



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

# تمارين شامل في المتتاليات العددية

# 1

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 03

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ:  $u_0 = 3$  ، ومن أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :

$$3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$$

(1) احسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  .

(2) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 0$

ب/ استنتج أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n > \frac{4}{3}n$

(3) لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:

$$v_n = u_n - 2n + 1$$

أ/ بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ استنتج أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = 4 \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2n - 1$$

ج/ احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  ، حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(4) نعتبر المتتالية  $(w_n)$  المعرفة بـ:  $w_0 = -1$  ، ومن أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$nw_n = (n + 1)w_{n-1} + 3$$

أ/ احسب  $w_1$  ،  $w_2$  ،  $w_3$  و  $w_4$  ، ما تخمينك لنوعية المتتالية  $(w_n)$  .

ب/ برهن صحة تخمينك على نوعية المتتالية  $(w_n)$  .

ج/ احسب  $w_{1011}$  .

(1) حساب  $u_1, u_2, u_3$  :

$$\bullet 3u_{0+1} = u_0 + 4(0) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_1 = \underbrace{3}_{u_0} + 4(0) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_1 = 7$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{3}}$$

$$\bullet 3u_{1+1} = u_1 + 4(1) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_2 = \frac{7}{3} + 4(1) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_2 = \frac{31}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{31}{9}}$$

$$\bullet 3u_{2+1} = u_2 + 4(2) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_3 = \frac{31}{9} + 4(2) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_3 = \frac{139}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{139}{27}}$$

(2) أ/ برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 0$

نبرهن القضية بالتراجع:

① لدينا:  $u_0 = 3 > 0$  ومنه القضية صحيحة من أجل  $n = 0$

② نفرض أن  $u_n > 0$  مُحَقَّقة ونبرهن أن  $u_{n+1} > 0$

لدينا:  $u_n > 0$  ومنه:  $u_n + 4n + 4 > 4n + 4$

ولدينا:  $4n + 4 > 0$  إذن:  $\boxed{u_{n+1} > 0}$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n > \frac{4}{3}n$

لدينا:  $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$

ومنه:  $3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4 = u_{n-1} + 4n$

ولدينا من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{n-1} > 0$

ومنه:  $u_{n-1} + 4n > 4n$

ومنه:  $3u_n > 4n$

$$u_n > \frac{4}{3}n$$

اذن:

(3) أ/ تبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = u_{n+1} - 2n - 1 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} 3v_{n+1} &= 3u_{n+1} - 6n - 3 \\ &= \underbrace{u_n + 4n + 4}_{3u_{n+1}} - 6n - 3 \\ &= u_n - 2n + 1 \\ &= v_n \end{aligned}$$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \underbrace{u_0}_3 - 2(0) + 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = 4}$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$  حيث:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ومنه:

$$\boxed{v_n = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

$$v_n = u_n - 2n + 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$u_n = v_n + 2n - 1 \quad \text{ومنه:}$$

إذن:

$$\boxed{u_n = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1}$$

ملاحظة: يمكن استعمال البرهان بالتراجع

ج/ حساب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  :

$$u_n = v_n + 2n - 1 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= v_1 + 2(1) - 1 + v_2 + 2(2) - 1 + \dots + v_n + 2n - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_1 + v_2 + \dots + v_n + 2(1 + 2 + \dots + n) - 1(n + 1) \\
&= v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} + 2 \left( \frac{n}{2} (n + 1) \right) - (n + 1) \\
&\quad \underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_n}_{v_1 + v_2 + \dots + v_n} \\
&= 4 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} + n(n + 1) - (n + 1) \\
&= 6 \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + (n + 1)(n - 1)
\end{aligned}$$

$$S_n = 6 \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + n^2 - 1$$

(4) / حساب  $w_1, w_2, w_3$  و  $w_4$  :

$$\begin{aligned}
1w_1 &= (1 + 1)w_{1-1} + 3 \\
&\Rightarrow w_1 = 2w_0 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_1 = 1} \\
2w_2 &= (2 + 1)w_{2-1} + 3 \\
&\Rightarrow w_2 = 2w_1 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_2 = 6} \\
3w_3 &= (3 + 1)w_{3-1} + 3 \\
&\Rightarrow w_3 = 2w_2 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_3 = 15} \\
4w_4 &= (4 + 1)w_{4-1} + 3 \\
&\Rightarrow w_4 = 2w_3 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_4 = 28}
\end{aligned}$$

من الحدود الأولى يمكن التخمين أن المتتالية  $(w_n)$  حسابية أساسها 2 وحدها الأول  $w_0 = -1$  أي:

$$\boxed{w_n = -1 + 2n}$$

ب/ برهان صحة التخمين على طبيعة المتتالية  $(w_n)$  :

لتكن القضية  $(P_n)$  حيث:

$$w_n = -1 + 2n \dots (P_n)$$

لدينا:  $w_0 = -2 + 2(0) = -1$  ومنه  $(P_0)$  محققة.

نفرض أن  $(P_n)$  محققة ونبرهن أن  $(P_{n+1})$  محققة. أي نبرهن أن  $(w_{n+1} = 1 + 2n)$  محققة

لدينا:  $nw_n = (n + 1)w_{n-1} + 3$

$$(n + 1)w_{n+1} = (n + 2)w_n + 3 \quad \text{ومنه:}$$

$$(n + 1)w_{n+1} = (n + 2)(-1 + 2n) + 3 \quad \text{ومنه:}$$

$$(n + 1)w_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$(n + 1)w_{n+1} = (n + 1)(2n + 1) \quad \text{ومنه:}$$

$$w_{n+1} = 2n + 1 \quad \text{ومنه:}$$

اذن من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  لدينا:

$$\boxed{w_n = -1 + 2n}$$

ج/ حساب  $w_{1011}$ :

$$w_n = -1 + 2n \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$w_{1011} = -1 + 2(1001)$$

$$\boxed{w_{1011} = 2021}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶