

ملخص الدوال كثيرات الحدود

2

1. الدالة كثير حدود

نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة P معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي و $a_0; a_1; \dots; a_{n-1}; a_n$ أعداد حقيقية ثابتة.

2. درجة كثير حدود

كل دالة كثير حدود غير معدومة P تكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ حيث } a_n \neq 0$$

يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود P ، تسمى الأعداد $a_0; a_1; \dots; a_{n-1}; a_n$ معاملاته

3. تساوي كثيري حدود

- يكون كثير حدود معدوما إذا وفقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود، غير معدومين، متساويين إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

P كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

α جذر لكثير الحدود P يعني أن $P(\alpha) = 0$.

4. جذر كثير حدود

5. تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x - \alpha)$

ليكن P كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

إذا كان $P(\alpha) = 0$ (α جذر لكثير الحدود P) فإنه يوجد كثير حدود Q بحيث من أجل كل

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) \text{ لدينا}$$

تمرين تطبيقي: P دالة كثير حدود معرفة بـ: $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

☑ تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود P

☑ عين كثير حدود Q بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x - 2)Q(x)$

طريقة: لتعيين $Q(x)$ نضع $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ثم نعين المعاملات $a; b; c$ باستعمال تساوي

كثيري حدود (طريقة المطابقة) وذلك بعد نشر وتبسيط وترتيب العبارة $(x - 2)(ax^2 + bx + c)$

كما يمكننا استعمال خوارزمية القسمة أو خوارزمية هورنر



1. طريقة المطابقة:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

ولدينا أيضا العدد 2 جذر لكثير الحدود

$$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$P(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

$$ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = x^3 - x^2 - 4x + 4 : x \text{ حقيقي}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-1 \\ c-2b=-4 \\ -2c=4 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a=1 \\ b=2a-1=2(1)-1=1 \\ c=-2 \end{cases} \text{ وهذا يعني}$$

$$P(x) = (x-2)(x^2 + x - 2) : x \text{ حقيقي}$$

2. طريقة القسمة الإقليدية:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

ولدينا أيضا

العدد 2 جذر لكثير الحدود

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x-2 \\ -x^3 + 2x^2 & \\ \hline x^2 - 4x + 4 & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -2x + 4 & \\ -2x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



$$P(x) = (x-2)(x^2 + x - 2) : x \text{ حقيقي}$$

3. خوارزمية هورنر (Horner):

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

ولدينا أيضا العدد 2 جذر لكثير الحدود

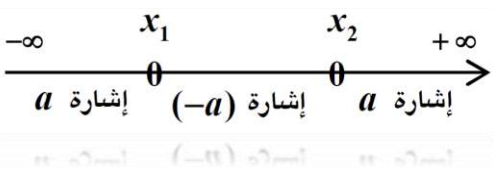
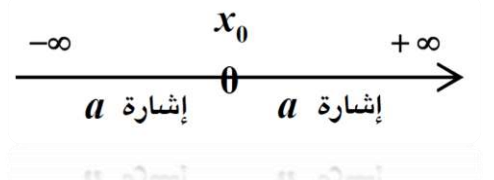
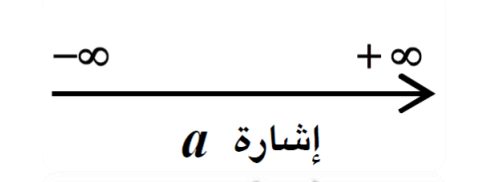
	1	-1	-4	4
2	0	2	2	-4
	1	1	-2	0

$$P(x) = (x-2)(x^2 + x - 2) : x \text{ حقيقي}$$

1. المعادلة من الدرجة الثانية

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x ، كل معادلة من الشكل: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و b, c أعداد حقيقية ثابتة مع

2. حل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $(a \neq 0)$

إشارة $ax^2 + bx + c$	تحليل $ax^2 + bx + c$ على الشكل:	حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هي:	إذا كان:
	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta > 0$
	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$\Delta = 0$
	لا يمكن تحليل $ax^2 + bx + c$	لا توجد حلول في $\mathbb{R}$	$\Delta < 0$

N.B: إذا كان $\Delta = 0$ نقول أن المعادلة $ax^2 + bx + c$ تقبل حلا مضاعفا.

طريقة: لحل متراجحة من الشكل $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ أو

$ax^2 + bx + c < 0$ ندراسة إشارة حدود الحدود $ax^2 + bx + c$ ثم نستنتج الحلول.

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

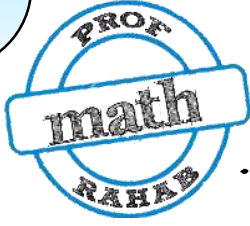
نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x : $ax^2 + bx + c = 0 \dots (1)$ حيث $(a \neq 0)$

إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين (جذرين) x_1 و x_2 حيث:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فإن: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

يكون مجموع عددين هو S وجدأهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x : $x^2 - Sx + P = 0$



نعتبر المعادلة: (1)..... $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $(a \neq 0)$.

1. إذا كان $\frac{c}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتهما مختلفتان.

2. إذا كان $\frac{c}{a} > 0$; $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.

3. إذا كان $\frac{c}{a} > 0$; $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

المعادلات مضاعفة التربيع



معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:
 $ax^4 + bx^2 + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$

طريقة: حل المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$ يؤول إلى حل الجملة:

$$\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$$

يسمى المجهول X مجهولا مساعدا.

بعد حل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$