

سلسلة البناء والتكوين: 2019/2020

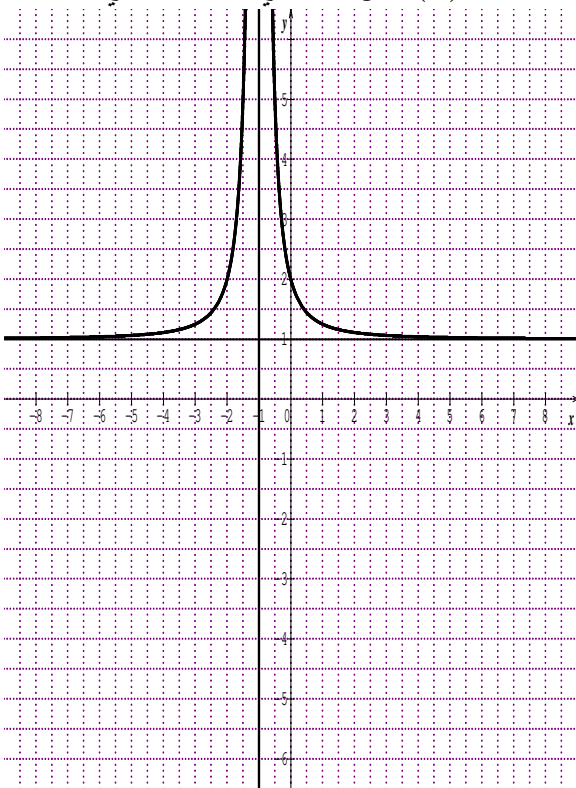
كراسة الدوال الناطقة

تطبيقات القيس المتوسط والاشتقاقية

موجهة لطلاب البكالوريا، رياضيات، ت ر

إعداد الأستاذ: جرادى سلطان

سلاسل البناء والتكوين : ج س -	كراسة الدوال والإستمرارية... الصفحة (1)
العام الدراسي: 2019/ 2020	الأستاذ: جرادى سلطان (الثالثة + ر + ت ر)

التمرين الأول: الدالة g معرفة على المجالين $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$ ، (Γ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب للمعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ هل صحيح أم خاطئ ما يلي: 1- صيغة أخرى للدالة g هي: $g(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$ 2- المنحني (Γ) يقبل مقاربين 3- للمنحني (Γ) محور تناظر معادلة له: $x=1$ 4- الدالة g متزايدة على المجال $]1, +\infty[$ 5- تمثيل (Γ) هو المقابل في الشكل التالي: 	التمرين الثاني: الدالة f معرفة على $R - \{1\}$: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$ حيث a و b عددا حقيقيان. الهدف من التمرين هو إيجاد إن أمكن a و b حيث يكون $f(-1)$ قيمة حدية محلية عظمى معدومة . 1) لماذا $f'(-1) = 0$ و $f(-1) = 0$ ؟ 2) أوجد إذن a و b ، ثم تحقق أن الدالة المحصل عليها تحقق الهدف . التمرين الثالث: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي غير معدوم x معرفة بـ: $f(x) = \frac{-x^3 + x + 1}{x^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . 1) عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x) = ax + \frac{x+1}{2}$ 2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \frac{(x+1)(-x^2 + x - 2)}{x^3}$ 3) أدرس تغيرات الدالة f 4) برهن أن المستقيم $y = -x$ (Δ) مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرس وضعية (C_f) و (Δ) 5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $1 < \alpha < 2$ 4) أرسم (C_f)
---	--

التمرين الرابع:

f دالة قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ و $]-1; +\infty[$ جدول تغيراتها هو التالي :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	1	$+\infty$	0	5

(C) هو منحنى f في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- أكد صحة أو خطأ كل عبارة من العبارات الآتية مع التبرير:

- 1) الدالة f فردية .
- 2) المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين فقط .
- 3) من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإن : $f(x) > 0$.
- 4) المعادلة $f(x) = 5$ تقبل حلين متمايزين في المجال $]-1; +\infty[$.
- 5) في المجال $]-\infty; -1[$ ؛ (C) يقطع المستقيم (D) الذي $y = 2$ معادلة له في نقطة وحيدة .
6. المنحنى (C) يقبل في النقطة ذات الفاصلة (-2) مماسا موازيا للمستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له .
7. $f(1) < f\left(\frac{3}{4}\right)$.
8. g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; -1[$ كما يلي :

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$$
 أ) g الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1[$.
9. h الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{1}{f(x)}; x \neq -1$$

$$h(-1) = 1$$
 - الدالة h مستمرة عند العدد (-1) .

التمرين الخامس:

f_1 الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

المنسوب إلى المعلم المتعامد و امتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ج- احسب $f(-x) + f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .
 وفسر النتيجة بيانيا ؟ .

هـ - بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل ؛ في المجال ؛

$[1; 2]$ حلا وحيدا α . فسر النتيجة بيانيا

و- مثل المنحنى (C) .

2) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

أ- ادرس قابلية اشتقاق g عند القيمة 0 . فسر النتيجة هندسيا .

ب- بين أن الدالة g زوجية .

ج- انطلاقا من (C) ارسم (C') منحنى الدالة g في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

التمرين السادس:

• f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{3x + \sin x}{x - 1}$$

1) بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ؛

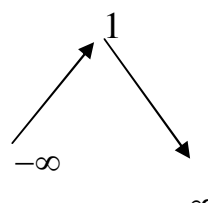
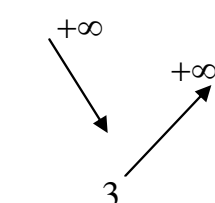
$$|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

2) استنتج

التمرين السابع:

f دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها لها جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						

تكتب العبارة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} \quad \text{حيث } a, b, c \text{ أعداد حقيقية}$$

1) احسب $f'(x)$.

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f :

عين الأعداد الحقيقية a, b, c .

التمرين الثامن:

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$$

1/ أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

لاحظ أن $g(1) = 0$

2/ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$:

$$f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2} \quad \text{وليكن } (c_f)$$

منحنى f في المستوى المنسوب للمعلم المتعامد $(o, \vec{i}, \vec{j})$

$$\|\vec{j}\| = 3cm; \|\vec{i}\| = 2cm \quad \text{حيث:}$$

أ) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم تحقق أنه من أجل كل x من

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-2)^3} : \mathbb{R} - \{2\}$$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$

ج) شكل جدول تغيرات f

3) بين أن (c_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (D)

حيث (Δ) هو المستقيم المقارب المائل

4) أدرس وضعية (c_f) بالنسبة لـ (Δ)

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس (c_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

6/ أرسم $(\Delta); (D); (T); (c_f)$.

التمرين التاسع:

نعرف الدالة f على المجالين: $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

وليكن (c_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1) أدرس نهايات f عند حدود مجالي تعريفها

2) بين أن (c_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل (Δ) يطلب تعيين

معادلة له.

3) بين أن (c_f) يشترك مع مقاربه المائل في نقطة يطلب

تعيين إحداثيها، ثم حدد وضعية (c_f) مع (Δ)

4) عين نقط تقاطع (c_f) مع المستقيمين المعروفين

بمعادلتيهما: $y = 2, y = 0$

5) تحقق أن الدالة المشتقة للدالة f معرفة كما يلي

$$f'(x) = \frac{xp(x)}{(x+1)^3} \quad \text{حيث } p(x) \text{ كثير حدود من الدرجة}$$

الثانية

6) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم ارسم (c_f) أرسم (c_f)

سلاسل البناء والتكوين: ج سح- العام الدراسي: 2019/2020	كراسة الدوال والإستمرارية...الصفحة (4)
	الأستاذ: جرادى سلطان (الثالثة ع + ر + ت ر)

$\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 3 & ; x \in [1; +\infty[\\ f(x) = \dots & ; x \in]-\infty; 1[\end{cases}$ اقترح عبارة لـ $f(x)$ على المجال $] -\infty; 1[$ حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$. التمرين الثالث عشر: أوجد مايلي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x + 4}{x^2 - 3}\right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin x}{x}\right), \lim_{x \rightarrow -1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$ التمرين الرابع عشر: لدينا n من الأعداد الحقيقية المختلفة مثنى- مثنى: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ نعرف الدالة العددية f من أجل كل عدد حقيقي x كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n}$ حيث: $x \neq a_i; i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (1) أدرس إتجاه تغير الدالة (2) شكل جدول تغيرات الدالة f (3) ما هو عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2010$ التمرين الخامس عشر: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$ (1) احسب $f(1)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$ (2) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1; 1]$	التمرين العاشر: التمرين الأول: لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos x$ 1 / أ / برهن أنه من أجل كل x المجال $[0; +\infty[$ لدينا : $x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{1}{2}$ ب / استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 2 / أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$. ب / أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$ وأن $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$. ج / عين إشارة $f(x)$ من أجل كل x من $[0; +\infty[$ التمرين الحادي عشر: f هي الدالة المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ بـ : و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم . (1) بين أن الدالة f فردية (2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف. (3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$. حدد وضعية (C) بالنسبة لـ Δ (4) باستعمال نتيجة السؤال (1) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له. (5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $g(x) = -f(x)$ • عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C'). التمرين الثاني عشر: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
---	--

التمرين السادس عشر:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x+3}$ ونسمي

(c) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المزود با معلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$f(x) = x - 3 + \frac{6x+9}{x^2+3x+3}$$

3) إستنتج معادلة للمقارب المائل ثم أدرس وضعية (Δ) مع (c)

4) احسب عبارة المشتقة $f'(x)$ مبينا أنها تحقق العلاقة:

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)^2}{(x^2+3x+3)^2}$$

5) إستنتج جدول تغيرات الدالة f

6) برر أن النقطتين $O(0,0)$ و $A(-3,-9)$ هما نقطتا إنعطاف

للمنحني (c)

7) أرسم (Δ) و (c)

8) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $g(x) = \frac{|x|x^2}{x^2+3|x|+3}$

(γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أبين أن الدالة g زوجية .

ب) أرسم مع الشرح المنحني (γ) في نفس الشكل.

التمرين السابع عشر:

f الدالة العددية المعرفة على R كما يلي: $f(x) = \frac{x^3+9x}{2(x^2+1)}$

(1) عين العددين الحقيقيين a, b بحيث لكل عدد حقيقي x

$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

(2) أدرس إنتاج تغير الدالة f

(3) ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أثبت أن (c_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد متجانس

($O; \vec{i}, \vec{j}$) يقبل مقاربا مائلا (Δ)

5) بين أن (c_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

6) أرسم (c_f)

7) بين أن (c_f) يقبل مماسين يوازيان (Δ) وعين معادلتين لهما.

8) ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع (c_f) مع

$$y = \frac{1}{2}x + m$$
 المستقيم المعين بمعادلة له:

التمرين الثامن عشر:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
 ونسمي (c) التمثيل البياني للدالة f في

المستوي المزود با معلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$f(-x) + f(x) = 0$$

وبالنسبة لتمثيلها البياني؟

2) أوجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ حسابيا واستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ ، واستنتج وجود مقارب

مائلا للمنحني (c) عند $+\infty$

4) إستنتج معادلة المقارب المائل الثاني للمنحني (c) عند $-\infty$

5) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$ ثم ضع

جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

6) أرسم (c) ومقاريبه.