

$ABCD$ متوازي أضلاع.

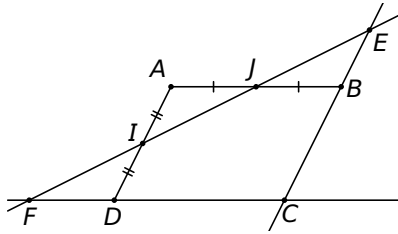
I و J منتصف $[AD]$ و $[AB]$ على الترتيب.

المستقيم (IJ) يقطع (BC) في E و يقطع (CD) في F .

1. برهن أن المثلثين DFI و AIJ متقايسان.

2. برهن أن المثلثين JBE و IFD متقايسان.

3. برهن أن $FI = IJ = JE$.



1. بما أن $(AB) \parallel (CD)$ و (AD) قاطع لهما فإن $\widehat{IAJ} = \widehat{IDF}$ (متبادلتان داخليا). من جهة أخرى، $\widehat{AII} = \widehat{DIF}$ (متقابلتان بالرأس).

و بما أن $AI = ID$ فالمثلثان DFI و AIJ متقايسان (زاويتان و الضلع المحصور بينهما).

2. بنفس الطريقة نبرهن أن المثلثين JBE و AIJ متقايسان.

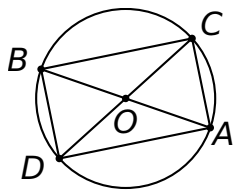
و بما أن كل من JBE و DFI يُقايس المثلث AIJ فنستنتج أن المثلثين JBE و DFI متقايسان.

3. من تقايس المثلثات الثلاثة DFI و AIJ و JBE نستنتج أن $FI = IJ = JE$.

$[AB]$ و $[CD]$ قطران من دائرة مركزها O .

1. برهن أن المثلثين OBC و OAD متقايسان.

2. برهن أن المثلثين ABC و ADB متقايسان.



1. المثلثان OBC و OAD متقايسان لأن:

• $OA = OB$ (أنصاف أقطار للدائرة)

• $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (متقابلتان بالرأس)

• $OD = OC$ (أنصاف أقطار للدائرة)

طريقة أخرى : المثلثان OBC و OAD متناظران

بالنسبة إلى O إذن متطابقان أي متقايسان.

2. الرباعي $ACBD$ مستطيل (لأن قطريه متناصفان و متقايسان) و بالتالي مركزه O

هو مركز تناظر له.

إذن فالمثلثان ABC و ABD متناظران بالنسبة إلى O و بالتالي متقايسان.

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A و نقطة M من $[BC]$.

نسمي P المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (AB) ، Q المسقط العمودي

لنقطة M على المستقيم (AC) و R المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم

(MP) .

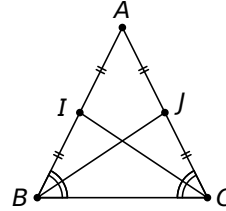
برهن أن المثلثين MQC و MRC متقايسان.

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A .

I و J منتصف الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.

1. برهن أن المثلثين BIC و BJC متقايسان.

2. برهن أن $BJ = CI$.



بما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي A فإن $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ إذن

$\widehat{IBC} = \widehat{JCB}$ و بما أن $AB = AC$ فإن $IB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = JC$ فإن

لدينا إذن :

و بالتالي فالمثلثان IBC و JCB متقايسان (ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما).

$$\left[\begin{array}{l} IB = JC \\ \widehat{IBC} = \widehat{JCB} \\ [BC] \text{ مشترك ضلع} \end{array} \right]$$

2. من تقايسهما نستنتج أن الضلع الثالث في المثلث IBC يقايس الضلع الثالث في المثلث JCB أي $BJ = CI$.

ABC مثلث كفي.

نسمي I ، J و K منتصفات الأضلاع $[AB]$ ، $[AC]$ و $[BC]$ على الترتيب.

برهن أن المثلثات AIJ ، BIK ، JKI و KJC متقايسة.

• في المثلث ABC لدينا : I منتصف

$[AB]$ و J منتصف $[AC]$ فحسب نظرية

مستقيم المنتصفين نستنتج أن $(IJ) \parallel (BC)$ و

$IJ = \frac{1}{2}BC$ إذن $IJ = BK = KC$

• في المثلث ABC لدينا : I منتصف

$[AB]$ و K منتصف $[BC]$ فحسب نظرية

مستقيم المنتصفين نستنتج أن $(IK) \parallel (AC)$ و

$IK = \frac{1}{2}AC$ إذن $IK = AJ = JC$

• في المثلث ABC لدينا : J منتصف $[AC]$

و K منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم

المنتصفين نستنتج أن $(JK) \parallel (AB)$ و

$JK = \frac{1}{2}AB$ إذن $JK = AI = IB$

لدينا إذن :

• $AI = IB$ ، $IK = AJ$ و $IJ = BK$ إذن فالمثلثان AIJ و BIK متقايسان

(تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).

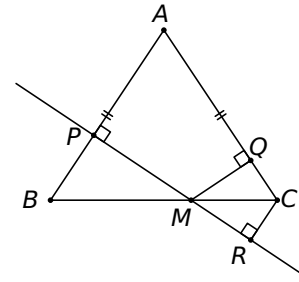
• $JK = IB$ ، $IJ = BK$ و IK ضلع مشترك إذن فالمثلثان JKI و BIK

متقايسان (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).

• $IK = JC$ ، $IJ = KC$ و JK ضلع مشترك إذن فالمثلثان JKI و KJC

متقايسان (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).

هذا يعني أن المثلثات AIJ ، BIK ، JKI و KJC متقايسة.



بما أن $(PR) \perp (CR)$ و $(AB) \perp (PR)$ فإن $(CR) \parallel (AB)$ (المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان).

لدينا إذن $(CR) \parallel (AB)$ و (BC) قاطع لهما وبالتالي $\widehat{PBM} = \widehat{MCR}$ (متبادلتان داخليا). لكن المثلث ABC متساوي الساقين إذن $\widehat{PBM} = \widehat{QCM}$ منه $\widehat{MCR} = \widehat{QCM}$ لدينا إذن :

$$\widehat{MCR} = \widehat{QCM} \cdot$$

$[MC]$ وتر مشترك.

نستنتج أن المثلثين القائمين MQC و MRC متقايسان (الوتر و زاوية حادة).

1. $\widehat{xOy}$ زاوية و A و B نقطتان من الضلع (Ox) . نعيّن النقطتين C و D على الضلع (Oy) بحيث $OC = OA$ و $OD = OB$ و تكون I نقطة تقاطع $[AD]$ و $[BC]$.
2. برهن أن المثلثين OBC و ODA متقايسان.
3. برهن أن المثلثين IAB و ICD متقايسان.
4. برهن أن المثلثين OIB و OID متقايسان.
5. ماذا يمثل نصف المستقيم $[OI]$ بالنسبة للزاوية $\widehat{xOy}$ ؟ علّل.
6. استنتج طريقة لرسم منصف زاوية باستعمال المسطرة.

1. لدينا : $OB = OD$ ، $OC = OA$ و $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ إذن فالمثلثان BOC و AOD متقايسان (ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما).

2. بما أن المثلثين BOC و AOD متقايسان

فإن $\widehat{OCB} = \widehat{OAD}$ منه :

$$180^\circ - \widehat{OCB} = 180^\circ - \widehat{OAD}$$

$$\widehat{ICD} = \widehat{IAB}$$

أي من جهة أخرى :

$$OA = OC \quad \text{و} \quad OB = OD$$

إذن بالطرح طرفا إلى طرف ينتج $AB = CD$.

لكن $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$ (متقابلتان بالرأس)،

نستنتج إذن أن المثلثين IAB و ICD

متقايسان (ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما).

3. بما أن المثلثين IAB و ICD متقايسان فإن $IB = ID$ ، و بما أن $OB = OD$ و $[OI]$ ضلع مشترك فإن المثلثين OIB و OID متقايسان (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).

4. بما أن المثلثين OIB و OID متقايسان فإن $\widehat{IOB} = \widehat{IOD}$ و بالتالي فنصف المستقيم $[OI]$ هو منصف الزاوية $\widehat{xOy}$.

5. لرسم منصف زاوية $\widehat{xOy}$ ، نعيّن نقطتين A و B على الضلع (Ox) ثم النقطتين C و D على الضلع (Oy) بحيث $OA = OC$ و $OB = OD$ (بالمدور مثلا). نسمي I نقطة تقاطع $[AD]$ و $[BC]$.

حسب ما سبق، نصف المستقيم $[OI]$ هو منصف الزاوية $\widehat{xOy}$.