

الاستمرارية

✧ الاستمرارية: f دالة معرفة على مجال D_f يشمل العدد الحقيقي x_0 .

♠ القول أن الدالة f مستمرة عند x_0 يعني: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
♠ إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I يعني الدالة f مستمرة عند كل نقطة من I .
♠ التفسير البياني: الدالة f مستمرة على المجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

✧ مبرهنة القيم المتوسطة:

♠ f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$ ومن أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
فإن: المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]a; b[$.

✧ حالة خاصة:

♠ f دالة معرفة ومستمرة على مجال $[a; b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ أي 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$
فإن: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]a; b[$.

✧ التفسير الهندسي للمعادلة $f(x) = 0$:

♠ المنحني C_f يقطع حامل محور الفواصل على الأقل مرة واحدة في نقطة فاصلتها α بحيث: $a < \alpha < b$

سلسلة تمارين الاستمرارية

✓ التمرين 01
♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

♦ أدرس استمرارية الدالة f عند $x_0 = 0$.

✓ التمرين 02
♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x + 4} + 1 & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

♦ بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R} - \{-1\}$.

✓ التمرين 03
♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4x + 5 & ; x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + 7\alpha - 9 & ; x < 0 \end{cases}$$

♦ عين قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 0$.

✓ التمرين 04 ◀

♠ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = \beta \end{cases}$$

♦ عيّن قيمة β حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 2$.

✓ التمرين 05 ◀

♠ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

[1] ♦ اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

[2] ♦ ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0 = 0$.

[3] ♦ انطلاقا من المنحني الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto x^2$ إستنتج التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f .

✓ التمرين 06 ◀

♠ دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ب :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} & ; x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

[1] ♦ بين ان f زوجية.

[2] ♦ اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

[3] ♦ ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها .

[4] ♦ أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .

[5] ♦ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

✓ التمرين 07 ◀

♠ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{x^2 - 2|x - 3|}{x^2 + 1}$

[1] ♦ اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

[2] ♦ ادرس استمرارية الدالة f عند 3 .

✓ التمرين 08 ◀

♠ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 5 & ; x < 1 \\ f(x) = ax + 2 & ; 1 \leq x < 4 \\ f(x) = x^2 - b & ; x \geq 4 \end{cases}$$

♦ عيّن قيمة a و b حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$.

✓ التمرين 09 ◀

♠ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

[1] ♦ بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]1; 2[$.

♠ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

[2] ♦ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل α في المجال $]0; 1[$.

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

تطبيق القاعدة التالية :
عند الا لا نهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

نستعمل طريقة التحليل :
وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{ax + \beta} = |x| \sqrt{\frac{a}{x} + \frac{\beta}{x^2}}$$

حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

$$f(x) = \sqrt{ax + b} + \alpha x + \beta$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$$

$$a = \alpha$$

$$a \neq \alpha$$

$$\sqrt{a} = |\alpha|$$

$$\sqrt{a} \neq |\alpha|$$

نستعمل طريقة المرافق

نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

المقام من الشكل $(\alpha x + \beta)$

$f(x)$ تتضمن جذراً $\sqrt{\quad}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

$$\textcircled{1} \text{ إظهار العبارة : } \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

نستعمل طريقة المرافق :

$$\textcircled{1} \text{ نضرب : } \frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}} f(x)$$

$$\textcircled{2} \text{ ثم نختزل على : } (x - a)$$

نستعمل طريقة الإختزال :

$$\textcircled{1} \text{ نحلل البسط والمقام.}$$

$$\textcircled{2} \text{ ثم نختزل على } (x - a)$$

$$f(x) = \frac{(x - a)(\dots\dots\dots)}{(x - a)(\dots\dots\dots)}$$

مثال 06

$$f(x) = \sqrt{2x-3} - 3x + 2$$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-3} - 3x + 2$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\sqrt{2-3/x} - 3x + 2]$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{2 - \frac{3}{x^2}} - 3x + 2$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

مثال 07

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، $(0/0)$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)}$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$

مثال 08

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)$

مثال 09

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

لحساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ يجب أن تكون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ تكافئ

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

ومنه بوضع $g(x) = \sqrt{x+3}$ نجد $g(1) = 2$ ومنه $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ومنه $g'(1) = \frac{1}{4}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$

مثال 01

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$$

تكافئ : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$ تكافئ : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2}}{x} = -\sqrt{2}$

مثال 02

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} + 2x - 2$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ تكافئ

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-3} + (2x-2))(\sqrt{4x^2-3} - (2x-2))}{(\sqrt{4x^2-3} - (2x-2))}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+1}{\sqrt{4x^2-3} - (2x-2)}$ تكافئ

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{-4x} = -2$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x+1}{-2x(\sqrt{1+1})}$

مثال 03

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} + x - 2$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2-3} + x - 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + x - 2$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left[\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right]$

مثال 04

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{4x^2-2}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ تكافئ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-3} - \sqrt{4x^2-2})(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})}{(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})}$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{4x^2-3} + \sqrt{4x^2-2})} = 0$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2x} = 0$

مثال 05

$$f(x) = \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{9x^2-2}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2-3} - \sqrt{9x^2-2}$

تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x[2-3]$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{4-3/x^2} - x\sqrt{9-2/x^2}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$