3) \\ a|(3n + 2)(1) \end{cases}$.

ومنه $a|5$ ، منه $a|-3n+3+3n+2$.

④ القيم الصحيحة الممكنة للعدد a : هي القواسم الصحيحة للعدد 5 أي أن :
 $a \in \{-5; -1; 1; 5\}$

خواص :

① a و b عددان طبيعيين غير معدومان حيث $a \geq b$ ، r باقي قسمة a على b .

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$$

② القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسومات المتتالية لخوارزمية إقليدس .



③ a و b عددان طبيعيين غير معدومان ، k عدد طبيعي غير معدوم ، لدينا :

$$PGCD(ka, kb) = kPGCD(a, b)$$

④ إذا كان $PGCD(a, b) = d$ ، فإن $d|a$ و $d|b$ أيضا :

$$\begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$$

تمرين تطبيقي :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} a + b = 66 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases}$

حل التمرين التطبيقي :

لدينا : $d = 6$ ، ومنه $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $6a' + 6b' = 66$ ، ومنه $a' + b' = 11$

a'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b'	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
b	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6

ومنه الثنائيات (a, b) هي :

$$(a, b) = \{(6, 60), (12, 54), (18, 48), (24, 42), (30, 36), (36, 30), (42, 24), (48, 18), (54, 12), (60, 6)\}$$

تمرين تطبيقي :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} a \times b = 900 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases}$

حل التمرين التطبيقي :

لدينا $d = 5$ ، ومنه $\begin{cases} a = 5a' \\ b = 5b' \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $5a' \times 5b' = 900$ ، ومنه $a' \times b' = 36$

a'	1	2	3	4	6	9	12	18	36
b'	36	18	12	9	6	4	3	2	1
a	5			20		45			180
b	180			45		20			5

ومنه الثنائيات (a, b) هي :

$$(a, b) = \{(5, 180), (20, 45), (45, 20), (180, 5)\}$$

الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم.

القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n ، ونرمز $a \equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n .

أمثلة :

$$-91 \equiv 9[10] \quad , \quad -59 \equiv -3[8] \quad , \quad 58 \equiv 25[11] \quad , \quad 83 \equiv 43[5]$$

ملاحظة : من أجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0[1]$.

مبرهنة : n عدد طبيعي غير معدوم ، a و b عددان صحيحان.

a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعف لـ n .

مثال : $28 \equiv 13[5]$ لأن $28 - 13 = 15$ و 15 مضاعف لـ 5 .

خواص :

- ① n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ($n \geq 2$) . كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n
- ② n عدد طبيعي غير معدوم . من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$.
- ③ n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$.
- ④ n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$
- ⑤ n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$
- ⑥ n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $ac \equiv bd[n]$
- ⑦ n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان ، من أجل كل عدد صحيح k ،
إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$.
- ⑧ n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان ، من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $ka \equiv kb[n]$ و $PGCD(k, n) = 1$ فإن $a \equiv b[n]$.
- ⑨ n و p عددان طبيعيين غير معدومين . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$



تمرين : a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.

- ① عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7 .
- ② عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7 .
- ③ أ / تحقق أن $b \equiv -1[7]$.

ب / استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2025} و b^{1446} على 7 .

④ عين الأعداد الطبيعية n بحيث : $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$.

حل التمرين :

① تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7 .

لدينا $a \equiv 2[7]$ ومنه $3a \equiv 6[7]$ ، ولدينا $b \equiv 6[7]$ ، ومنه نستنتج أن $3a + b \equiv 12[7]$.

أي أن $3a + b \equiv 5[7]$ ، ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7 هو 5 .

② تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7 .

لدينا $a \equiv 2[7]$ ومنه $a^2 \equiv 4[7]$ (1) .

ولدينا $b \equiv 6[7]$ ، ومنه $b^2 \equiv 36[7]$ ، ومنه $b^2 \equiv 1[7]$ ، ومنه $3b^2 \equiv 3[7]$ (2) .

بجمع (1) مع (2) نجد $a^2 + 3b^2 \equiv 7[7]$ ، ومنه $a^2 + 3b^2 \equiv 0[7]$.

ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7 هو 0 أي أن العدد $a^2 + 3b^2$ مضاعف للعدد 7 .

③ أ / التحقق أن $b \equiv -1[7]$.

لدينا من جهة $b \equiv 6[7]$ ، ومن جهة أخرى $-1[7] \equiv 6$ ، ومنه بالتعدي $b \equiv -1[7]$.

ب / استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2025} و b^{1446} على 7 .

لدينا $b \equiv -1[7]$ ، ومنه $b^{2025} \equiv (-1)^{2025}[7]$ ، ومنه $b^{2025} \equiv -1[7]$ ، أي $b^{2025} \equiv 6[7]$.

لدينا $b \equiv -1[7]$ ، ومنه $b^{1446} \equiv (-1)^{1446}[7]$ ، ومنه $b^{1446} \equiv 1[7]$.

④ تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث : $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$.

لدينا $a + b \equiv 8[7]$ ، ومنه $a + b \equiv 1[7]$ ، ومنه $(a + b)^n \equiv 1[7]$ ، ومنه بالتعويض نجد :

$1 + n \equiv 0[7]$ ، ومنه $n \equiv -1[7]$ ، ومنه $n \equiv 6[7]$ ، ومنه $n = 7k + 6$ ، حيث $k \in \mathbb{N}$.

تمرين :

① جد باقي قسمة العدد 4^5 على 11 .

② استنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد : 37^{5k} ، 37^{5k+1} ، 37^{5k+2} ، 37^{5k+3} ، 37^{5k+4} .

مع $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين :

① إيجاد باقي قسمة العدد 4^5 على 11 .

لدينا $4^5 = 1024$ ، وكما نعلم أن $1024 = 11 \times 93 + 1$ ، ومنه $4^5 \equiv 1[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 4^5 على 11 هو 1 .

② استنتاج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد :

لدينا $37 \equiv 4[11]$ ، ومنه $37^5 \equiv 4^5[11]$ ، ومنه $37^5 \equiv 1[11]$ ، ومنه $37^{5k} \equiv 1[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k} على 11 هو 1 .

لدينا : $\begin{cases} 37^{5k} \equiv 1[11] \\ 37 \equiv 4[11] \end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+1} \equiv 4[11]$ ، ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+1} على 11 هو 4 .

لدينا : $\begin{cases} 37^{5k+1} \equiv 4[11] \\ 37 \equiv 4[11] \end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+2} \equiv 16[11]$ ، ومنه $37^{5k+2} \equiv 5[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+2} على 11 هو 5 .

لدينا : $\begin{cases} 37^{5k+2} \equiv 5[11] \\ 37 \equiv 4[11] \end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+3} \equiv 20[11]$ ، ومنه $37^{5k+3} \equiv 9[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+3} على 11 هو 9 .

لدينا : $\begin{cases} 37^{5k+3} \equiv 9[11] \\ 37 \equiv 4[11] \end{cases}$ ، ومنه $37^{5k+4} \equiv 36[11]$ ، ومنه $37^{5k+4} \equiv 3[11]$.

ومنه باقي قسمة العدد 37^{5k+4} على 11 هو 3 .

تمرين :

① عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

② استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{1446} على 5 .

حل التمرين :

① تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

$$n = 0 \text{ ، إذن } 3^0 \equiv 1[5]$$

$$n = 1 \text{ ، إذن } 3^1 \equiv 3[5]$$

$$n = 2 \text{ ، إذن } 3^2 \equiv 4[5] \text{ ، ومنه بواقي القسمة الإقليدية للعدد } 3^n \text{ على 5 تشكل متتالية دورية}$$

$$n = 3 \text{ ، إذن } 3^3 \equiv 2[5] \text{ دورها 4 أي دور القسمة هو من الشكل } 4k \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$n = 4 \text{ ، إذن } 3^4 \equiv 1[5]$$

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$n \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]

② استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{1446} على 5 .

لدينا : $1446 = 4 \times 361 + 2$ ، هي من الشكل $4k + 2$ ، ومنه من الجدول نستنتج أن $3^{1446} \equiv 4[5]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{1446} على 5 هو 4 .

خاصية: ليكن x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

ولتكن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد طبيعية أصغر تماما من x .

القول أن عدد N يكتب $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ في النظام ذي الأساس x يعني :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + \dots + a_2 \times x^2 + a_1 \times x^1 + a_0$$

ملاحظات :

- ❖ يمثل كل عدد طبيعي أصغر تماما من x برمز وحيد يسمى رقما .
- ❖ في كل نظام تعداد ذي الأساس x ، الرقمان 0 و 1 يمثلان على الترتيب العددين << صفر >> و << واحد >> .
- ❖ مهما يكن الأساس x لدينا $x = 1 \times x + 0$ ، وعليه فإن العدد x يكتب في النظام ذي الأساس x هكذا $\overline{10}$.
- ❖ عندما يكون الأساس << عشرة >> يكتب العدد N كمايلي : $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ عوضا عن $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$.
- ❖ النظام العشري : هو النظام المستعمل لدى البشر أساسه 10 وأرقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 .
- ❖ النظام الثنائي : هو النظام المستعمل لدى الآلات أساسه 2 وأرقامه 0 ، 1 .

تطبيق :

- ① عدد طبيعي يكتب $\overline{512^8}$ في النظام ذو الأساس 8 ، أكتب a في النظام العشري .
- ② عدد طبيعي يكتب $\overline{3104^5}$ في النظام ذو الأساس 5 ، أكتب b في النظام العشري .

حل التطبيق :

- ① لدينا : $a = \overline{512^8} = 5 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 330$ ، ومنه a يكتب 330 في النظام العشري .
- ② لدينا : $b = \overline{3104^5} = 3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 4 \times 5^0 = 404$ ، ومنه b يكتب 404 في النظام العشري .

الانتقال من الأساس x إلى الأساس y

N عدد طبيعي مكتوب في نظام أساسه x ، لكتابته في نظام أساسه y .

- 1- نحول N من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري .
- 2- نحول N من النظام العشري إلى النظام الذي أساسه y .

تطبيق : أكتب العدد 2007 في نظام التعداد ذي الأساس 8 .

$$\begin{array}{r|l} 2007 & 8 \\ \hline 250 & 8 \\ 7 & 2 \\ 31 & 8 \\ 7 & 3 \\ 3 & 8 \\ 0 & \end{array}$$

$$2007 = \overline{3727^8} \text{ ومنه}$$

تطبيق : a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}^8$ في النظام ذو الأساس 8 .

① أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين :

أ/ بالمرور بالنظام العشري .

ب/ مباشرة .

② أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة

حل التطبيق :

① أ/ بالمرور بالنظام العشري .

$$a = \overline{643}^8 = 6 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 419$$

لكتابة 419 في النظام ذي الأساس 2 :

نقوم بعملية القسمة الإقليدية التكرارية حتى يصبح حاصل القسمة معدوم.

نقوم بترتيب بواقي القسمة الناتجة من آخر باقي تحصلنا عليه إلى أول باقي .

$$a = 419 = \overline{110100011}^2 \text{ فينتج في الأخير}$$

$$\begin{array}{r} 419 \div 2 = 209 \text{ ر } 1 \\ 209 \div 2 = 104 \text{ ر } 1 \\ 104 \div 2 = 52 \text{ ر } 0 \\ 52 \div 2 = 26 \text{ ر } 0 \\ 26 \div 2 = 13 \text{ ر } 0 \\ 13 \div 2 = 6 \text{ ر } 1 \\ 6 \div 2 = 3 \text{ ر } 0 \\ 3 \div 2 = 1 \text{ ر } 1 \\ 1 \div 2 = 0 \text{ ر } 1 \end{array}$$

ب/ مباشرة . لدينا :

$$\begin{aligned} a = \overline{643}^8 &= 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 \\ &= 3 \times 2 \times (2^3)^2 + 2^2 \times 2^3 + 2 + 1 \\ &= 3 \times 2 \times 2^6 + 2^5 + 2 + 1 \\ &= 3 \times 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \\ &= (1 + 2) \times 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \\ &= 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$a = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

ومنه a يكتب $\overline{110100011}^2$ في النظام ذي الأساس 2 .

② كتابة a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

$$\begin{aligned} a = \overline{643}^8 &= 6 \times 8^2 + 4 \times 8 + 3 \\ &= 6 \times (2 \times 4)^2 + 4 \times 4 \times 2 + 3 \\ &= 6 \times 2^2 \times 4^2 + 4 \times 4 \times 2 + 3 \\ &= 6 \times 4^3 + 4^2 \times 2 + 3 \\ &= (2 + 4) \times 4^3 + 4^2 \times 2 + 3 \end{aligned}$$

$$= 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 3$$

$$a = 1 \times 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 0 \times 4 + 3 \quad \text{ومنه :}$$

إذن a يكتب 12203^4 في النظام ذي الأساس 4 .

تطبيق : العددان 6043^x و 135^x مكتوبان في النظام ذو الأساس x .

① ماهي أصغر قيمة ممكنة للعدد x .

② أنشر العددين وفق الأساس x .

حل التطبيق :

① أصغر قيمة ممكنة للعدد x .

نلاحظ أن أكبر رقم في العددين هو 6 ، هذا يعني أن $x > 6$ ، ومنه أصغر قيمة لـ x هي 7 .

② نشر العددين وفق الأساس x .

$$6043^x = 6x^3 + 4x + 3$$

$$135^x = x^2 + 3x + 5$$

تطبيق : n عدد طبيعي يكتب في النظام الثنائي 1101101^2 .

ماهو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كمايلي 214 ؟

حل التطبيق :

$$1101101^2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 = 109$$
 لدينا من جهة :

$$214^x = 2x^2 + x + 4 \quad \text{ومنه :} \quad x > 4 \quad \text{حيث}$$

$$2x^2 + x + 4 = 109 \quad \text{ومنه :} \quad 2x^2 + x - 105 = 0$$

$$\Delta = 841 > 0 \quad \text{لدينا} \quad x_2 = 7 ; x_1 = \frac{15}{2}$$

$$1101101^2 = 214^7 \quad \text{وعليه} \quad 7 \quad \text{هو} \quad n \quad \text{كمايلي} \quad 214 \quad \text{فإن أساس التعداد الذي يكتب فيه} \quad n \quad \text{هو} \quad \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$$

تعريف: القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N} : 1$ و n نفسه .

ملاحظات :

- ❖ العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم.
- ❖ العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسما واحدا فقط هو 1 .
- ❖ العدد 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي (أصغر عدد أولي) .
- ❖ 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 هي الأعداد الأولية الأصغر من 30 .

خواص :

- ① كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .
- ② كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث : $a \leq \sqrt{n}$.
- ③ مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية .

طريقة : لمعرفة ما إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوليا أم لا ، نقوم بحساب $\sqrt{n}$.

- 1- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
 - 2- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب
- ❖ إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقر أن n غير أولي .
 - ❖ إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقر أن n أولي .



تطبيق : في كل حالة أذكر إن كان العدد أوليا أم لا : 341 ، 149 ، 961

حل التطبيق :

- ✍ لدينا : $31 = \sqrt{961}$ ومنه 961 مربع تام وبالتالي 961 غير أولي .
- ✍ لدينا : $12,2 \simeq \sqrt{149}$ ومنه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{149}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 .
وبما أن العدد 149 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ومنه 149 عدد أولي .
- ✍ لدينا : $18,46 \simeq \sqrt{341}$ ومنه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{341}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 .
لكن $341 = 11 \times 31$ أي أن 341 يقبل القسمة على 11 ، وبالتالي 341 غير أولي .

المضاعف المشترك الأصغر لعددین طبيعین PPCM :

a و b عددان طبيعيان غير معدومان ، M_a مجموعة مضاعفات a و M_b مجموعة مضاعفات b .
 $M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b . يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ بالمضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له بـ $PPCM(a, b)$

أمثلة :

- ❖ مجموعة مضاعفات 3 هي : $M_3 = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; \dots\}$
- ❖ مجموعة مضاعفات 6 هي : $M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; \dots\}$
- إذن $PPCM(3,6) = 6$ ، وبالتالي $M_3 \cap M_6 = \{0; 6; 12; 18; 24; \dots\}$

خواص :

- a و b عدنان طبيعيان غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم ، لدينا :
- 1 $PPCM(0, a) = 0$ ، $PPCM(1, a) = a$ ، $PPCM(a, a) = a$
 - 2 إذا كان b يقسم a فإن $PPCM(a, b) = a$
 - 3 $PPCM(ka, kb) = k \times PPCM(a, b)$
 - 4 إذا كان a يقسم c و b يقسم c فإن $PPCM(a, b)$ يقسم c



نتيجة مهمة : تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين

a و b عدنان صحيحين غير معدومين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث : $m = PPCM(|a|, |b|)$

حساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر والعلاقة بينهما :

❖ لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 .
نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة مرة واحدة وبأصغر أس ونحسب جداءها .

❖ لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماماً من 1 .
نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة مرة واحدة وبأكبر أس ونحسب جداءها .

❖ a و b عدنان طبيعيان كلاهما أكبر تماماً من 1 ، إذن : $PPCM(a, b) \times PGCD(a, b) = a \times b$

تطبيق : أوجد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين : 825 و 7865 .

حل التطبيق :

لدينا : $825 = 3 \times 5^2 \times 11$ ، و $7865 = 5 \times 11^2 \times 13$

ومنه : $PGCD(7865, 825) = 5 \times 11 = 55$

و : $PPCM(7865, 825) = 3 \times 5^2 \times 11^2 \times 13 = 117975$

تطبيق : عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حلول الجملة : $\begin{cases} a \times b = 18000 \\ PPCM(a, b) = 600 \end{cases}$

حل التطبيق :

لدينا : $\begin{cases} PGCD(a, b) = d \\ PPCM(a, b) = m \end{cases}$ ، ونعلم أن : $m \times d = a \times b$ ، أي أن $d = \frac{a \times b}{m}$ ، أي $d = \frac{18000}{600} = 30$ ،
ومنه : $PGCD(a, b) = 30$

نضع : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ ، ومنه ، $a \times b = 18000$ ، أي أن $da' \times db' = 18000$.

أي أن : $900 \times a' \times b' = 18000$ ، ومنه $a' \times b' = 20$

a'	1	2	4	5	10	20
b'	20	10	5	4	2	1
a	30		120	150		600
b	600		150	120		30

ومنه الثنائيات (a, b) هي : $(a, b) = \{(30; 600), (120, 150), (150, 120), (600, 300)\}$

مبرهنة بيزو

مبرهنة : يكون عدنان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدنان صحيحان u و v بحيث : $au + bv = 1$.

مثال : من أجل $a = 9$ و $b = 4$ ، $PGCD(9, 4) = 1$ لدينا :

$$9 \times (-3) + 4 \times 7 = 1 \quad , \quad 9 \times 1 + 4 \times (-2) = 1$$

نلاحظ أن الثنائية (u, v) ليست وحيدة .

خواص :

① إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عدنان صحيحان u و v بحيث : $au + bv = d$.



② إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

③ إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

④ إذا كان $PGCD(a, b) = 1$ فإن $PGCD(a, b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

⑤ إذا كان $PGCD(a, b) = 1$ فإن $PGCD(a^n, b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

تمرين : ليكن n عددا صحيحا .

① أثبت أن $n + 1$ و $2n + 3$ أوليان فيما بينهما .

② أثبت أن $n + 1$ و $3n + 4$ أوليان فيما بينهما .

③ استنتج أن $n + 1$ و $6n^2 + 17n + 12$ أوليان فيما بينهما .

حل التمرين :

① اثبات أن $n + 1$ و $2n + 3$ أوليان فيما بينهما .

$$-2(n + 1) + 1(2n + 3) = 1$$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن $n + 1$ و $2n + 3$ أوليان فيما بينهما لأنه يوجد ثنائية $(u, v) = (-2, 1)$.

② اثبات أن $n + 1$ و $3n + 4$ أوليان فيما بينهما .

$$-3(n + 1) + 1(3n + 4) = 1$$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن $n + 1$ و $3n + 4$ أوليان فيما بينهما لأنه يوجد ثنائية $(u, v) = (-3, 1)$.

③ استنتاج أن $n + 1$ و $6n^2 + 17n + 12$ أوليان فيما بينهما .

$$\text{لدينا : } (2n + 3)(3n + 4) = 6n^2 + 17n + 12$$

تذكير : إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

بما أن $n + 1$ و $2n + 3$ أوليان فيما بينهما . و $n + 1$ و $3n + 4$ أوليان فيما بينهما .

فإن $n + 1$ أولي مع جدائهما ، أي أن $n + 1$ أولي مع $6n^2 + 17n + 12$.

مبرهنة غوص

مبرهنة : a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أولي مع b فإن a يقسم مع c .

خواص :



① a ، b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .

إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b .

② a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .

إذا كان a مضاعف لـ b و c وكان b و c أوليان فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

تطبيق :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) \dots 11x - 5y = 14$ ذات المجهولين الصحيحين x و y .

① تحقق أن الثنائية $(19; 39)$ حلا للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها .

② بين انه توجد ثنائية وحيدة $(x_0; y_0)$ حلا للمعادلة (E) مع $0 < x_0 < 5$.

حل التطبيق :

① التحقق أن الثنائية $(19; 39)$ حلا للمعادلة (E) .

لدينا : $11(19) - 5(39) = 209 - 195 = 14$ ، ومنه الثنائية $(19; 39)$ حلا للمعادلة (E) .

❖ استنتاج مجموعة حلولها .

لدينا : $\begin{cases} 11x - 5y = 14 \\ 11(19) - 5(39) = 14 \end{cases}$ بالطرح نجد $11(x - 19) - 5(y - 39) = 0$.

ومنه $11(x - 19) = 5(y - 39)$.

لدينا : $\begin{cases} 11|5(y - 39) \\ PGCD(11; 5) = 1 \end{cases}$ ، ومنه حسب مبرهن غوص فإن $11|y - 39$ ، ومنه $y = 11k + 39$.

لدينا : $\begin{cases} 5|11(x - 19) \\ PGCD(11; 5) = 1 \end{cases}$ ، ومنه حسب مبرهن غوص فإن $5|x - 19$ ، ومنه $x = 5k + 19$.

إذن مجموعة حلول (E) هي : $\{(5k + 19; 11k + 39)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تمارين محلولة من الكتاب المدرسي :

تمارين حول قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تمرين 9 : عين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها 13 قاسما للعدد $n + 4$ و $|n| < 22$.

حل التمرين 9 :

13 قاسما للعدد $n + 4$ ، معناه يوجد عدد صحيح k بحيث : $n + 4 = 13k$ ، أي أن : $n = 13k - 4$.
لدينا : $|n| < 22$ معناه $-22 < |n| < 22$ ، يكافئ $-24 < 13k < 26$ ، ومعناه $-\frac{24}{13} < k < 2$.
أي أن : $k \in \{-1; 0; 1\}$ ، منه $n \in \{-17; -4; 9\}$.

تمرين 10 : عين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n + 7$ قاسما لـ 12 .

حل التمرين 10 :

$5n + 7$ قاسما لـ 12 معناه $(5n + 7) \in \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
ومنه $5n \in \{-19; -13; -11; -10; -9; -8; -6; -5; -4; -3; -1; 5\}$
بالقسمة على 5 مع مراعاة أن n عدد صحيح نجد أن : $n \in \{-2; -1; 1\}$.

تمرين 11 : عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n التي من أجلها يكون العدد $n + 6$ يقبل القسمة على n .

حل التمرين 11 :

$n + 6$ يقبل القسمة على n ، معناه يوجد عدد طبيعي k بحيث : $n + 6 = nk$ ، يكافئ $6 = n(k - 1)$.
إذن : n يقسم 6 ، وبالتالي $n \in \{1; 2; 3; 6\}$. وبالعكس كل القيم المعينة تحقق المطلوب .

تمرين 12 : أ/ عين الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n + 6$ يقسم 34 .

ب / عين كل الأعداد الصحيحة n التي من أجلها $5n + 6$ قاسما للعدد $n + 8$.

حل التمرين 12 :

أ/ $5n + 6$ يقسم 34 معناه $5n + 6 \in \{-34; -17; -2; -1; 1; 2; 17; 34\}$.

ومنه $5n \in \{-40; -23; -8; -7; -5; -4; 11; 28\}$.

بالقسمة على 5 مع مراعاة أن n عدد صحيح نجد أن : $n \in \{-8; -1\}$.

ب / $5n + 6$ قاسما للعدد $n + 8$ ، ومنه $5n + 6$ يقسم $5(n + 8)$ ، أي أن $5n + 6$ يقسم $5n + 40$

وبما أن $5n + 6$ يقسم $5n + 6$ فإن $5n + 6$ يقسم $(5n + 40) - (5n + 6)$ أي أن $5n + 6$ يقسم 34

ومنه $n = -8$ أو $n = -1$.

وبالعكس إذا كان $n = -1$ فإن 1 يقسم 7 .

وإذا كان $n = -8$ فإن -34 يقسم 0 .

تمرين 13 : n عدد صحيح . نضع $a = 3n + 7$ و $b = n + 1$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يكون قاسما للعدد 4 .

حل التمرين 13 :

إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يقسم a و $3b$ ، ومنه d يقسم $a - 3b$ ، ومنه d يقسم 4

تمرين 14 : n عدد صحيح . نضع $a = 3n + 7$ و $b = 7n + 2$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يكون قاسما للعدد 43 .

حل التمرين 14 :

إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يقسم $7a$ و $3b$ ، ومنه d يقسم $7a - 3b$ ، ومنه d يقسم 43

تمرين 15 : n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن العدد 1 .

عين بدلالة n بعض القواسم للعدد $n^3 - n$.

حل التمرين 15 :

لدينا : $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ ، ومنه بعض القواسم للعدد $n^3 - n$ هي :

1 ، $n - 1$ ، $n + 1$ ، $n^2 - n$ ، $n^2 + n$ ، $n^2 - 1$ ، $n^3 - n$.

تمارين حول القسمة الإقليدية

تمرين 20 : a و b عددان طبيعيين غير معدومين حيث حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على b هو 17

و باقيها هو 3 ، و $a - 27 = 23b$. عين a و b .

حل التمرين 20 :

حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على b هو 17 و باقيها هو 3 معناه : $(1) \ a = 17b + 3$ و $b > 3$

ولدينا $a - 27 = 23b$ ، معناه $(2) \ a = 23b + 27$

بطرح (2) من (1) نجد $6b - 24 = 0$ ، ومنه $b = 4$ و $a = 71$.

تمرين 37 :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a + b = 72 \\ PGCD(a, b) = 9 \end{cases}$

حل التمرين 37 :

لدينا : $d = 9$ ، ومنه $\begin{cases} a = 9a' \\ b = 9b' \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $9a' + 9b' = 72$ ، ومنه $a' + b' = 8$

a'	1	2	3	4	5	6	7
b'	7	6	5	4	3	2	1
a	9		27		45		63
b	63		45		27		9

ومنه الثنائيات (a, b) هي : $(a, b) \in \{(9, 63); (27, 45); (45, 27); (63, 9)\}$

تمرين 38 :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases}$

حل التمرين 38 :

لدينا : $d = 84$ ، ومنه $\begin{cases} a = 84a' \\ b = 84b' \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $84a' + 84b' = 420$ ، ومنه $a' + b' = 8$.

a'	1	2	3	4
b'	4	3	2	1
a	84	168	252	336
b	336	252	168	84

ومنه الثنائيات (a, b) هي : $(84, 336); (168, 252); (252, 168); (336, 84)$.

تمرين 39 :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases}$.

حل التمرين 39 :

لدينا : $d = 6$ ، ومنه $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $36a'b' = 360$ ، ومنه $a'b' = 10$.

a'	1	2	5	10
b'	10	5	2	1
a	6	12	30	60
b	60	30	12	6

ومنه الثنائيات (a, b) هي : $(6, 60); (12, 30); (30, 12); (60, 6)$.

تمرين 40 :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases}$.

حل التمرين 40 :

لدينا : $d = 5$ ، ومنه $\begin{cases} a = 5a' \\ b = 5b' \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$ ، ومنه $25a'b' = 2700$ ، ومنه $a'b' = 108$.

a'	1	2	3	4	6	9	12	18	27	36	54	108
b'	108	54	36	27	18	12	9	6	4	3	2	1
a	5			20					135			540
b	540			135					20			5

ومنه الثنائيات (a, b) هي : $(5, 540); (20, 135); (135, 20); (540, 5)$.

تمرين 42 : في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين $PGCD(a, b)$ ، ثم ما يمكن قوله عن a و b

أ / $a = 55$ و $b = 36$.

ب / $a = 14$ و $b = 165$.

ج / $a = 1155$ و $b = 872$.

حل التمرين 42 :

لدينا : $PGCD(55,36) = 1$ ، $PGCD(14,165) = 1$ و $PGCD(1155,872) = 1$ ،
 في كل حالة نقول أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

تمرين 43 :

- 1- عين $PGCD(140,143)$.
- 2- استنتج $PGCD(a, b)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين :
 أ/ $a = 140 \times 34$ و $b = 143 \times 34$.
 ب/ $a = 140 \times 82$ و $b = 143 \times 82$.

حل التمرين 43 :

- 1- $PGCD(140,143) = 1$.
- 2- أ/ $PGCD(140 \times 34, 143 \times 34) = 34 \times PGCD(140, 143) = 34$
 ب/ $PGCD(140 \times 82, 143 \times 82) = 82 \times PGCD(140, 143) = 82$

تمرين 47 : ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3 .
 برهن أن : $n + 5$ مضاعف لـ $n - 2$ إذا وفقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$.

حل التمرين 47 :

نعلم أن : $n + 5 = n - 2 + 7$.
 $n + 5$ مضاعف لـ $n - 2$ ، معناه $n - 2$ قاسم لـ $n + 5$ ، أي أن $n - 2$ قاسم لـ $n - 2$ و $n - 2$ قاسم لـ 7
 لدينا $n - 2$ قاسم لـ 7 معناه إما $n - 2 = 1$ أو $n - 2 = 7$ ، أي أن $n = 3$ أو $n = 9$.
 عكسيا : إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$. فإن $n + 5 = 8$ أو $n + 5 = 14$ و $n - 2 = 1$ أو $n - 2 = 7$.
 وبالتالي في كلا الحالتين $n + 5$ مضاعف لـ $n - 2$.

تمرين 56 :

- 1- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a = n^2 + 5n + 4$ و $b = n^2 + 3n + 2$.
 بين أن العدد $n + 1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .
- 2- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $n + 1$ قاسما للعدد $3n^2 + 15n + 20$.

حل التمرين 56 :

- 1- من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $a = (n + 1)(n + 4)$ و $b = (n + 1)(n + 2)$.
 إذن العدد $n + 1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .
- 2- لدينا : $3n^2 + 15n + 20 = (n + 1)(3n + 12) + 8$
 إذن العدد $n + 1$ قاسما للعدد $3n^2 + 15n + 20$ معناه العدد $n + 1$ قاسما للعدد 8
 ومنه $n + 1 \in \{1; 2; 4; 8\}$ أي $n \in \{0; 1; 3; 7\}$.

تمارين حول الموافقات في $\mathbb{Z}$

تمرين 1 : برر صحة العبارات التالية :

أ / $45 \equiv 3[7]$ ، ب / $152 \equiv 2[3]$ ، ج / $29 \equiv -1[6]$ ، د / $137 \equiv -3[5]$ ،
و / $-13 \equiv 2[5]$ ، هـ / $-17 \equiv -7[10]$.

حل التمرين 1 :

أ / $45 \equiv 3[7]$ ، إذن $45 - 3 = 42 = 7 \times 6$ ،
ب / $152 \equiv 2[3]$ ، إذن $152 - 2 = 150 = 3 \times 50$ ،
ج / $29 \equiv -1[6]$ ، إذن $29 - (-1) = 30 = 6 \times 5$ ،
د / $137 \equiv -3[5]$ ، إذن $137 - (-3) = 140 = 5 \times 28$ ،
و / $-13 \equiv 2[5]$ ، إذن $-13 - 2 = -15 = -3 \times 5$ ،
هـ / $-17 \equiv -7[10]$ ، إذن $-17 - (-7) = -10 = -10 \times 1$.

تمرين 3 : عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث : $n \equiv 4[7]$.

حل التمرين 3 :

لدينا $n \equiv 4[7]$ معناه $n = 7k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ،
 $0 \leq n \leq 30$ ، معناه $0 \leq 7k + 4 \leq 30$ ، أي $-\frac{4}{7} \leq k \leq \frac{26}{7}$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ،
أي أن مع $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ ، ومنه $n \in \{4; 11; 18; 25\}$.

تمرين 4 : عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$. عين باقي قسمة العدد n على 12 .

حل التمرين 4 : لدينا $140 = 12 \times 11 + 8$

لدينا $n \equiv 140[12]$ و $140 \equiv 8[12]$ إذن $n \equiv 8[12]$ ،
بما أن $0 \leq 8 < 12$ فإن 8 هو باقي قسمة العدد n على 12 .

تمرين 5 : x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2 .

عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية : $x + 5$ ، $x - 5$ ، $9x$ ، $-15x$ ، x^3 .

حل التمرين 5 :

x عدد صحيح ، باقي قسمته على 7 هو 2 معناه $x \equiv 2[7]$ ، ومنه :
 $x + 5 \equiv 7[7]$ ومنه $x + 5 \equiv 0[7]$ ،
 $x - 5 \equiv -3[7]$ ومنه $x - 5 \equiv 4[7]$ ،
 $9x \equiv 18[7]$ ومنه $9x \equiv 4[7]$ ،
 $-15x \equiv -30[7]$ ومنه $-15x \equiv 5[7]$ ،
 $x^3 \equiv 8[7]$ ومنه $x^3 \equiv 1[7]$.

تمرين 7 : m و n عددان طبيعيين غير معدومين . a و b عددان صحيحان .

أثبت أن $a \equiv b[n]$ يكافئ $am \equiv bm[nm]$.

حل التمرين 7 :

$a \equiv b[n]$ معناه $a - b = kn$ مع $k \in \mathbb{N}$ ويكافئ $am - bm = knm$ ومعناه $am \equiv bm[nm]$.

تمرين 8 : n عدد طبيعي . A, B, C, a, b و c أعداد صحيحة .

برهن أنه إذا كانت الفوارق $A - a, B - b$ و $C - c$ تقبل القسمة على n فإن الفرق $(ABC - abc)$ يقبل كذلك القسمة على n .

حل التمرين 8 :

لدينا : $\begin{cases} A - a \equiv 0[n] \\ B - b \equiv 0[n] \\ C - c \equiv 0[n] \end{cases}$ هذا معناه : $\begin{cases} A \equiv a[n] \\ B \equiv b[n] \\ C \equiv c[n] \end{cases}$ ، إذن $ABC \equiv abc[n]$ أي $ABC - abc \equiv 0[n]$

تمرين 11 : كم كانت تشير الساعة حيث :

أ / بعد 112 الساعة أشارت الثالثة ؟

ب / قبل 163 الساعة أشارت الثالثة ؟

مع ذكر صباحا أم مساء .

حل التمرين 11 : الساعة المطلوبة هي n حيث $0 \leq n < 24$.

أ / $n \equiv 3 + 112[24]$ ، ومنه $n \equiv 115[24]$ أي $n \equiv 19[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى السابعة مساء .

ب / $n \equiv 3 - 163[24]$ ، ومنه $n \equiv -160[24]$ أي $n \equiv 8[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى الثامنة صباحا .

تمرين 26 : أ / x عدد صحيح . أتمم الجدول التالي :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x \equiv$						[5]

ب / استنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث : $2x \equiv 3[5]$.

حل التمرين 26 : أ /

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x \equiv$	0	2	4	1	3	[5]

ب / $2x \equiv 3[5]$ معناه $x \equiv 4[5]$ أي أن $x = 5k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين 27 : عين قيم الأعداد الطبيعية n ، التي يكون من أجلها العدد $n^3 + n - 2$ قابلا للقسمة على 7 .

حل التمرين 27 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^3 \equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$n^3 + n - 2 \equiv$	5	5	1	0	3	2	5	[7]

$n^3 + n - 2 \equiv 0[7]$ معناه $n \equiv 3[7]$ أي أن $n = 7k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$.

تمرين 32 : حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين :

أ / $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$. ب / $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$.

حل التمرين 32 :

أ / $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$. معناه $\begin{cases} x = 5\alpha + 3 \\ x = 6\beta + 1 \end{cases}$ ، إذن $5\alpha - 6\beta = -2$ ومنه $5\alpha = 6\beta - 2$ ومنه $5\alpha \equiv -2[6]$.

أي $-\alpha \equiv -2[6]$ ، أي $\alpha \equiv 2[6]$ ، ويعني $\alpha = 6k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

بالتعويض نجد $5(6k + 2) = 6\beta - 2$ ، معناه $6\beta = 30k + 12$ ، معناه أن $\beta = 5k + 2$.

إذن $x = 5(6k + 2) + 3$ ، ومنه $x = 30k + 13$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ب / $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$. معناه $\begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x \equiv 1[3] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 3x \equiv 3[6] \\ 2x \equiv 2[6] \end{cases}$ ومنه $x \equiv 1[6]$.

تمرين 58 : ماهما الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} ؟

حل التمرين 58 :

لدينا $51^2 = 2601$ ، ومنه $51^2 \equiv 1[100]$. إذن $(51^2)^{1004} \equiv 1[100]$ ، أي $51^{2008} \equiv 1[100]$.
إذن الرقم الأخير هو 1 وما قبله 0 .

تمرين 67 : n عدد طبيعي . نضع $A = n^2 - n + 1$

أ / عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 .

ب / استنتج قيم العدد الطبيعي n ، التي يكون من أجلها العدد A قابلا للقسمة على 7 .

ج / نضع $B = 2753^2 - 2753 + 1$. عين باقي قسمة العدد B على 7 .

حل التمرين 67 :

أ / تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 .

$$A = n^2 - n + 1$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	$[7]$
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	$[7]$
$1 \equiv$	1	1	1	1	1	1	1	$[7]$
$A \equiv$	1	1	3	0	6	0	3	$[7]$

ب / $A \equiv 0[7]$ معناه $n \equiv 3[7]$ أو $n \equiv 5[7]$.

ج / نضع $B = 2753^2 - 2753 + 1$. عين باقي قسمة العدد B على 7 .

نعتبر $n = 2753$ ، و $n \equiv 2[7]$ إذن $A \equiv 3[7]$ وبالتالي $B \equiv 3[7]$.

ومنه باقي قسمة العدد B على 7 هو 3 .

تمرين 70 :

أ / أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب / برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي ، يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلا للقسمة على 9 .

حل التمرين 70 :

أ / دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 .

من أجل $n = 0$ ، $7^0 \equiv 1[9]$ ، من أجل $n = 1$ ، $7^1 \equiv 7[9]$.

من أجل $n = 2$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، من أجل $n = 3$ ، $7^3 \equiv 1[9]$.

ومنه بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 تشكل متتالية دورية دورها 3 .

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$	$n \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	1	7	4	[9]

ومنه البواقي هي : 1 ، 7 و 4 .

ب/ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي ، يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلاً للقسمة على 9 .

نضع $A = 7^n + 3n - 1$

إذا كان $n = 3k$ فإن $A = 7^{3k} + 9k - 1$ ، ومنه $A \equiv 1 + 0 - 1[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن $A = 7^{3k+1} + 9k + 2$ ، ومنه $A \equiv 7 + 0 + 2[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن $A = 7^{3k+2} + 9k + 5$ ، ومنه $A \equiv 4 + 0 + 5[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي ، فإن العدد $7^n + 3n - 1$ قابلاً للقسمة على 9 .

تمارين حول التعداد

تمرين 34 : أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6 .

$$c = \overline{503012} , \quad b = \overline{1523} , \quad a = \overline{234}$$

حل التمرين 34 :

$$a = \overline{234} = 2 \times 6^2 + 3 \times 6 + 4 = 94$$

$$b = \overline{1523} = 1 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 2 \times 6 + 3 = 411$$

$$c = \overline{503012} = 5 \times 6^5 + 3 \times 6^3 + 1 \times 6 + 2 = 39536$$

تمرين 35 : أكتب في النظام ذي الأساس 7 الأعداد الطبيعية التالية :

$$c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1 , \quad b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7 , \quad a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$$

حل التمرين 35 :

$$a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = \overline{1235}^7$$

$$b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7 = \overline{520}^7$$

$$c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1 = \overline{6021}^7$$

تمرين 40 : ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه $2003 = \overline{21} \times \overline{43}$ ؟

حل التمرين 40 :

$$\overline{2003} = \overline{21} \times \overline{43} \text{ معناه } 2x^3 + 3 = (2x + 1)(4x + 3) \text{ مع } x \geq 5$$

$$\text{أي أن } 2x^3 - 8x^2 - 10x = 0 , \text{ أي } 2x^2 - 8x - 10 = 0 \text{ أي } x = 10$$

تمرين 48 : أكتب في النظام ذي الأساس 12 العدد $\overline{6175}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 9 .

حل التمرين 48 :

لدينا : $\overline{6175} = 6 \times 9^3 + 1 \times 9^2 + 7 \times 9 + 5$ ، ومنه $\overline{6175} = 4523$

$$\begin{array}{r|l} 4523 & 12 \\ \hline 11 & 376 \\ & 4 \\ & 31 \\ & 7 \\ & 2 \\ & 2 \\ & 0 \end{array}$$

ومنه $4523 = \overline{274\alpha}^{12}$ ، حيث $\alpha = 11$.

تمرين 49 : أكتب في النظام ذي الأساس 7 العددين $\overline{234}$ و $\overline{1040}$ المكتوبين في النظام ذي الأساس 5

حل التمرين 49 :

لدينا $\overline{234} = 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 69$ ، ومنه $\overline{234} = \overline{126}^7$.

$$\begin{array}{r|l} 69 & 7 \\ \hline 6 & 9 \\ & 7 \\ & 1 \\ & 1 \\ & 0 \end{array}$$

لدينا $\overline{1040} = 1 \times 5^3 + 4 \times 5 = 145$ ، ومنه $\overline{1040} = \overline{265}^7$.

$$\begin{array}{r|l} 145 & 7 \\ \hline 5 & 20 \\ & 6 \\ & 2 \\ & 2 \\ & 0 \end{array}$$

تمرين 51 : في النظام العشري ، A عدد طبيعي أكبر من 3 و S هو مجموعة أرقامه .
أثبت أن يقبل القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان S يقبل القسمة على 3 .

حل التمرين 51 :

نفرض ان A يكتب في النظام ذي الأساس العشري كمايلي $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ حيث $0 \leq a_i \leq 9$ ومنه $A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_0$ ولدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $10^n \equiv 1[3]$ وبالتالي
 $A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_0[3]$ أي $A \equiv S[3]$ ، إذن $A \equiv 0[3]$ معناه $S \equiv 0[3]$.

تمارين حول الأعداد الأولية

- تمرين 31 :** العدد الطبيعي n يوافق 3 بالترديد 35 و بالترديد 28 .
 أ / برهن أن $n - 3$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .
 ب / ماهي أصغر قيمة للعدد n .

حل التمرين 31 :

- أ / لدينا : $\begin{cases} n \equiv 3[35] \\ n \equiv 3[28] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} n - 3 \equiv 0[35] \\ n - 3 \equiv 0[28] \end{cases}$ ، إذن $n - 3$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .
 ب / أصغر قيمة للعدد n .

أصغر قيمة للعدد $n - 3$ هي $PPCM(35, 28) = 140$ ، ومنه أصغر قيمة للعدد n هي 143 .

- تمرين 33 :** n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب $PPCM(n, 2n + 1)$.

- حل التمرين 33 :** من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا $PGCD(n, 2n + 1) = 1$.

$$PPCM(n, 2n + 1) = n(2n + 1) \text{ ومنه}$$

- تمرين 35 :** n عدد طبيعي غير معدوم . عين $PPCM(a, b)$ حيث :

$$a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1) \text{ و } b = (3^n + 1)(7^n + 1)$$

حل التمرين 35 :

لدينا : $a = (3^n - 1)(7^n - 1)(3^n + 1)(7^n + 1)$ أي $a = b(3^n - 1)(7^n - 1)$
 أي أن a مضاعف لـ b ومنه $PPCM(a, b) = a$.

- تمرين 46 :** n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$$a = n \text{ / } b = 2n + 1 \text{ و}$$

$$a = 2n + 3 \text{ / } b = 3n + 5 \text{ و}$$

حل التمرين 46 :

أ / لدينا $-2a + b = 1$ ، ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

ب / لدينا $-3a + 2b = 1$ ، ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

- تمرين 60 :** نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $2045x - 64y = 1$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

$$1- \text{ عين } PGCD(2045, 64)$$

2- استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم عين حلا خاصا للمعادلة (1) .

3- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

حل التمرين 60 :

1- تعيين $PGCD(2045, 64)$. لدينا :

$$2045 = 64 \times 31 + 61 , 64 = 61 \times 1 + 3 , 61 = 3 \times 20 + 1 , 3 = 1 \times 3 + 0$$

ومنه $PGCD(2045,64) = 1$.

2- استنتاج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

بما أن $PGCD(2045,64) = 1$ ، فإنه حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

تعيين حلا خاصا للمعادلة (1) .

$$\left\{ \begin{array}{l} 61 = 2045 - 64(31) \\ 3 = 64 - 61(1) \\ 1 = 61 - 3(20) \end{array} \right. \text{ ومنه } , \left\{ \begin{array}{l} 2045 = 64 \times 31 + 61 \\ 64 = 61 \times 1 + 3 \\ 61 = 3 \times 20 + 1 \end{array} \right. \text{ لدينا :}$$

$$1 = 61 - 3(20)$$

$$1 = 2045 - 64(31) - [64 - 61](20)$$

$$1 = 2045 - 64(31) - 64(20) + 61(20)$$

$$1 = 2045 - 64(51) + 61(20)$$

$$1 = 2045 - 64(51) + [2045 - 64(31)](20)$$

$$1 = 2045 - 64(51) + 2045(20) - 64(620)$$

$$1 = 2045(21) - 64(671)$$

ومنه (21,671) حلا خاصا للمعادلة (1) .

3- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

$$2045(x - 21) - 64(y - 671) = 0 \text{ بالطرح نجد } \left\{ \begin{array}{l} 2045x - 64y = 1 \\ 2045(21) - 64(671) = 1 \end{array} \right. \text{ لدينا :}$$

ومنه $2045(x - 21) = 64(y - 671)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2045 | 64(y - 671) \\ PGCD(2045,64) = 1 \end{array} \right. \text{ لدينا : } , \text{ ومنه حسب مبرهنة غوص فإن } 2045 | y - 671 , \text{ ومنه } y = 2045k + 671$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 64 | 2045(x - 21) \\ PGCD(2045,64) = 1 \end{array} \right. \text{ لدينا : } , \text{ ومنه حسب مبرهنة غوص فإن } 64 | x - 21 , \text{ ومنه } x = 64k + 21$$

إذن مجموعة حلول (1) هي : $\{(64k + 21; 2045k + 671)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

بيوت لا توقظ أبناءها لصلاة الفجر

وتوقظهم للمدارس .

بيوت لا خير فيها ولا بركة .

عندمت تتراخى قبضتك عن مصحفك تشتد قبضة الحياة حول عنقك