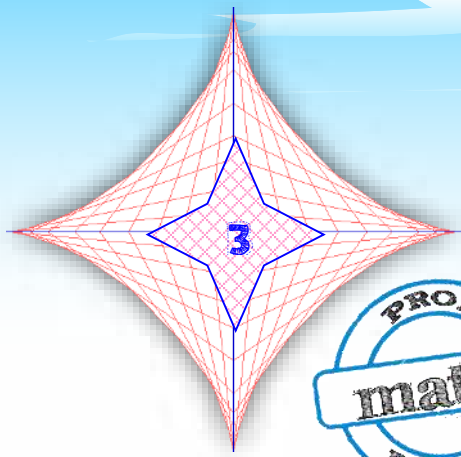


# الاشتقاقية وتطبيقاتها

## الاشتقاقية

### 1. العدد المشتق، دالة قابلية للاشتقاق عند عدد.

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ .  $x_0$  و  $x_0 + h$  عدنان حقيقيان من  $I$  مع  $h \neq 0$ .  
نقول أن  $f$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$  إذا قبلت النسبة  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  نهاية محدودة لما

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \text{، أي } h \text{ إلى } 0 \text{،}$$

تسمى هذه النهاية **العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x_0$**  ونرمز لها بالرمز  $f'(x_0)$ .

☑ ملاحظة:

$$\text{بوضع } x = x_0 + h \text{ تصبح النسبة } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ كما يلي}$$

**طريقة:** لدراسة قابلية اشتقاق دالة  $f$  عند  $x_0$  ندرس نهاية النسبة  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  لما

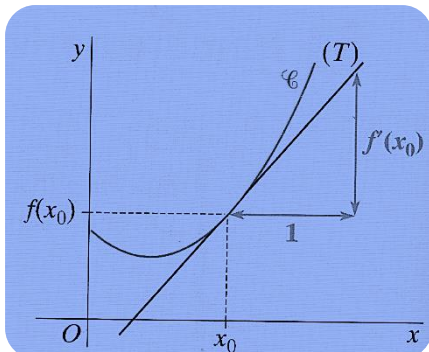
يؤول  $h$  إلى 0، أو ندرس نهاية النسبة  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  لما يؤول  $x$  إلى  $x_0$ .

☑ نتيجة:

إذا قبلت الدالة  $f$  الاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  نقول أنها تقبل الاشتقاق على  $I$  وتسمى

الدالة  $f': x \mapsto f'(x)$  **الدالة المشتقة للدالة  $f$** .

### 2. التفسير الهندسي للعدد المشتق (مماس لمنحنى دالة عند نقطة)



**تعريف وخاصية:**  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$

وليكن  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

إذا قبلت  $f$  الاشتقاق عند  $x_0$  من  $I$  فإن  $(C)$  يقبل عند النقطة

$A(x_0; f(x_0))$  مماسا  $(T)$  معامل توجيهه  $f'(x_0)$  ومعادلته:

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

### 3. مشتقات الدوال المألوفة

| $f(x)$                                    | $f'(x)$               | مجالات قابلية الاشتقاق          |
|-------------------------------------------|-----------------------|---------------------------------|
| $a$ (حيث $a$ ثابت حقيقي)                  | 0                     | $\mathbb{R}$                    |
| $ax$ (حيث $a$ ثابت حقيقي)                 | $a$                   | $\mathbb{R}$                    |
| $x^n$ ( $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$ ) | $n x^{n-1}$           | $\mathbb{R}$                    |
| $\frac{1}{x}$                             | $-\frac{1}{x^2}$      | $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ |
| $\sqrt{x}$                                | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$                  |
| $\cos(x)$                                 | $-\sin(x)$            | $\mathbb{R}$                    |
| $\sin(x)$                                 | $\cos(x)$             | $\mathbb{R}$                    |

### 4. عمليات على الدوال المشتقة

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $a$  عدد حقيقي.

| الدالة                      | $f \pm g$   | $a \times f$  | $f \times g$                | $\frac{1}{g}$     | $\frac{f}{g}$                           |
|-----------------------------|-------------|---------------|-----------------------------|-------------------|-----------------------------------------|
| الدالة المشتقة              | $f' \pm g'$ | $a \times f'$ | $f' \times g + f \times g'$ | $\frac{-g'}{g^2}$ | $\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$ |
| الدالة $g$ لا تنعدم على $I$ |             |               |                             |                   |                                         |

### 5. مشتقة مركب دالتين

إذا قبلت الدالة  $f$  الاشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  وقبلت الدالة  $g$  الاشتقاق على  $f(I)$  فإن الدالة  $g \circ f$  تقبل الاشتقاق على  $I$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $I$ :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$$

### تطبيقات الاشتقاقية

#### 1. المشتقة واتجاه تغير دالة

**مبرهنة (دون برهان):**  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ .

☑ إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) > 0$  (يمكن أن تكون  $f'$  معدومة من أجل قيم

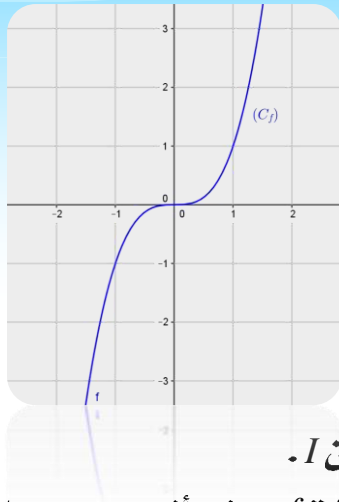
منعزلة من  $I$ )، فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .

☑ إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) < 0$  (يمكن أن تكون  $f'$  معدومة من أجل قيم

منعزلة من  $I$ )، فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$ .

☑ إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) = 0$  فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$ .





على سبيل المثال:

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^3$   
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f'(x) = 3x^2$   
 ومنه: من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$ ،  $f'(x) > 0$  و  $f'(0) = 0$   
 إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

## 2. القيم الحدية المحلية

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $x_0$  عدد حقيقي من  $I$ .

- ☑ نقول أن  $f(x_0)$  قيمة حدية محلية عظمى للدالة  $f$  يعني أنه يوجد مجال مفتوح  $J$  محتوى في  $I$  ويشمل  $x_0$  بحيث من أجل كل  $x$  من  $J$ ،  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- ☑ نقول أن  $f(x_0)$  قيمة حدية محلية صغرى للدالة  $f$  يعني أنه يوجد مجال مفتوح  $J$  محتوى في  $I$  ويشمل  $x_0$  بحيث من أجل كل  $x$  من  $J$ ،  $f(x) \geq f(x_0)$ .
- ☑ نقول أن  $f(x_0)$  قيمة حدية محلية لـ  $f$  يعني أن  $f(x_0)$  قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

**مبرهنة:** لتكن دالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $f'$  دالتها المشتقة.

- ☑ إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى  $f'$  عند قيمة  $x_0$  من  $I$  مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح  $J$  محتوى في  $I$  يشمل  $x_0$  تقبل فيه  $f$  قيمة حدية محلية.

| $x$     | $x_0$           |
|---------|-----------------|
| $f'(x)$ | -      0      + |
| $f(x)$  |                 |

| $x$     | $x_0$           |
|---------|-----------------|
| $f'(x)$ | +      0      - |
| $f(x)$  |                 |

**N.B**

- ☑ يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على  $I$ .
- ☑ إذا انعدمت الدالة المشتقة  $f'$  عند قيمة  $x_0$  من  $I$  فإن الرسم البياني للدالة  $f$  يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها  $x_0$ .

## 3. حصر دالة:

لتكن دالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $[a, b]$  و  $f'$  دالتها المشتقة.

- ☑ إذا كانت الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[a, b]$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[a, b]$ 

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$
- ☑ إذا كانت الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $[a, b]$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[a, b]$ 

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a)$$

**تمرين تطبيقي:** لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $[-4,1]$  كما يلي:  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ .

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $[-4,1]$  ودالتها المشتقة  $f'$  هي:  $f'(x) = 2x + 2$ . بما أن  $f'(-1) = 0$   
الدالة  $f'$  سالبة تماما على  $[-4,-1]$  وإذن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $[-4,-1]$ .  
الدالة  $f'$  موجبة تماما على  $[-1,1]$  إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[-1,1]$ .

جدول التغيرات:

| $x$     | -4 | -1 | 2 |
|---------|----|----|---|
| $f'(x)$ | -  | 0  | + |
| $f(x)$  | 7  | -2 | 0 |

من أجل كل  $x$  من المجال  $[-4,-1]$  ،  $f(-1) \leq f(x) \leq f(-4)$  أي  $-2 \leq f(x) \leq 7$   
من أجل كل  $x$  من المجال  $[-1,1]$  ،  $f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$  أي  $-2 \leq f(x) \leq 0$

**طريقة:** لإثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  على مجال  $[a,b]$ .

1. نبين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما (أو متناقصة تماما) على المجال  $[a,b]$

2. وبعد حساب  $f(a)$  و  $f(b)$  نبين أنهما من إشارتين مختلفتين.

$f(a)$  و  $f(b)$  من إشارتين مختلفتين تقرر وجود  $x_0$  و  $f$  متزايدة تماما (أو متناقصة تماما) تقرر وحيدية الحل  $x_0$ .

**تمرين تطبيقي:** لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $[0,1]$  ب:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ .

✓ أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0,1]$ .

✓ أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  على المجال  $[0,1]$ .

**حل:**

✓ دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0,1]$

مشتقة الدالة  $f$ :

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $[0,1]$  ودالتها المشتقة  $f'$  حيث  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ .

إشارة المشتقة  $f'$ : نضع  $f'(x) = 0$  هذا يكافئ  $3x^2 - 6x + 4 = 0$

حساب المميز  $\Delta$ :  $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)4 = -12 < 0$

وبالتالي الدالة  $f'$  موجبة تماما على  $[0,1]$  ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $[0,1]$ .

✓ إثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  على المجال  $[0,1]$ .

لدينا  $f(0) = -1$  و  $f(1) = 1$  إذن  $f(0)$  و  $f(1)$  من إشارتين مختلفتين و  $f$  متزايدة تماما على  $[0,1]$ .

نستنتج أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  على المجال  $[0,1]$ .

4. عنصر حاد من الأعلى - عنصر حاد من الأسفل:

لتكن دالة  $f$  معرفة على مجال  $D_f$ .

✓ يسمى عدد حقيقي  $k$  عنصرا حادا من الأعلى (Majorant) للدالة  $f$  على المجال  $D_f$  إذا وفقط إذا

كان من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $D_f$  ،  $f(x) \leq k$ .

✓ يسمى عدد حقيقي  $k$  عنصرا حادا من الأسفل (Minorant) للدالة  $f$  على المجال  $D_f$  إذا وفقط إذا

كان من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $D_f$  ،  $f(x) \geq k$ .