

تمارين الأعداد المركبة

في البكالوريا

من 2008 إلى 2019

شعبة : تقني رياضي

كتابة : خالرجا خاشة

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كمايلي :

$$z^3 + (2 - 4i)z^2 - (6 + 9i)z + 9(-1 + i) = 0 \quad (*)$$

(1) بين أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*).

(2) حل ، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (*) ثم أكتب حلولها z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل الأسّي ، حيث $|z_1| < |z_2|$.

(3) لتكن A ، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\}$.

(4) عين المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$.

بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم أنشئ (E) .

(5) تحقق أن النقط O ، B و G في إستقامية ثم عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و يحول B إلى G محدد عناصره المميزة.

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كفي .

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2} \right) z - r^2 = 0$$

أكتب الحلين على الشكل الأسّي .

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتني الحلين .

عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

(1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

ب- إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z : $(\bar{z} + 3)^2 - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0$ ، حيث $\bar{z}$ مرافق z .

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

النقط A ، B و M لواحقتها $(1 - i)$ ، $(1 + i)$ و z على الترتيب .

أ- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z = 1 - i + k e^{i \frac{5\pi}{4}}$ عندما k يسمح $\mathbb{R}^+$.

ب- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

(2) ليكن العدد المركب z_1 حيث : $z_1 = 3 - 3i$.

أ- أكتب z_1 على الشكل الأسّي .

ب- أحسب طوليلة العدد z_3 وعمدة له حيث : $z_1 \times z_3 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$. إستنتج قيمتي $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ، B و C لواحقها $3+3i$ ، $3-3i$

و $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب .

أ- عين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A, 1); (B, -1); (C, \alpha)\}$ مرجحا نرملزله بـ G_α .

ب- عين مجموعة النقاط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$.

[باك 2010] [1م]

التمرين الخامس

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$.

(2) علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ، C ، D و I لواحقها $3-2i$ ، $z_A = 3-2i$ ،

$z_C = -3+i$ ، $z_D = -3-i$ و $z_I = 1$ على الترتيب .

(3) z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases}$

أ- بين أن الجملة تكافئ : $\frac{z - 3 + 2i}{z - 1} = i$ ، ثم عين قيمة z .

ب- B النقطة التي لاحقتها $z_B = 3$ ، تحقق أن $\vec{AB} = \vec{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

ج- لتكن J النقطة التي لاحقتها $z_J = 1 - 2i$.

أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب z حيث : $z = \frac{z_A - z_J}{z_B - z_J}$.

تحقق أن $\vec{AB} = \vec{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

[باك 2010] [2م]

التمرين السادس

(1) أ- أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب a حيث : $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

(2) ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقطة التي لواحقها $z_A = -2$ ، $z_B = -1 - \sqrt{3}i$ و $z_C = 1 + \sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ- أحسب طوليلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدة له .

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) لتكن (E) مجموعة النقاط ذات اللاحقة z حيث $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$.

أ- تحقق أن B تنتمي إلى (E) .

ب- عين المجموعة (E) .

[باك 2011] [1م]

التمرين السابع

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم أكتب حلولها على الشكل المثلثي .

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{3} - i$ على الترتيب .

$$\text{نضع : } L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

أ- أكتب L على الشكل الأسّي .

ب- أثبت أن $(z_A - z_B) = L(z_C - z_B)$ ، ثم استنتج أن A صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة .
ج- استنتج نوع المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

[باك 2011] [2م]

التمرين الثامن

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$$L = \frac{-4\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{5 + 3i}$$

(1) أ- أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي .

ب- بين أن $L^{12} + 1 = 0$ ، ثم أحسب : $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$.

ج- n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي . أثبت أن : $L^{4n} + L^{4p} = 0$.

(2) أ- النقطتان A و B لاحتقاهما على الترتيب : $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$.

عين اللاحقة z_A للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

ب- عين z_G للاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

[باك 2012] [1م]

التمرين التاسع

$$(1) \begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$$

(2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و Ω التي لواحقها على الترتيب :

$$z_\Omega = 1 - 2i \quad \text{و} \quad z_B = -3 \quad , \quad z_A = 3 + 2i$$

أ- أثبت أن : $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$.

ب- عين طبيعة المثلث ΩAB .

(3) h التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2 .

أ- عين الكتابة المركبة للتحاكي h .

ب- عين z_C للاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .

ج- عين z_D للاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.

د- بين أن $ABCD$ مربع .

$$(4) (E) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي التي تحقق : } \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$$

أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة .

ب- أنشئ المجموعة (E) .

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- A, B, C و D النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_C = -1 - \sqrt{3}i$ و $z_D = -1 + \sqrt{3}i$.
- أ- أكتب كلا من z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسّي .
- ب- تحقق أن : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .
- (3) z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي .
- L_n العدد المركب المعرف بـ : $L_n = z_D \times z_n$.
- أ- أكتب كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري .
- ب- (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = |L_n|$.
- أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- $M_0, M_1, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, \dots, L_n$ على الترتيب .
- أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = \| \overrightarrow{OM_1} \| + \| \overrightarrow{OM_2} \| + \dots + \| \overrightarrow{OM_n} \|$.
- جد نهاية S_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 + 6z + 17 = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- A, B, C و D النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -4$ ، $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ و $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$.
- أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) أ- عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعاً مركزه A .
- ب- عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} \| = 10\sqrt{2}$.
- (4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ، ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z + 4) = \frac{\pi}{4}$.
- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عين المجموعة (Γ_2) .

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z + 5 - i\sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- A, B, C و D النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = -5 + i\sqrt{3}$.
- S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C و يحول O إلى B .
- جد العبارة المركبة للتشابه S ، ثم عين العناصر المميزة له .
- (3) أ- عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$.
- ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

جـ- عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

[باك 2014][م1]

التمرين الثالث عشر

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$.

أ- أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

ب- هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برر إجابتك.

(3) أ- عين العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددان نسبته وزاويته.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) أ- عين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 5$

ب- عين (E') مجموعة النقط M من المستوي التي للاحقتها z حيث : $|z - z_1| = |z - z_3|$.

[باك 2014][م2]

التمرين الرابع عشر

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1 + i$.

(1) أ- عين ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط (z) من المستوي حيث : $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

ب- عين ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط (z) من المستوي حيث : $z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ج- عين إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

(2) نسمي B النقطة التي للاحقتها z_1 حيث : $z_1 = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

أ- عين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

ب- عين z_2 للاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

ج- عين العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A, \alpha); (C, \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$.

د- عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left((1 + \sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$.

[باك 2015][م1]

التمرين الخامس عشر

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B

حيث : $z_A = -1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$.

(1) أ- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي.

ب- n عدد طبيعي ، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

ج- z عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أحسب طوليلة العدد z وعمدة له ، ثم أكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

د- استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

(2) أ- أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- أحسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}$ ، ثم بين أن $ABDC$ مربع .

[باك 2015] [2م]

التمرين السادس عشر

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 4(\sin \theta)z + 4 = 0$ ، حيث θ وسيط حقيقي .

(2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرسم إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

(3) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = \sqrt{3} + i , \quad z_B = \sqrt{3} - i \quad \text{و} \quad z_C = 3\sqrt{3} + i$$

أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- استنتج النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته وزاويته له .

ج- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{AC}$ ، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$.

(4) أ- عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

ب- عين (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$.

[باك 2016] [1م]

التمرين السابع عشر

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$.

(2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب :

$$z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \quad \text{و} \quad z_B = \overline{z_A}$$

أ- أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي .

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$$

ب- بين أن : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = 0$ بحيث يكون n عددا حقيقيا .

(3) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$.

أ- عين طبيعة التحويل النقطي f وعناصره المميزة .

ب- أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

ج- عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

[باك 2016] [2م]

التمرين الثامن عشر

(1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(2z - \sqrt{2})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$.

ب- أكتب الحلول على الشكل الأسّي .

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقطة التي لواحقها على الترتيب: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

أ- علم النقطة A ، B و C في المعلم السابق.

ب- نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 3 وزاويته π .

و النقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- أحسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب.

(3) نضع: $z = \frac{d-b}{e-b}$.

أ- أكتب العدد z على الشكل المثلثي.

ب- نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

التمرين التاسع عشر

[باك 2017] [1م]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطة A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = -i$.

(1) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحول B إلى A .

(3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C والنقطة E صورة النقطة D بالتشابه S .

أ- عين z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن: $z_E = 1 - 2i$ حيث z_E لاحقة النقطة E .

ب- حدد طبيعة الرباعي $ADEB$.

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث: $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

التمرين العشرون

[باك 2017] [2م]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطة A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = \frac{1}{2}(1 - i)$ و $z_D = \overline{z_C}$.

(1) أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي، ثم استنتج الشكل الأسّي لكل من z_B و z_D .

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$.

(2) أ- جد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B .

ب- أحسب طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

(3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, 2); (C, -1); (D, -1)\}$.

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = \sqrt{5}$.

بين أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 4)(z^2 - 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

(1) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) أ- عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ب- عين طبيعة الرباعي $ABDC$.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $z_n = (z_A)^n + (z_B)^n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = z_{6n}$

عبر عن t_n بدلالة n ثم أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n$

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$.

(1) بين أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC وأحسب مساحته.

(2) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد L حيث : $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$.

ب- بين أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{12}$.

(3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرف بـ :

$$z' = (z - z_B)L + z_B$$

- بين أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة.

(4) لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$.

- أحسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_B = \overline{z_A}$.

(1) أكتب على الشكل الأسّي كلا من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بين أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.

(2) لتكن النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته -3 .

- بين أن لاحقة النقطة C هي : $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$.

(3) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

(4) أ- بين أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

ب- جد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعاً.

[باك 2018] [2م]

التمرين الرابع و العشرون

(I) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $4z^2 - 2z + 1 = 0$ (E).

ب- أكتب العددين $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسّي، حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

(1) أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم حدد طبيعة المثلث ABC .

ب- استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

(2) جد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{CB}$ واستنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

(3) حدد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$.

(4) بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة ABC بالمثلث تنتمي إلى (γ) .

[باك 2019] [1م]

التمرين الخامس و العشرون

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + i$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 1.

(1) أ- تحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ).

ب- عيّن قياساً بالراديان للزاوية $(\vec{AB}, \vec{AC})$ ، ثم استنتج أن صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

(2) التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

أ- حدد العناصر المميزة للتشابه S .

ب- عيّن z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S .

(3) ما هي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث: $S = h \circ r$ ؟ استنتج أن النقط A ، C و D في إستقامية.

(4) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z ، حيث: $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$.

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (E)، ثم حدد طبيعة المجموعة (E).

(I) أ-تحقق أن: $(2-2\sqrt{3})^2 = 16-8\sqrt{3}$.

ب- أكتب على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب z حيث: $z = -16\sqrt{3} - 16i$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ و $z_C = -\frac{1}{4}z_A$.

(1) أكتب z_A على الشكل الجبري، ثم بين أن: $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

(2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددتين الحقيقيين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و B إلى C .

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S .

أ- بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz$.

ب- حدد العناصر المميزة للتشابه S .

(4) G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجع الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 4)\}$.

أ- بين أن: $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z ، حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\sqrt{2}$.

حدد طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة، ثم أحسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S .