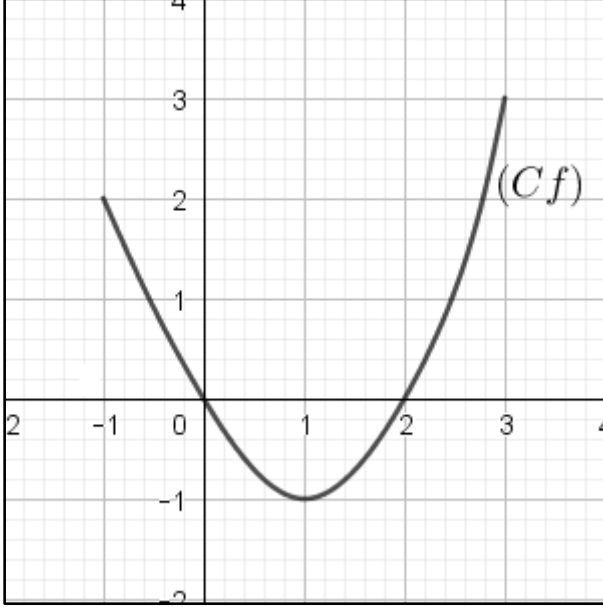


مجلة ريبي حول الاشتقاقية وتطبيقاتها

2022-2021

2 ثانوي علوم تجريبية + تقني رياضي

التمرين الأول



(C_f) التمثيل البياني لدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على المجال $[-1; 3]$ في الشكل المقابل.

✓ بقراءة بيانية عين إشارة $f(x)$, ثم إشارة $f'(x)$.

✓ نعتبر الدالة g معرفة على المجال $[-1; 3]$ حيث:

$$g(x) = [f(x)]^2$$

■ أحسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

■ استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $[-1; 3]$.

■ شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-1; 3]$.

التمرين الثاني

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية:

1. أحسب $f(2)$ و $f'(1)$ و $f'(-1)$.

2. أوجد قيمة a حتى تكون معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f)

عند النقطة c من الشكل: $y = ax - 16$

3. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة c .

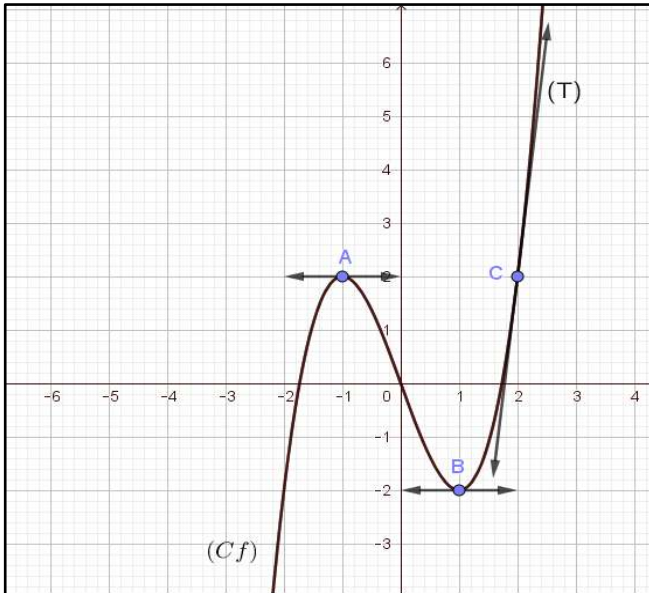
4. شكل جدول تغيرات الدالة f على R .

5. عين القيم الحدية المحلية لدالة f . ثم أعطي حصرا $f(x)$

على المجال $[-1; 1]$.

6. استنتج في المجال $[-1; 1]$ حل المعادلة $f(x) = 0$.

ثم استخرج إشارة $f(x)$ على المجال $[-1; 1]$.



التمرين الثالث

نعتبر الدالة f معرفة على المجال $[-1; 3]$ كمايلي: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية. ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm).

الجزء الأول: عيّن الأعداد a و b و c علما أن:

✓ التمثيل البياني للدالة f يقبل في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$ مماسا معاملا توجيهه -3 .

✓ $f(2) = -2$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f .

الجزء الثاني: نضع $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = 2$

✓ أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

✓ بين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

✓ عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة A .

✓ حل في $[-1; 3]$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج إحداثيات نقط تقاطع (c_f) مع حامل المحورين.

✓ أنشئ (T) و (c_f) .

✓ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-1; 3]$: $g(x) = |f(x)|$ ، أنشئ (c_g) .

إعداد الأستاذ

ريمي

التمرين الرابع

(c_f) التمثيل البياني لدالة f القابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية:

✓ عيّن مجموعة تعريف الدالة f .

✓ إستخرج إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريفها.

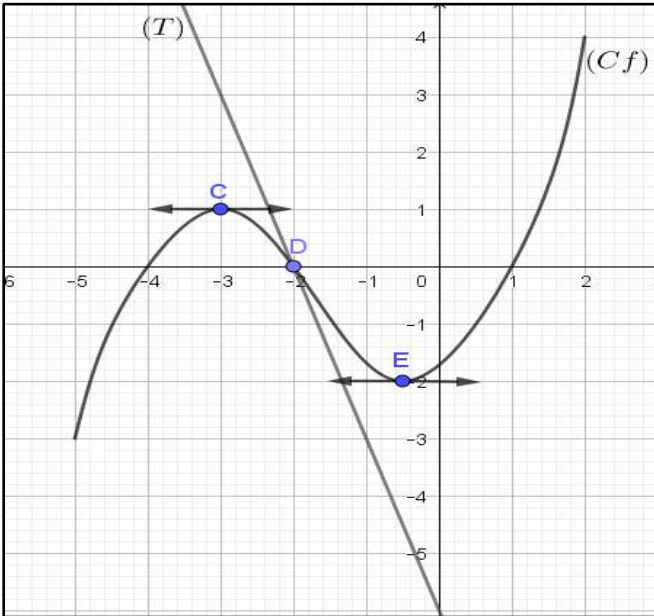
✓ شكل جدول تغيرات الدالة f .

✓ عيّن بقراءة بيانية العدد المشتق للدالة f عند كل من

$-\frac{1}{2}$ ، -2 و -3 .

✓ استنتج معادلات المماسات للمنحنى (c_f) عند C

و D ، E .



التمرين الخامس

- نعتبر الدالة g معرفة على $[-2; 2]$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - x^2 - 1$.
1. أدرس تغيرات الدالة g على $[-2; 2]$.
 2. استنتج أن للعبارة $g(x)$ جذر ، ثم عيّن تحليل $g(x)$.
 3. حدد حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

➤ نعتبر الدالة f معرفة على $[-2; 0[\cup]0; 2]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x}$

- ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 3cm).
1. بين أنه من أجل كل x من $[-2; 0[\cup]0; 2]$: $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$.
 2. استنتج إشارة $f'(x)$ على $[-2; 0[\cup]0; 2]$. وأدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. أعط صرًا لـ $f(x)$ على المجال $[\frac{1}{2}; 1]$.
 4. بين أنه من أجل كل x من $[-2; 0[\cup]0; 2]$: $2x^3 + 3x^2 - 1 = (x + 1)(2x^2 + x - 1)$.
 5. بين أن (c_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$ ، يطلب تعيين معادلتها.
 6. بين أن (c_f) تقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها. ثم أرسم (T_1) و (T_2) و (c_f) .

إعداد الأستاذ

ريمي

التمرين السادس

➤ نعتبر الدالة f معرفة على $[-4; 4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل x من $[-4; 4]$: $f'(x) = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$.
2. عيّن إشارة $f'(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسًا وحيدًا معامل توجيهه 4.
4. بين أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f) . وأكتب معادلة المماس (T) عند النقطة A .
5. عيّن نقط تقاطع مع المحاور (c_f) . ثم أرسم (T) و (c_f) .

➤ نعتبر الدالة g معرفة على $[-4; 4]$ كما يلي: $g(x) = f(|x|)$

1. أدرس شذوية الدالة g ، وأكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
2. أرسم (c_g) اعتمادًا على شرح كيفية رسمه.

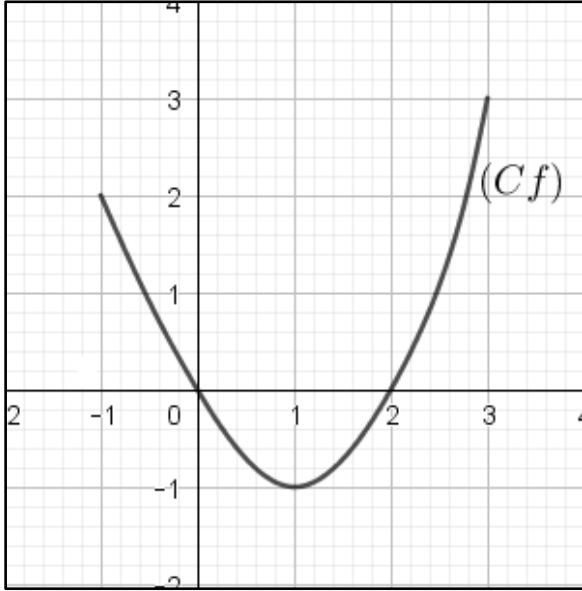
➤ نعتبر الدالة h معرفة على $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = f(x^2)$

1. بين أن من أجل كل x من $[-2; 2]$: $h'(x) = 2xf'(x^2)$.
2. أدرس إشارة $h'(x)$ على $[-2; 2]$ ، واستنتج إتجاه تغير الدالة h .

الحل النموذجي للتمارين

حل التمرين الأول

✓ (C_f) التمثيل البياني لدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على المجال $[-1; 3]$ في الشكل المقابل.
✓ بقراءة بيانية نعيّن إشارة $f(x)$:



نلاحظ من الشكل المقابل التمثيل البياني (C_f) فوق حامل محور الفواصل على المجالين $[-1; 0]$ و $[2; 3]$ إذن $f(x) \geq 0$ على المجالين $[-1; 0]$ و $[2; 3]$. وكذلك (C_f) تحت حامل محور الفواصل على المجال $[0; 2]$ إذن $f(x) \leq 0$ على المجال $[0; 2]$.
ومنه من أجل كل x من $[-1; 3]$ جدول إشارة $f(x)$ يكون من الشكل:

x	-1	0	2	3	
$f(x)$	+	0	-	0	+

✓ بقراءة بيانية نعيّن إشارة $f'(x)$:

نستنتج من التمثيل البياني (C_f) أن الدالة f متناقصة على المجال $[-1; 1]$ إذن $f'(x) \leq 0$ على المجال $[-1; 1]$.
ومتزايدة على المجال $[1; 3]$ إذن $f'(x) \geq 0$ على المجال $[1; 3]$.

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2	0	-1	0	3

✓ نعتبر الدالة g معرفة على المجال $[-1; 3]$ حيث: $g(x) = [f(x)]^2$

■ حساب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$:

وفق قاعدة مركب دالتين: $[[f(x)]^n]' = n \times [f(x)]^{n-1} \times f'(x)$ ، إذن تطبيقاً للقاعدة:

$$g'(x) = [[f(x)]^2]' = 2 \times f(x) \times f'(x)$$

إعداد الأستاذ

ريمي

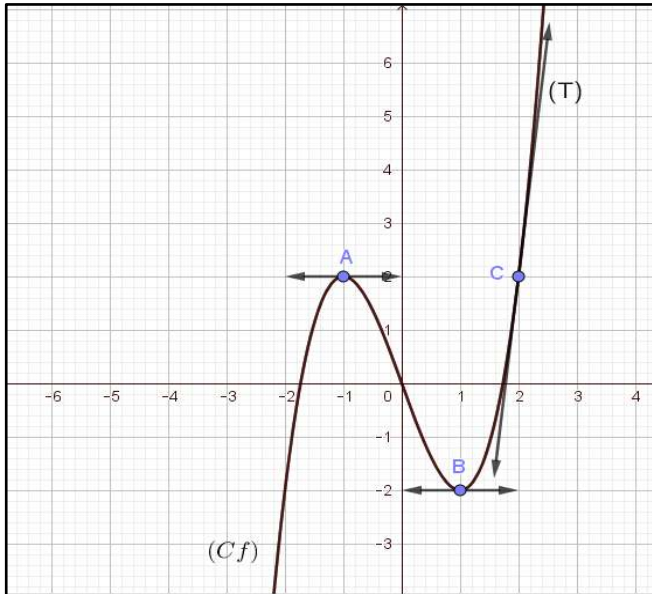
▪ استنتاج إشارة $g'(x)$ على المجال $[-1; 3]$:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	+	0	-	-	+
$f'(x)$	-	0	-	+	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+

▪ تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-1; 3]$:

x	-1	0	1	2	3
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	4	0	1	0	9

حل التمرين الثاني



(C_f) التمثيل البياني لدالة f في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية:

1. حساب $f(2)$ و $f'(1)$ و $f'(-1)$:

✓ صورة 2 بـ (C_f) هو 2 ونكتب: $f(2) = 2$.

✓ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند الفاصلة 1 إذن

$f'(1) = 0$ وهو معامل توجيه مماس لـ (C_f) معادلته

$y = 2$.

✓ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية كبرى عند الفاصلة -1

إذن $f'(-1) = 0$ وهو معامل توجيه مماس لـ (C_f) معادلته

$y = -2$.

2. إيجاد قيمة a حتى تكون معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة c حيث:

$$(T) : y = ax - 16 \quad (1)$$

لدينا (T) مماس لـ (C_f) عند النقطة $c(2; 2)$ حيث يحقق:

$$(T) : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$(T) : y = f'(2)x - 2f'(2) + 2 \quad (2)$$

بمطابقة (1) و (2) نجد: $a = f'(2)$ و نجد: $-2a + 2 = -16$

وبحل المعادلة ذات المجهول a نجد: $a = 9$.

إعداد الأستاذ

ريمي

3. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة c:

$$(T) : y = 9x - 16$$

4. تكميل جدول تغيرات الدالة f على R:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	1.8	$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗ 0	↗ 2	↘ 0	↘ -2	↗ 0	

5. تعيين القيم الحدية المحلية لدالة f. ثم إعطاء حصرًا لـ f(x) على المجال [-1; 1]:

✓ تعيين القيم الحدية المحلية لدالة f:

الدالة تقبل قيمة حدية محلية كبرى 2 عند المتغير -1 و تقبل قيمة حدية محلية صغرى -2 عند المتغير 1.

6. استنتج في المجال [-1; 1] حل المعادلة f(x) = 0 ثم استخرج إشارة f(x) على المجال [-1; 1]:

(C_f) يقطع (xx') في النقطة (0; 0) على المجال [-1; 1] لنستنتج أن حل المعادلة f(x) = 0 هو x = 0.

(C_f) فوق حامل محور الفواصل (xx') على المجال [-1; 0] إذن f(x) ≥ 0 على المجال [-1; 0]. وكذلك

(C_f) تحت حامل محور الفواصل (xx') على المجال [0; 1] إذن f(x) ≤ 0 على المجال [0; 1].

حل التمرين الثالث

نعتبر الدالة f معرفة على المجال [-1; 3] كمايلي: f(x) = ax³ + bx² + c حيث a و b و c أعداد حقيقية.

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$). (وحدة الطول 2cm).

الجزء الأول: تعيين الأعداد a و b و c علماً أن:

✓ التمثيل البياني للدالة f يقبل في النقطة ذات الفاصلة 1، x₀ مماساً معاملاً توجيهه -3.

$$f'(1) = -3 \text{ أي أن:}$$

✓ f(2) = -2 قيمة حدية محلية صغرى للدالة f هذا يعني f'(2) = 0

لدينا من أجل كل x من [-1; 3]: f(x) = ax³ + bx² + c

و f دالة قابلة للإشتقاق على المجال [-1; 3]: f'(x) = 3ax² + 2bx

$$\begin{cases} 3a + 2b = -3 \dots (1) \\ 8a + 4b + c = -2 \dots (2) \\ 12a + 4b = 0 \dots (3) \end{cases} \quad \text{أي أن:} \quad \begin{cases} f'(1) = -3 \\ f(2) = -2 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

من المعادلة (3) نجد: 4b = -12a ← b = -3a ... (4)

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (1) نجد: 3a + 2(-3a) = -3 ← 3a - 6a = -3

بحل المعادلة نجد: a = 1 وبتعويض قيمة a في المعادلة (4) نجد b = -3.

بتعويض قيمتي a و b في المعادلة (2) نجد: 8(1) + 4(-3) + c = -2 ← c = 2

إعداد الأستاذ

ريمي

الجزء الثاني: بوضع $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = 2$ نجد: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ ✓
دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

حساب عباره المشتق:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x : [-1; 3]$$

إشارة عباره المشتق:

لدراسة إشارة عباره المشتق نحل في المجال $[-1; 3]$ المعادلة $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x = 0 \quad \leftarrow \quad x(3x - 6) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ إذن حلول المعادلة هي:}$$

جدول إشارة عباره المشتق:

x	-1	0	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

استنتاج إتجاه تغير الدالة:

من جدول الإشارة $f'(x) \geq 0$ على المجالين $[-1; 0]$ و $[2; 3]$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجالين السابقين و $f'(x) \leq 0$ على المجال $[0; 2]$ نستنتج أن لدالة f متناقصة تماما على المجال السابق.

تشكيل جدول تغيرات الدالة:

x	-1	0	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-2	2	-2	2	

✓ لنبين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها:

نقطة الانعطاف:

نقطة الانعطاف هي النقطة:

- التي فاصلتها تنعدم عندها عباره المشتق f' ولا تتغير إشارتها.
- التي فاصلتها تنعدم عندها عباره المشتق f'' وتتغير إشارتها.
- التي يتخترق فيها المماس المنحني (C_f) أو المنحني (C_f) يقطع فيها المماس.

حساب عباره المشتق f'' :

$$f''(x) = 6x - 6$$

إشارة عبارة المشتق f'' :

لدراسة إشارة $f''(x)$ على المجال $[-1; 3]$ نحل المعادلة: $f''(x) = 0$
 $6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

x	-1	1	3
$f''(x)$	-	0	+

نلاحظ أن الفاصلة 1 إنعكست عندها عبارة المشتق f'' وتغيرت إشارتها من السالب إلى الموجب إذن النقطة $A(1; f(1) = 0)$ تسمى نقطة إنعطاف.

إعداد الأستاذ

ريحي

✓ تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة A :

يعني كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند فاصلة A :

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -3(x - 1) + 0$$

$$(T) : y = -3x + 3$$

✓ نحل في $[-1; 3]$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم نستنتج إحداثيات نقط تقاطع (c_f) مع حامل المحورين:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

لحل معادلة من الدرجة الثالثة نقوم بتحليل العبارة $x^3 - 3x^2 + 2$ إلى جداء عبارتين حيث:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

حيث α جذر للعبارة $x^3 - 3x^2 + 2$

إيجاد الجذر α :

بما أن $1 - 3 + 2 = 0$ فإن $\alpha = 1$ جذر للعبارة $f(x)$ حيث يحقق: $f(1) = 0$

إيجاد المعاملات a و b و c :

باستعمال طريقة هورنر نجد:

	2	0	-3	1
$\alpha = 1$	-2	-2	1	0
	0	-2	-2	1
	$c = -2$		$b = -2$	$a = 1$

إذن يمكن حل المعادلة $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ اعتمادا على تحليل العبارة $x^3 - 3x^2 + 2$ حيث:

$$(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

إذن لحل المعادلة نجعل: $(x - 1) = 0$ أو $x^2 - 2x - 2 = 0$ ومنه $x = 1$ ولحل المعادلة من الدرجة

الثانية $x^2 - 2x - 2 = 0$ نستخدم المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ لنجد: $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-2)$

إذن: $\Delta = 12$ للمعادلة حلان متمايزان هما:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

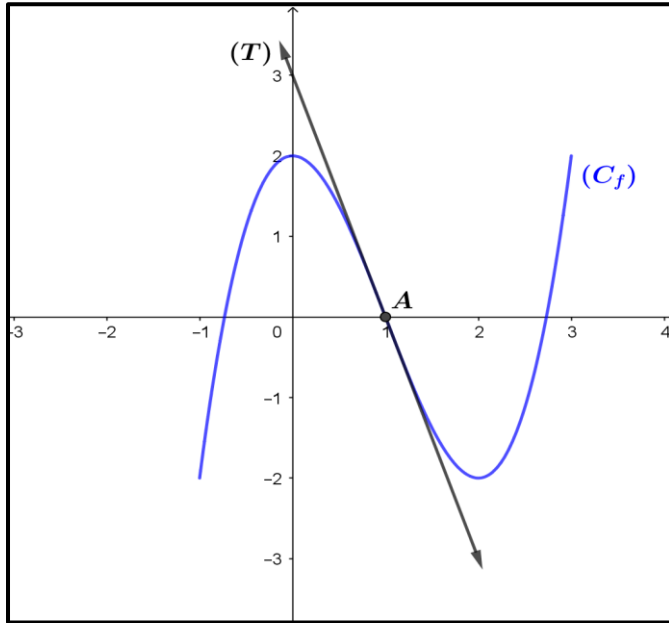
إذن حلول المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-1; 3]$ هي: $s = \{1; 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$

نستنتج إحداثيات نقط تقاطع (c_f) مع حامل المحاورين:

لدينا حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي: $s = \{1; 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$ فنستنتج أن $(xx') \cap (c_f)$ في النقط $(1; 0)$ و $(1 - \sqrt{3}; 0)$ و $(1 + \sqrt{3}; 0)$.

ولدينا من جدول التغيرات $f(0) = 2$ فنستنتج أن $(yy') \cap (c_f)$ في النقطة $(0; 2)$.

✓ إنشاء (T) و (c_f) :



▪ $(T) : y = -3x + 3$ مماس يمر على نقطة

الإنعطاف $A(1; 0)$ والترتيبة 3 إذا قمنا بتوصيل

بين النقطة A والترتيبة 3 نتصل على مستقيم

المماس (T) .

▪ من جدول التغيرات ووضعية إنطلاق (c_f) عند

النقطة $(-1; -2)$ ووضعية الوصول (c_f) عند

النقطة $(3; 2)$.

▪ نقط مرور (c_f) هي النقط $(1 - \sqrt{3}; 0)$

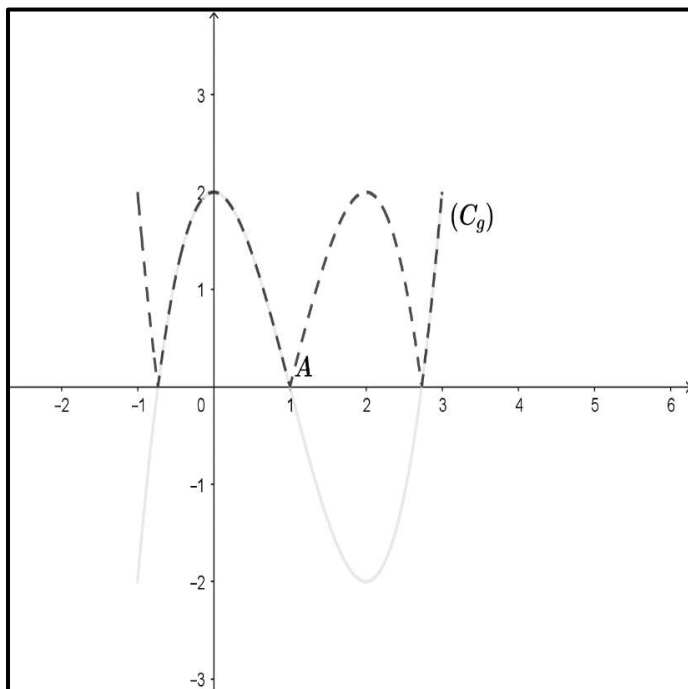
و $(0; 2)$ و $(1; 0)$ و $(2; -2)$ و $(1 + \sqrt{3}; 0)$.

✓ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-1; 3]$:

$g(x) = |f(x)|$ ، أنشئ (c_g) .

▪ (c_f) فوق (xx') منطبق على (c_g) .

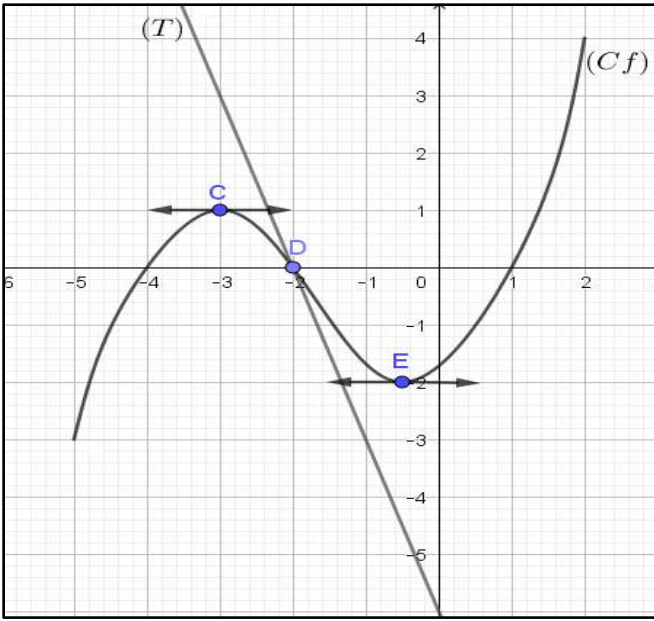
▪ (c_f) تحت (xx') نظير مع (c_g) بالنسبة (xx')



إعداد الأستاذ

ريمي

حل التمرين الرابع



(c_f) التمثيل البياني لدالة f القابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها في الشكل المقابل.

✓ تعيين مجموعة تعريف دالة f :

$$D_f = [-5; 2]$$

✓ استخراج إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريفها:

نستنتج من التمثيل البياني (c_f) أن الدالة f متزايدة على

المجالين $[-5; -3]$ و $[-\frac{1}{2}; 2]$ إذن $f'(x) \geq 0$ على

المجالين $[-5; -3]$ و $[-\frac{1}{2}; 2]$.

ومتناقصة على المجال $[-3; -\frac{1}{2}]$ إذن $f'(x) \leq 0$ على

المجال $[-3; -\frac{1}{2}]$.

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-5	-3	$-\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	-3	1	-2	4

✓ تعيين بقراءة بيانات العدد المشتق للدالة f عند كل من -3 ، -2 ، و $-\frac{1}{2}$:

عند النقطة C ذات الفاصلة -3 الدالة f تقبل قيمة حدية محلية كبرى 1 إذن $f'(-3) = 0$.

عند النقطة E ذات الفاصلة $-\frac{1}{2}$ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى -2 إذن $f'(-\frac{1}{2}) = 0$.

النقطة D ذات الفاصلة -2 هي نقطة اختراق المماس (T) للمنحنى (c_f) ومعادلة المماس (T) تكتب من الشكل:

$$(T) : y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) \quad \leftarrow (T) : y = f'(-2)x + 2f'(-2) + 0$$

ومن الشكل المقابل لدينا: $(T) : y = f'(-2)x - 6$ بالمطابقة نجد: $2f'(-2) = -6$ إذن $f'(-2) = -3$

✓ استنتاج معادلات المماسات للمنحنى (c_f) عند C و E و D .

عند النقطة C معادلة المماس هي: $y = 1$.

عند النقطة E معادلة المماس هي: $y = -2$.

عند النقطة D معادلة المماس هي: $(T) : y = -3x - 6$.

إعداد الأستاذ

ريمي

➤ نعتبر الدالة g معرفة على $[-2; 2]$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - x^2 - 1$
1. دراسة تغيرات الدالة g على $[-2; 2]$:

إعداد الأستاذ

ريمي

• حساب عبارة المشتق:

$$g'(x) = 6x^2 - 2x : [-2; 2]$$

• إشارة عبارة المشتق:

لدراسة إشارة عبارة المشتق نحل في المجال $[-2; 2]$ المعادلة $f'(x) = 0$

$$6x^2 - 2x = 0 \quad \leftarrow \quad x(6x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 0 \\ 6x - 2 = 0 \end{cases} \text{ إذن حلول المعادلة هي:}$$

• جدول إشارة عبارة المشتق:

x	-2	0	$\frac{1}{3}$	2
$g'(x)$	+	0	-	+

• استنتاج اتجاه تغير الدالة:

من جدول الإشارة $f'(x) \geq 0$ على المجالين $[-2; 0]$ و $[\frac{1}{3}; 2]$ لنستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجالين السابقين و $f'(x) \leq 0$ على المجال $[0; \frac{1}{3}]$ لنستنتج أن لدالة f متناقصة تماما على المجال السابق.

• تشكيل جدول تغيرات الدالة:

x	-2	0	$\frac{1}{3}$	2
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	-21	-1	$\frac{28}{27}$	11

2. استنتاج أن للعبارة $g(x)$ جذر ، ثم نعين تحليل $g(x)$:

العبارة $g(x)$ من الدرجة الثالثة نقوم بتحليل العبارة $2x^3 - x^2 - 1$ إلى جداء عبارتين حيث:

$$2x^3 - x^2 - 1 = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

حيث α جذر للعبارة $2x^3 - x^2 - 1$

بما أن $2 - 1 - 1 = 0$ فإن $\alpha = 1$ جذر للعبارة $g(x)$ حيث يحقق: $g(1) = 0$

إيجاد المعاملات a و b و c :

بإستعمال طريقة هورنر نجد:

	-1	0	-1	2
1	1	1	2	0
	0	1	1	2
		$c = 1$	$b = 1$	$a = 2$

إذن يمكن تحليل العبارة $g(x)$ من الشكل: $g(x) = (x - 1)(2x^2 + x + 1)$.

3. تحديد حسب قيم x ، إشارة $g(x)$:

لتحديد إشارة العبارة $g(x)$ نحل في المجال $[-2; 2]$ المعادلة $g(x) = 0$ أي $(x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0$

إذن لحل المعادلة نجعل: $0 = (x - 1)$ أو $2x^2 + x + 1 = 0$ ومنه $x = 1$ ولحل المعادلة من الدرجة

الثانية $2x^2 + x + 1 = 0$ نستخدم المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ لنجد: $\Delta = (1)^2 - 4(2)(1) = -7$

إذن: $\Delta = -7$ إذن ليس للمعادلة $2x^2 + x + 1 = 0$ حل.

ومنه حل المعادلة $g(x) = 0$ هو $s = \{1\}$.

إعتمادا على جدول تغيرات الدالة g يمكن إستنتاج إشارة $g(x)$:

x	-2	0	$\frac{1}{3}$	1	2
$g'(x)$		+	0	-	0
$g(x)$		-21	-1	$\frac{28}{27}$	11

$g(x) \leq 0$ من أجل كل x ينتمي للمجال $[-2; 1]$ و $g(x) \geq 0$ من أجل كل x ينتمي للمجال $[1; 2]$.

➤ نعتبر الدالة f معرفة على $[-2; 0[\cup]0; 2]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x}$

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 3cm).

1. لنبين أنه من أجل كل x من $[-2; 0[\cup]0; 2]$: $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$

f دالة قابلة للإشتقاق على $[-2; 0[\cup]0; 2]$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x)(3x) - (3)(x^3 - x^2 + 1)}{(3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9x^3 - 6x^2 - 3x^3 + 3x^2 - 3}{9x^2} = \frac{6x^3 - 3x^2 - 3}{9x^2} = \frac{3(2x^3 - x^2 - 1)}{3 \times 3x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^3 - x^2 - 1)}{3x^2} = \frac{g(x)}{3x^2}$$

2. إستنتاج إشارة $f'(x)$ على $[-2; 0[\cup]0; 2]$. وندرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم نشكل جدول تغيراتها.

بما أن $3x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $[-2; 0[\cup]0; 2]$.

x	-2	0	1	2
$f'(x)$	-		0	+

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[-2; 0[$ و $]0; 1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1; 2]$.

x	-2	0	1	2
$f'(x)$	-		0	+
$f(x)$	$\frac{11}{6}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$

3. أعطى حصرًا 1 $f(x)$ على المجال $[\frac{1}{2}; 1]$.

من جدول التغيرات الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{2}; 1]$. إذن من أجل كل x من $[\frac{1}{2}; 1]$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x) \geq f(1)$$

$$f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{7}{12}$$

4. لنبين أنه من أجل كل x من $[-2; 0[\cup]0; 2]$: $2x^3 + 3x^2 - 1 = (x+1)(2x^2 + x - 1)$.

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2x^3 + x^2 - x + 2x^2 + x - 1$$

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

5. لنبين أن (c_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$ ، ونعين معادلتهم:

(c_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$ معناه نعين فاصلتا نقطتا المماسين (T_1) و (T_2)

$$f'(a) = -\frac{4}{3} \quad \text{حيث تحقق:}$$

$$\frac{(2a^3 - a^2 - 1)}{3a^2} = -\frac{4}{3}$$

بجعل جداء الطرفين في الوسطين نجد: $3(2a^3 - a^2 - 1) = -12a^2$ أي $6a^3 - 3a^2 - 3 = -12a^2$

$$6a^3 - 3a^2 - 3 + 12a^2 = 0$$

$$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0 \quad \leftarrow \text{إخراج العدد 3 عامل مشترك}$$

$$(a+1)(2a^2 + a - 1) = 0 \quad \leftarrow \text{التعويض بالتفصيل نجد}$$

إذن لحل المعادلة نجعل: $(a+1) = 0$ أو $2a^2 + a - 1 = 0$ ومنه $a_1 = -1$ ولحل المعادلة من الدرجة

الثانية $2a^2 + a - 1 = 0$ نستخدم المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ لنجد: $\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1)$

إذن: $\Delta = 9$ للمعادلة حلان متميزان هما:

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = -1$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}$$

إذن (c_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$ في نقطتين ذات الفاصلتين $1 - \frac{1}{2}$.

■ معادلة المماس (T_1) عند الفاصلة -1 : $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$

$$y = -\frac{4}{3}(x + 1) + \frac{1}{3}$$

$$(T_1) : y = -\frac{4}{3}x - 1$$

■ معادلة المماس (T_2) عند الفاصلة $\frac{1}{2}$: $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{12}$$

$$(T_2) : y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{4}$$

6. لنبين أن (c_f) تقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها: ثم أرسو (T_1) و (T_2) و (c_f) .

لتحديد نقطة الانعطاف ندرس إشارة $f''(x)$ حيث f' قابلة للاشتقاق على $[-2; 0[\cup]0; 2]$:

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 2x)(3x^2) - (6x)(2x^3 - x^2 - 1)}{9x^4}$$

$$f''(x) = \frac{18x^4 - 6x^3 - 12x^4 + 6x^3 + 6x}{9x^4}$$

$$f''(x) = \frac{6x^4 + 6x}{9x^4}$$

إحداثيات
رسمي

بما أن $9x^4 > 0$ فإن إشارة $f''(x)$ من إشارة $6x^4 + 6x$:

$$6x^4 + 6x = 0 \quad \leftarrow \quad 6x(x^3 + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ (مرفوض)} \\ x = -1 \text{ (مقبول)} \end{cases}$$

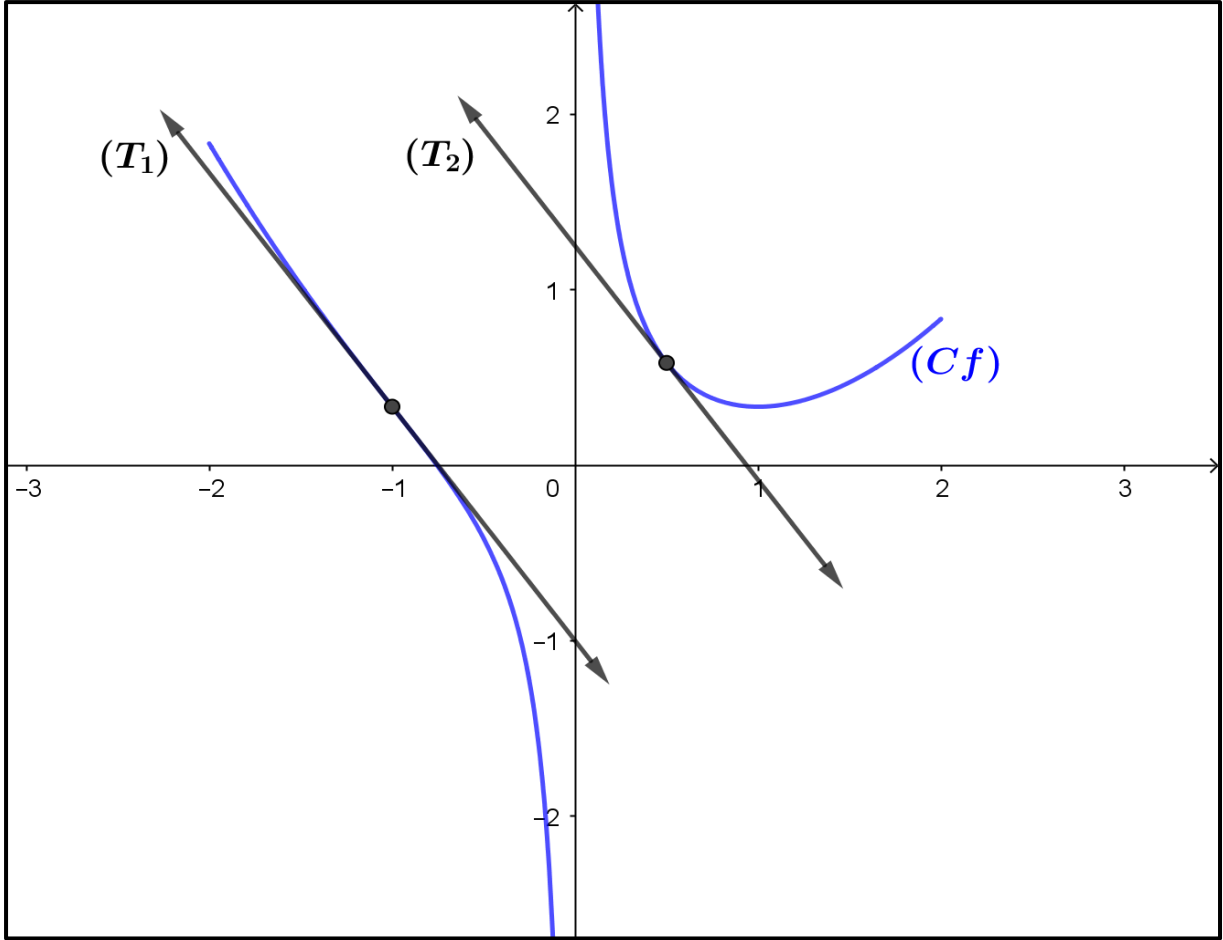
$$\begin{cases} 6x = 0 \\ x^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	2
$6x$	-	-	+	
$x^3 + 1$	-	+	+	
$f''(x)$	+	-	+	

نلاحظ أن الفاصلة -1 إنعدم عند عبارة المشتق f'' وتغيرت إشارتها من الموجب إلى السالب إذن النقطة

$\left(-1; \frac{1}{3}\right)$ تسمى نقطة إنعطاف وهي النقطة التي ينفرد فيها المماس (T_1) المنحني (c_f) .

رسم (T_1) و (T_2) و (C_f) :



إعداد الأستاذ

ريحي

التمرين السادس

➤ نعتبر الدالة f معرفة على $[-4; 4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$.
ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوى مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. لنبين أنه من أجل كل x من $[-4; 4]$: $f'(x) = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

f دالة قابلة للإشتقاق على $[-4; 4]$:

$$f'(x) = \frac{(2x + 4)(x^2 + 1) - (2x)(x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + 4x^2 + 4 - 2x^3 - 8x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-4x^2 + 4)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

2. تعيين إشارة $f'(x)$ ثم ندروس إتجاه تغير الدالة f ، و نشكل جدول تغيراتها:

إعداد الأستاذ

رومي

بما أن $(x^2 + 1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-4(x^2 - 1)$:

$$-4(x^2 - 1) = 0 \quad \leftarrow \quad (x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ \text{أو} \\ x = 1 \end{cases}$$

x	-4	-1	1	4
-4	—	—	—	—
$x^2 - 1$	+	0	0	+
$f'(x)$	—	0	+	—

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[-4; -1]$ و $[1; 4]$ و متزايدة تماما على المجال $[-1; 1]$.

x	-4	-1	1	4
$f'(x)$	—	0	+	—
$f(x)$	$\frac{1}{17}$	-1	3	$\frac{33}{17}$

3. لنبين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا وحيدا معامل توجيهه 4:

(c_f) يقبل مماسا وحيدا معامل توجيهه 4 معناه مماسا في نقطة وحيدة فاصلتها a .

$$f'(a) = 4$$

$$-4(a^2 - 1) = 4(a^2 + 1)^2 \quad \leftarrow \quad \frac{-4(a^2 - 1)}{(a^2 + 1)^2} = 4$$

$$-a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 \quad \leftarrow \quad -(a^2 - 1) = (a^2 + 1)^2$$

$$-a^4 - 3a^2 = 0 \quad \leftarrow \quad -a^2 + 1 - a^4 - 2a^2 - 1 = 0$$

$$a^2(a^2 + 3) = 0 \quad \leftarrow \quad a^4 + 3a^2 = 0$$

إذن لحل المعادلة نجعل: $a^2 = 0$ أو $a^2 + 3 = 0$ أي $a = 0$ أو $a^2 = -3$ (مرفوض)

إذن نقول (c_f) يقبل مماسا وحيدا معامل توجيهه 4 معناه مماسا في نقطة وحيدة فاصلتها $a = 0$.

4. لنبين أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f) :

النقطة A مركز تناظر للمنحنى (c_f) إذا تحقق x و $-x$ من $[-4; 4]$:

$$f(-x) + f(x) = 2$$

$$\frac{(-x)^2 + 4(-x) + 1}{(-x)^2 + 1} + \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} = 2$$

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} = 2$$

أي $\frac{2(x^2+1)}{x^2+1} = 2$ بالاختزال نجد $2 = 2$. إذن النقطة A مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5. كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة A .

$$(T) : y = f'(0)(x + 0) + f(0)$$

$$(T) : y = 4x + 1$$

6. تعيين نقط تقاطع مع المحاور (C_f) .

$(C_f) \cap (xx') = (x; 0)$ في النقطة $(x; 0)$ أي $f(x) = 0$ ومنه $\frac{x^2+4x+1}{x^2+1} = 0$ إذن $x^2 + 4x + 1 = 0$

نستخدم المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ لنجد: $\Delta = (4)^2 - 4(1)(1)$

إذن: $\Delta = 12$ للمعادلة حلان متمايزان هما:

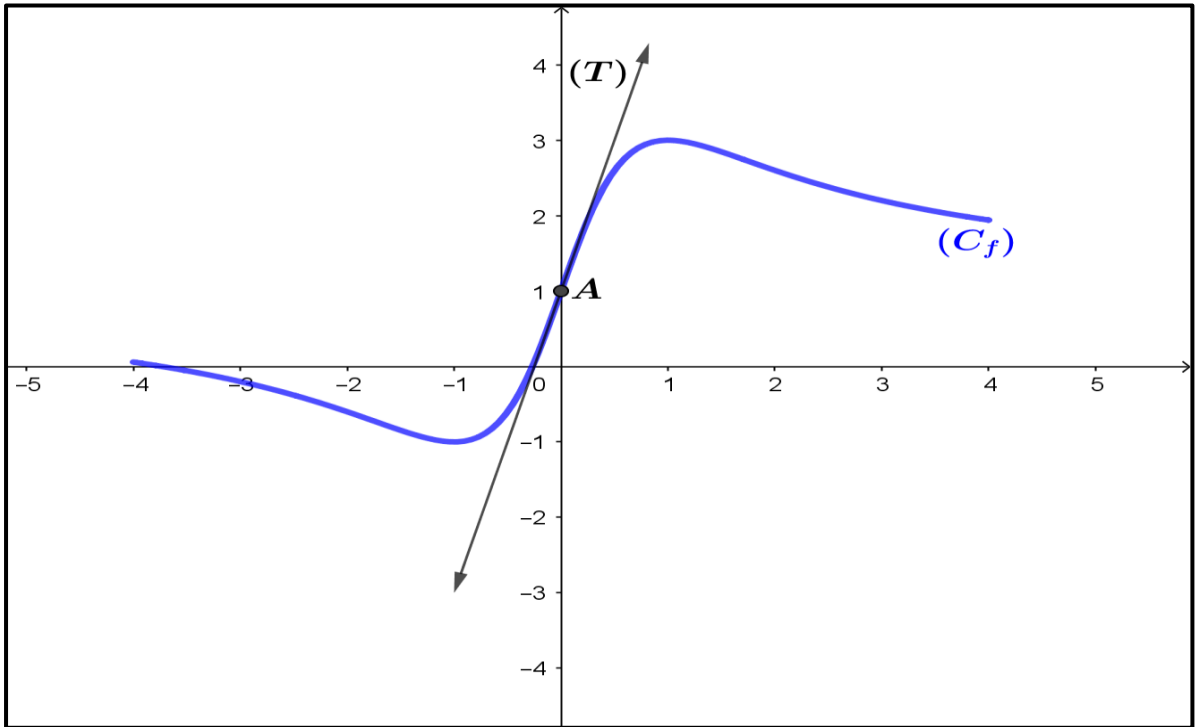
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3}$$

إذن $(C_f) \cap (xx') = (-2 - \sqrt{3}; 0)$ و $(-2 + \sqrt{3}; 0)$.

$(C_f) \cap (yy') = (0; y)$ في النقطة $(0; y)$ أي $f(0) = 1$ إذن $(C_f) \cap (yy') = (0; 1)$ في النقطة $(0; 1)$

7. رسم (T) و (C_f) .



إعداد الأستاذ

ريهي

➤ نعتبر الدالة g معرفة على $[-4; 4]$ كما يلي: $g(x) = f(|x|)$

1. ندرس شفعية الدالة g ، وكتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

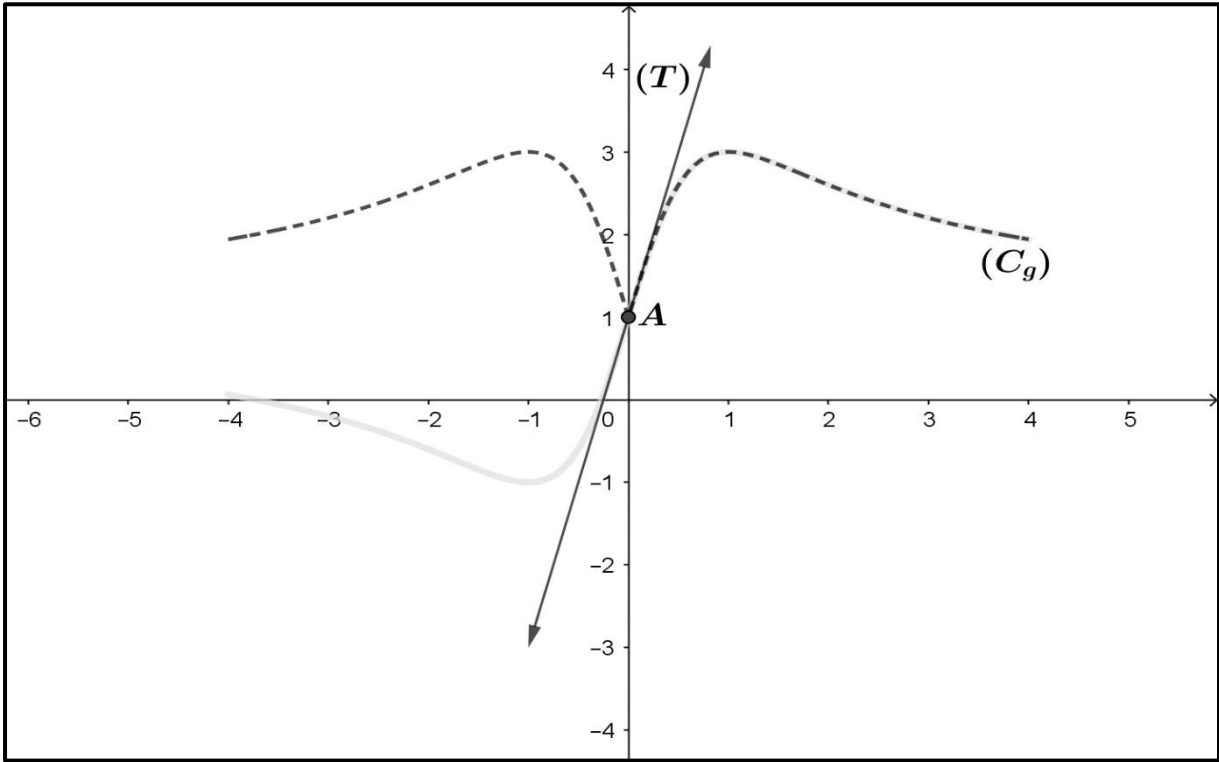
لدينا من أجل كل x و $-x$ من $[-4; 4]$: $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$.
إذن الدالة g دالة زوجية.

يمكن كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة على الشكل الآتي:

$$g(x) = \begin{cases} f(-x); & x \in [-4; 0[\\ f(x); & x \in [0; 4[\end{cases}$$

2. نرسم (c_g) اعتمادا على شرح كيفية رسمه:

(c_g) ينطبق على (c_f) في المجال $[0; 4]$. بما أن الدالة g دالة زوجية المنحنى (c_g) سيكون متناظر بالنسبة (yy') على المجال $[-4; 4]$.



➤ نعتبر الدالة h معرفة على $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = f(x^2)$

الدالة h هي عبارة على الدالة مربع u متبوعة بالدالة f حيث: $h(x) = f(u(x))$

1. لنبين أن من أجل كل x من $[-2; 2]$: $h'(x) = 2xf'(x^2)$

h دالة قابلة للاشتقاق على $[-2; 2]$: $h'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$

$$h'(x) = f'(x^2) \times 2x = 2xf'(x^2)$$

إعداد الأستاذ

رومي

2. ندرس إشارة $h'(x)$ على $[-2; 2]$ ونشكل جدول تغيرات الدالة h .

إعداد الأستاذ

ربيعي

لدراسة إشارة $h'(x)$ ندرس إشارة $2x$ و $f'(x^2)$ على $[-2; 2]$:

$2x \geq 0$ على المجال $[0; 2]$ و $2x \leq 0$ على المجال $[-2; 0]$.

لتحديد إشارة $f'(x^2)$ نبحث على إشارة $f'(x)$:

لدينا $f'(x) = 0$ لما $x = -1$ أو $x = 1$ إذن $f'(x^2) = 0$ لما $x^2 = -1$ (مرفوض) أو $x^2 = 1$

ومنه $f'(x^2) = 0$ لما $x = -1$ أو $x = 1$

لدينا $f'(x) \leq 0$ لما $x \leq -1$ أو $x \geq 1$ إذن $f'(x^2) \leq 0$ لما $x^2 \leq -1$ (مرفوض) أو $x^2 \geq 1$.

حل في المجال $[-2; 2]$ المتراجحة $x^2 \geq 1$ أي $x^2 - 1 \geq 0$:

x	-2	-1	1	2
$x^2 - 1$	+	0	0	+

حل المتراجحة $x^2 - 1 \geq 0$ هي $[1; 2]$ و $[-2; -1]$ إذن نستنتج حل المتراجحة $f'(x^2) \leq 0$ هو $[1; 2]$

و $[-2; -1]$ وكذلك $f'(x^2) \geq 0$ على المجال $[-1; 1]$.

جدول إشارة $h'(x)$:

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x^2)$	-	0	+	+	-
$2x$	-	-	0	+	+
$h'(x)$	+	0	-	+	-

ومنه نستنتج أن الدالة h متزايدة تماما على المجالين $[0; 1]$ و $[-2; -1]$ و متناقصة تماما على المجالين

$[1; 2]$ و $[-1; 0]$.