

MATH

الأستاذ الكالي خليل



الكالي للرياضيات

AS
2

الشعب العلمية

النهايات

جميع الشعب العلمية
تمارين متنوعة شاملة
شرح مبسط
دروس وتمارين

من اعداد
الأستاذ الكالي خليل



لمتابعتنا عبر صفحتنا على الفيسبوك او على اليوتيوب قومو بالضغط على الروابط الآتية

تمارين 01

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

- 1) $f(x) = x^2 + x + 1 / D_f = \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = x^3 - x + 5 / D_f = \mathbb{R}$
- 3) $f(x) = -3x^2 + 5x / D_f = \mathbb{R}$
- 4) $f(x) = -3x^3 + 3x + 1 / D_f = \mathbb{R}$

تمارين 02

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

- 1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} / D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
- 2) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2} / D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
- 3) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} / D_f = \mathbb{R}$
- 4) $f(x) = \sqrt{x^2+x} / D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$
- 5) $f(x) = \sqrt{x^2+1} / D_f = \mathbb{R}$
- 6) $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2+1} / D_f = \mathbb{R}$
- 7) $f(x) = \frac{\cos(x+3)}{x^2+3} / D_f = \mathbb{R}$

تمارين 03

ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها في كل حالة من الحالات التالية:

- 1) $f(x) = x^2 + 3x + 1 / D_f = \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = x^3 + 2x + 1 / D_f = \mathbb{R}$
- 3) $f(x) = \frac{2x^2+5x+10}{2x+4} / D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
- 4) $f(x) = \frac{x^2+x}{x-2} / D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- 5) $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+2} / D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
- 6) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} / D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$$7) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} / D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$8) f(x) = \frac{x^2 - 8x + 19}{x-3} / D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$9) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} / D_f = \mathbb{R}$$

$$10) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} / D_f =] - \infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

تمارين 04

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ ب: $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 6}{x^2}$

- ادرس نهايات الدالة عند حدود مجموعة تعريفها، مبينا المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم.

تمارين 05

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، $-\infty$

(2) ادرس وضيفة المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم المقارب المائل (Δ) .

تمارين 06

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ ب: $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

(1) عين العددين الحقيقيين a و b ، بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x \neq 2$ تكون $f(x) = a + \frac{b}{x-2}$

(2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

(3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحنى الممثل للدالة f

تمارين 07

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x-1}$

(1) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x \neq 2$ تكون $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

(2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

(3) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$

(4) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة (D) .

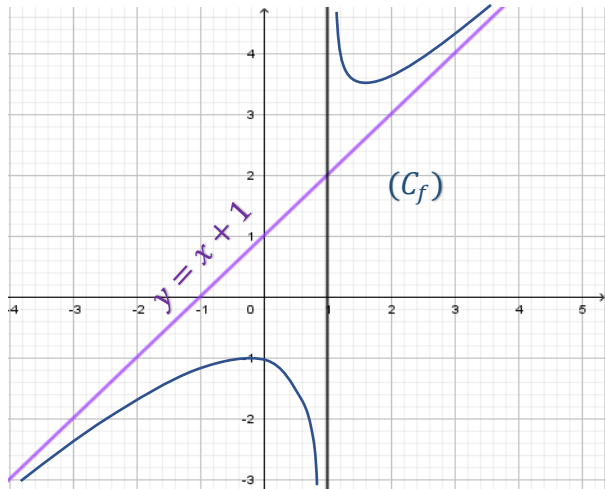
تمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1

- عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
- حدد المستقيمات المقاربة ل (C_f) المنحنى الدالة f

تمرين 09



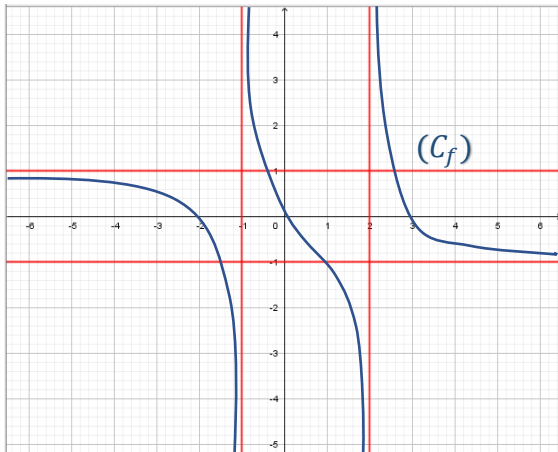
الدالة f تمثيلها البياني (C_f) المبين في الشكل المقابل

بقراءة بيانية :

- (1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f
- (2) عين نهايات الدالة f ، عند حدود مجموعة تعريفها.
- (3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)
- (4) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة

$$y = x + 1$$

تمرين 10



الدالة f تمثيلها البياني (C_f) المبين في الشكل المقابل

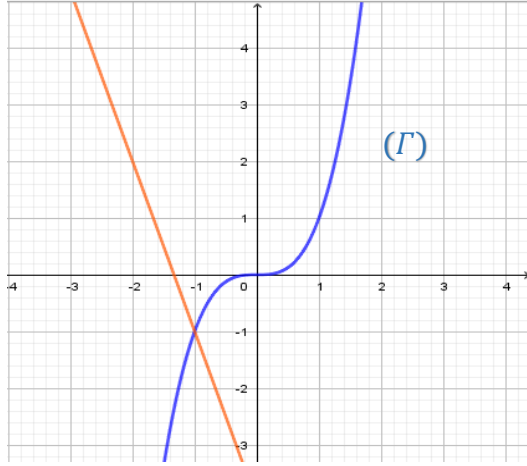
بقراءة بيانية:

- (1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f
- (2) عين نهايات الدالة f ، عند حدود مجموعة تعريفها.
- (3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

مسألة 01

(I) المستوي منسوب الى المعلم م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ في الشكل المرافق، المنحنى الممثل للدالة $x \rightarrow x^3$ و (Δ) المستقيم ذو

$$y = -3x - 4$$



الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = x^3 + 3x + 4$

بقراءة بيانية:

(أ) حدد وضعية (Γ) بالنسبة الى (Δ) على $\mathbb{R}$

(ب) استنتج إشارة $g(x)$

(II) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أ- بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(4) أنشئ (Δ) و (C_f) (يعطى: $f(1,25) \approx 0$)

(5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

مسألة 02

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$, وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$ و -2

(2) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ تكون $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

(3) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة ل (Δ) .

(4) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) بين ان النقطة $\omega(1,4)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

(6) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملين المحورين.

(7) ارسم كل من (C_f) والمستقيمات المقاربة

(8) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $m^2 + 2x - 1 - mx + m = 0$

(II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $g(x) = |f(x)|$

أ) اكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g بالاعتماد على (C_f)

(III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ ب: $h(x) = f(|x|)$

أ) اكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

ب) ارسم (C_h) منحنى الدالة h بالاعتماد على (C_f)

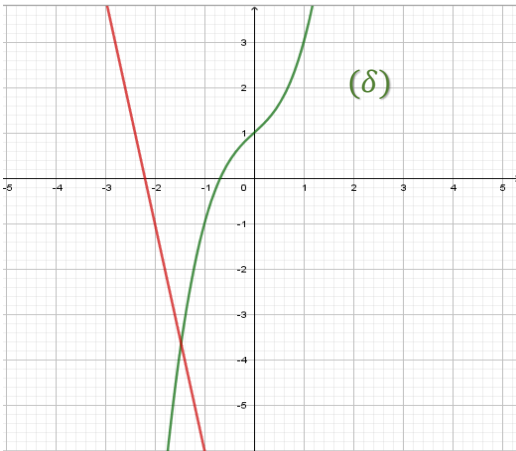
(III) لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $k(x) = \frac{x^2+4x+2}{x}$

أ) بين من اجل $x \neq 0$ ان: $k(x) = f(x+1)$

ب) استنتج ان (C_h) منحنى الدالة h هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .

مسألة 03

المستوي منسوب الى معلم متجانس



(I) (δ) التمثيل البياني للدالة $h(x) = x^3 + x + 1$ و $x \rightarrow h(x)$ التمثيل البياني للمستقيم ذو المعادلة $y = -5x - 11$ هي فاصلة تقاطع (D) و (δ) .

(1) بقراءة بيانية حدد وضعية (δ) بالنسبة الى (Δ) على المجال $\mathbb{R}$

(2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x^3 + 6x + 12$

أ- بين من اجل $x \in \mathbb{R}$ يكون $g(x) = h(x) - y$

ب- استنتج إشارة $g(x)$

ت- تحقق ان $-1.48 < \alpha < -1.47$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$

(1) عين الاعداد الحقيقية a, b, c و d بحيث من اجل كل عدد حقيقي x تكون: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2}$

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ- بين من أجل x عدد حقيقي: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(4) أ- بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(5) بين ان $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ، ثم استنتج حصر للعدد $f(\alpha)$

(6) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (يعطى: $f(1,81) \approx 0$)

حل تمرين 01

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = -\infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$

حل تمرين 02

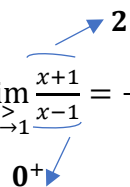
1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} / D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

x	1
$x-1$	- 0 +

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

$\nearrow 2$
 $\searrow 0^-$

$$2) f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2} / D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	ϕ	$+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+2x+1}{x+2} = +\infty$$

$\nearrow 1$
 $\searrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+2x+1}{x+2} = -\infty$$

$\nearrow 1$
 $\searrow 0^-$

$$3) f(x) = \frac{x}{x^2+1} / D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2+x} / D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x = +\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{اذن}$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2+1} / D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$6) f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2+1} \quad / \quad D_f = \mathbb{R}$$

نعلم ان $-1 < \sin(x) < 1$

$$\frac{-1}{x^2+1} < \frac{\sin(x)}{x^2+1} < \frac{1}{x^2+1} \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2+1} < \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} < \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} \quad \text{اذن}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{اذن}$$

$$7) f(x) = \frac{\cos(x+3)}{x^2+3} \quad / \quad D_f = \mathbb{R}$$

نعلم ان $-1 < \cos(x) < 1$

$$\frac{-1}{x^2+1} < \frac{\sin(x)}{x^2+1} < \frac{1}{x^2+1} \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2+1} < \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} < \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} \quad \text{اذن}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{اذن}$$

حل تمرين 03

$$1) f(x) = x^2 + 3x + 1 \quad / \quad D_f = \mathbb{R}$$

النهايات:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x + 3$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ	$+$

التغيرات :

⊗ الدالة f متزايدة على المجال $[\frac{-3}{2}, +\infty[$.

⊗ الدالة f متناقصة على المجال $] -\infty, \frac{-3}{2}]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{-3}{2}\right)$	$+\infty$

$$2) f(x) = x^3 + 2x + 1 / D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

التغيرات:

الدالة f متزايدة على المجال $] - \infty; +\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

$$3) f(x) = \frac{2x^2+5x+10}{2x+4} / D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

النهايات :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow -2}^- \frac{2x^2+5x+10}{2x+4} = -\infty$$

$\begin{matrix} 8 \\ 0^- \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^+ f(x) = \lim_{x \rightarrow -2}^+ \frac{2x^2+5x+10}{2x+4} = +\infty$$

$\begin{matrix} 8 \\ 0^+ \end{matrix}$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $] - \infty; -2[$ والمجال $] -2; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(4x+5)(2x+1) - (2)(2x^2+5x+10)}{(2x+4)^2} = \frac{4x(x+4)}{(2x+4)^2}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+

تغيرات:

⊗ الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty, -4[$ والمجال $]0; +\infty[$

⊗ الدالة f متناقصة على المجال $]-2; -4[$ والمجال $]0; -2[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-4)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

$$4) f(x) = \frac{x^2+x}{x-2} / D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

النهايات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	ϕ	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x}{x-2} = +\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]2; +\infty[$ والمجال $]-\infty; 2[$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{6}$	2	$2 + \sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+

تغيرات :

 $\boxtimes$ الدالة f متزايدة على المجال $]2 + \sqrt{6}, +\infty[$ والمجال $]-\infty; 2 - \sqrt{6}[$
 $\boxtimes$ الدالة f متناقصة على المجال $]2 - \sqrt{6}; 2[$ والمجال $]2; 2 + \sqrt{6}[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(2 - \sqrt{6})$	$+\infty$	$f(2 + \sqrt{6})$	$+\infty$

$$5) f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} / D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

النهايات :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x + 2$	-	○	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x + 6}{x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+3x+6}{x+2} = +\infty$$

$\nearrow 4$
 $\searrow 0^+$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; -2[$ والمجال $]-2; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+2) - (x^2+3x+6)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+

تغيرات :

☒ الدالة f متزايدة على المجال $]0; +\infty[$ والمجال $]-\infty; -4[$ ☒ الدالة f متناقصة على المجال $]-2; 0[$ والمجال $]-4; -2[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-4)$	$-\infty$	$f(0)$	$+\infty$

$$6) f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} / D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

النهايات :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; 3[$ ، $]-\infty; -1[$ والمجال $]3; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3) - (2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$\circ$	$+$	$+$

تغيرات:

☒ الدالة f متزايدة على المجال $]1; 3[$ والمجال $]3; +\infty[$ ☒ الدالة f متناقصة على المجال $]-1; 1[$ والمجال $]-\infty; -1[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	ϕ	$+$	$+$
$f(x)$	1 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $f(1)$	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ 1	

$$7) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} \quad / \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

النهايات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	ϕ	$+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = -\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ والمجال $]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 4x)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 2x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 4x)(x-1) - 2(x^3 - 2x^2)}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	o	+	+
$x^2 - 3x + 4$	+	+	+	+
$(x - 1)$	-	-	o	+
$f'(x)$	+	o	-	+

تغيرات:

✗ الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty, 0[$ والمجال $]1; +\infty[$ ✗ الدالة f متناقصة على المجال $]0; 1[$

جدول التغيرات:

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	o	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(0)$	$-\infty$	$+\infty$

8) $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 19}{x - 3} / D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

النهايات:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x - 3$	-	o	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 8x + 19}{x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 8x + 19}{x - 3} = -\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 3[$ والمجال $]3; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x-3) - (x^2-8x+19)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+3}{(x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+

تغيرات:

☒ الدالة f متزايدة على المجال $]5; +\infty[$ والمجال $]-\infty; 1[$ ☒ الدالة f متناقصة على المجال $]3; 5[$ والمجال $]1; 3[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(1)$	$-\infty$	$f(3)$	$+\infty$

$$9) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} / \quad D_f = \mathbb{R}$$

النهايات:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{اذن}$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

تغيرات:

☒ الدالة f متزايدة على المجال $]0; +\infty[$ ☒ الدالة f متناقصة على المجال $] -\infty; 0[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

$$10) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} / \quad D_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 - 2x = +\infty \quad \text{لأن}$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]2; +\infty[$ والمجال $] -\infty; 0[$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	-1	2	$+\infty$
$x-1$	-		-	+	+
$f'(x)$	-	$\parallel$	$\parallel$	+	+

تغيرات:

☒ الدالة f متزايدة على المجال $]2; +\infty[$ ☒ الدالة f متناقصة على المجال $] -\infty; 0[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\parallel$	$\parallel$	+
$f(x)$	$+\infty$ 	$f(0)$	$f(2)$	$+\infty$

حل تمرين 04

$$1) f(x) = \frac{3x^2+5x+6}{x^2} / D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	+	ϕ	+

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x + 6}{x^2} = +\infty$$

6
0⁺

المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ مقارب افقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

حل تمرين 05

$$1) f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1} / D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

اذن المنحنى المقارب (C_f) يقارب (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي لدينا

$$f(x) - y = \frac{1}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 06

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} / D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

(1) تعيين a و b

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2} = \frac{ax-2a+b}{x-2}$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} a = 3 \\ -2(3) + b = 1 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} a = 3 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 3 + \frac{7}{x-2} \quad \text{اذن}$$

(2) حساب النهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	ϕ	+

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ مقارب افقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

حل تمرين 07

(1) تعين a ، b و c

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 2 & x - 1 \\ -x^2 + x & x + 4 \\ \hline 4x + 2 & \\ -4x + 4 & \\ \hline 6 & \\ \text{ومنه} & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+4)+6}{x-1} = x + 4 + \frac{6}{x-1}$$

$$f(x) = x + 4 + \frac{6}{x-1} \quad \text{اذن}$$

$$\boxed{c = 6} \quad \boxed{b = 4} \quad \boxed{a = 1} \quad \text{أي}$$

طريقة 02

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ -4 + c = 2 \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 1 = 3 \\ -b + c = 2 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ -b + c = 2 \end{cases}$$

اذن

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ -4 + c = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 4 + \frac{6}{x-1} \quad \text{ومنه}$$

(2) حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	ϕ	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = -\infty$$

(3) تبين ان (Δ) ذو المعادلة $y = x + 4$ مقارب ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x-1} = 0$$

اذن (Δ) ذو المعادلة $y = x + 4$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

(4) دراسة الوضعية :

$$f(x) - 6 = \frac{6}{x-1}$$

لدينا

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
الوضع	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 08

(1) تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}^+ f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}^- f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^+ f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2}^- f(x) = +\infty$$

(2) تحديد المستقيمات المقاربة ل (C_f) من الدالة f

- المستقيم ذو المعادلة $x = e$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $+\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ مقارب افقي ل (C_f) عند $-\infty$.

حل تمرين 09

(1) مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R} - \{1\}$ (2) تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

- (3) تعيين معادلات المستقيمات المقاربة ل المنحنى (C_f)
- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
 - المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- (4) الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
الوضع النسبي:	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 10

- (1) مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$
- (2) تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

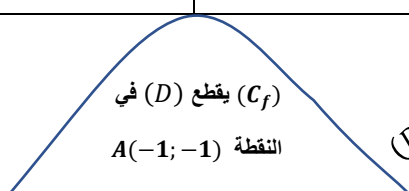
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

- (3) تحديد المستقيمات المقاربة ل (C_f) من الدالة f
- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
 - المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
 - المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $-\infty$.
 - المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $+\infty$.

حل المسألة 01

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	ϕ	-
الوضع بـ	(C_f) فوق (D)	 المنطقة (D) يقطع (C_f) في النقطة $A(-1; -1)$	(C_f) تحت (D)

ب - إشارة $g(x)$

$$g(x) = x^3 + 3x + 4 = x^3 - (-3x - 4)$$

ومنه

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	-	ϕ	+

(II)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

(2) أ- تبين من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^3+3x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

وهو المطلوب.

ب- تغيرات:

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$\circ$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$

⊗ الدالة f متزايدة على المجال $]0; +\infty[$ والمجال $] -\infty; -1[$

⊗ الدالة f متناقصة على المجال $] -1; 0[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)$	$f(0)$	$+\infty$

(3) أ- تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2 - x(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

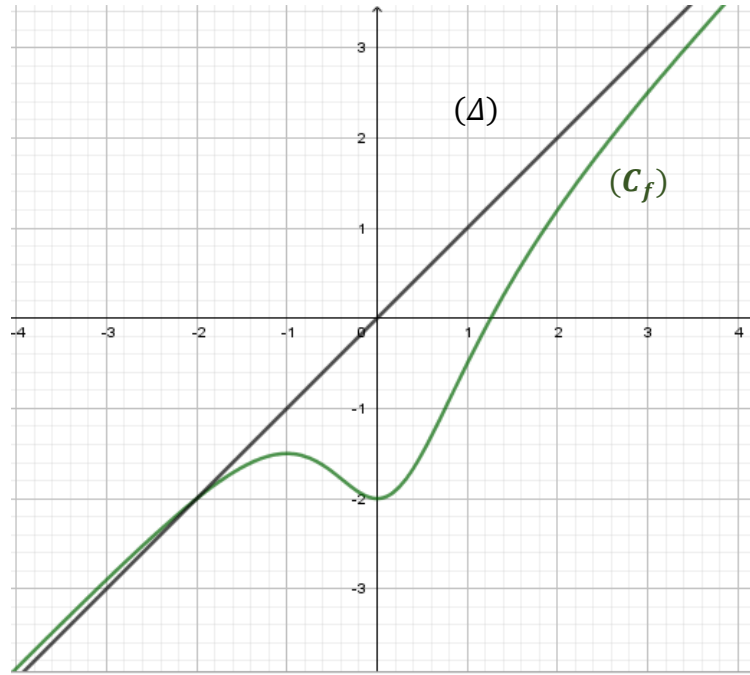
وهو المطلوب.

ب- الوضع النسبي :

لدينا $f(x) - y = \frac{-2 - x}{x^2 + 1}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	$\circ$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2; -2)$	(C_f) تحت (Δ)

(4) الرسم البياني:



(5) المناقشة البيانية

لدينا $f(x) = m$ حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معادلاتها من الشكل $y = m$ $m \in]-\infty; -2[$ للمعادلة حل واحد سالب تماما. $m = -2$ للمعادلة حل معدوم وآخر سالب تماما. $m \in]-2; \frac{-3}{2}[$ للمعادلة حل موجب تماما وحلان سالبان تماما. $m = \frac{-3}{2}$ حل سالب تماما وآخر موجب تماما. $m \in]\frac{-3}{2}; +\infty[$ للمعادلة حل واحد موجب تماما.

حل مسألة 02

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$$

(1) حساب النهايات للدالة f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	ϕ	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = +\infty$$

2
0⁺
7

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = -\infty$$

0⁻

(2) نعين a, b, c

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 1 & x - 1 \\ -x^2 + x & x + 3 \\ \hline 3x - 1 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)+2}{x-1} = x + 3 + \frac{2}{x-1}$$

اذن

$$f(x) = x + 3 + \frac{2}{x-1} \quad \text{ومنه}$$

أي $a = 1, b = 3, c = 2$ (3) استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

اذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

الوضع النسبي:

$$f(x) = \frac{3}{x-1}$$

لدينا

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$		-	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

(4) الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ والمجال $] -\infty; 1[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x-1)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x+1}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2x^2-2x-1}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	ϕ	-	-	+

تغيرات:

⊗ الدالة f متزايدة على المجال $]1 + \sqrt{2}, +\infty[$ والمجال $] -\infty, 1 - \sqrt{2}[$ ⊗ الدالة f متناقصة على المجال $]1 - \sqrt{2}, 1[$ والمجال $]1, 1 + \sqrt{2}[$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	ϕ	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(1 - \sqrt{2})$		$f(1 + \sqrt{2})$	$+\infty$

(5) تبين أن $\Omega(1,4)$ مركز تناظرأي تبين من أجل $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases}
 2(1) - x \in \mathbb{R} - \{1\} \\
 f(2(1) - x) + f(x) = 2(4)
 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}
 2 - x \in \mathbb{R} - \{1\} \\
 f(2 - x) + f(x) = 8
 \end{cases}$$

أولاً:

$x \neq 1$	يكافئ	$x \in \mathbb{R} - \{1\}$
$-x \neq -1$	يكافئ	
$2 - x \neq 1$	يكافئ	
$2 - x \in \mathbb{R} - \{1\}$	يكافئ	

ثانياً:

$$\begin{aligned}
 f(2-x) + f(x) &= (2-x) + 3 + \frac{2}{2-x-1} + x + 3 + \frac{2}{x-1} \\
 &= 2-x+3 + \frac{2}{1-x} + x+3 + \frac{2}{x-1} \\
 &= 8 + \frac{2}{-(x-1)} + \frac{2}{x-1} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

(6) تقاطع (C_f) مع (yy')

$$f(0) = \frac{0^2 + 2(0) - 1}{0-1} = 1$$

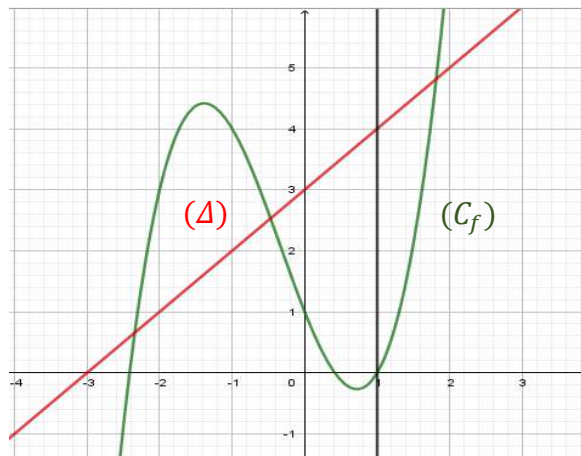
اذن (C_f) يقطع (yy') في النقطة $A(0,1)$ تقاطع (C_f) مع (xx')

$$f(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = -1 - \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = -1 + \sqrt{2} \quad \text{يكافئ}$$

اذن (C_f) يقطع (xx') في النقطة $A(-1 + \sqrt{2}, 0)$ والنقطة $C(-1 - \sqrt{2}, 0)$

(7) الرسم



(8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m .
لدينا $m^2 + 2x - 1 - mx + m = 0$

$$m^2 + 2x - 1 = mx - m$$

$$m^2 + 2x - 1 = m(x - 1)$$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = m$$

$$f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معادلتها من الشكل $y = m$.
إذا كان:

$m \in]-\infty; 1[$ يوجد حل سالب تماما واخر موجب تماما.

$m = 1$ يوجد حل معدوم وآخر سالب تماما

$m \in]1; f(1 - \sqrt{2})[$ يوجد حلان سالبان تماما.

$m = f(1 - \sqrt{2})$ يوجد حل سالب تماما.

$m \in]f(1 - \sqrt{2}); f(1 + \sqrt{2})[$ لا يوجد حل.

$m = f(1 + \sqrt{2})$ يوجد حل موجب تماما.

$m \in]f(1 + \sqrt{2}); +\infty[$ يوجد حلان موجبان تماما.

$$g(x) = |f(x)| / D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad (II)$$

(أ) كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	ϕ	-	ϕ	+

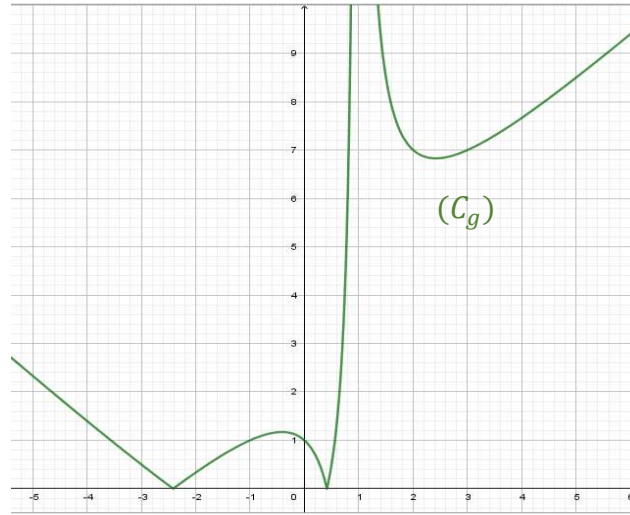
$$\begin{cases} f(x) & ; x \in [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}] \cup]1; +\infty[\\ -f(x) & ; x \in [-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}; 1[\end{cases}$$

(ب) تفسير:

المنحنى (C_g) ينطبق على (C_f) إذا كان $x \in [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}] \cup]1; +\infty[$

المنحنى (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل إذا كان $x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}; 1[$

الرسم البياني:



$$h(x) = f(|x|) / D_h = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

أ- كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f(-x) & ; x \in [-\infty; -1[\cup]-1; 0[\end{cases}$$

ب- أولا تبين ان h زوجية.

$$x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{يكافئ} \quad x \neq -1 \quad x \neq 1$$

$$-x \neq 1 \quad \text{و} \quad -x \neq -1 \quad \text{يكافئ}$$

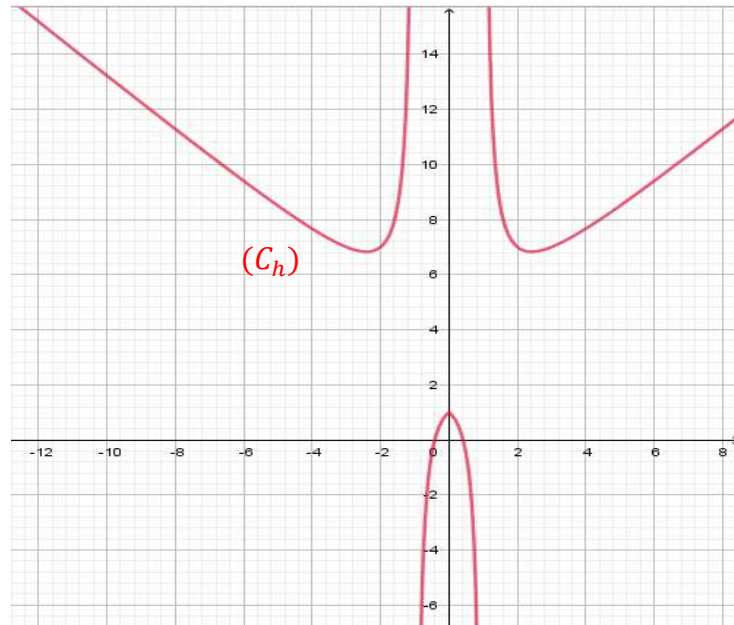
$$-x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{يكافئ}$$

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

اذن h زوجية.

تفسير:

المنحنى (C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$ ولرسم بقية المنحنى نعتمد على الخواص الهندسية للدالة الزوجية أي منحنى الدالة h متناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب.



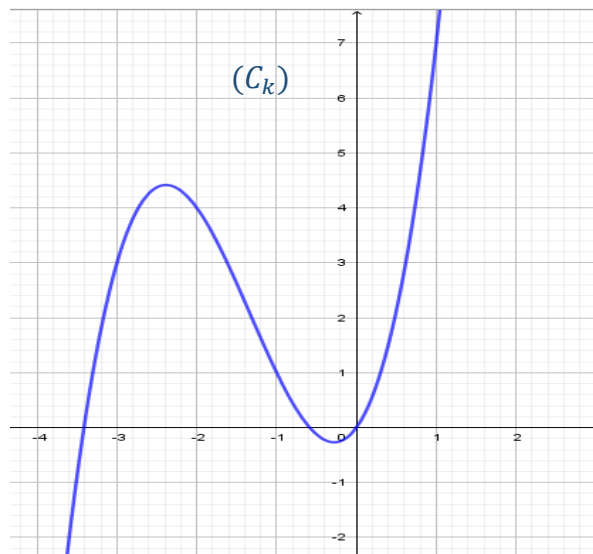
$$k(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x} \quad / \quad D_k = \mathbb{R}^* \quad (III)$$

$$k(x) = f(x + 1) \quad \text{أ) تبيان ان من أجل } x \neq 0$$

$$f(x + 1) = \frac{(x+1)^2 + 2(x+1) - 1}{(x+1) - 1} = \frac{x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 - 1}{x} = \frac{x^2 + 4x + 2}{x}$$

$$f(x + 1) = k(x) \quad \text{اذن}$$

وهو المطلوب.



حل المسألة 03

(1)

(1) الوضع النسبي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
الوضعية	(δ) تحت (D)	(δ) يقطع (D) في النقطة $A(\alpha; \alpha - 11)$	(δ) فوق (D)

(2) أ- تبين من أجل $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = h(x) - y$

$$\begin{aligned}
 h(x) - y &= x^3 + x + 1 - (-5x - 11) \\
 &= x^3 + x + 1 + 5x + 11 \\
 &= x^3 + 6x + 12 \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ب) استنتاج إشارة $g(\alpha)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	ϕ	+

ج) تحقق من أن $-1,48 < \alpha < -1,47$

$$g(-1,48) \approx -0,12$$

$$g(-1,47) \approx 0,003$$

$$g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$$

اذن $-1,48 < \alpha < -1,47$ (3) تعين a, b, c و d

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 6 & x^2 + 2 \\
 -x^3 + 2x & x \\
 \hline
 -2x - 6 &
 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x(x^2+2)-2x-6}{x^2+2} = x + \frac{-2x-6}{x^2+2}$$

اذن

$$f(x) = x + \frac{-2x-6}{x^2+2} \quad \text{ومنه}$$

$$d = -6, c = -2, b = 0, a = 1 \quad \text{أي}$$

(4) حساب النهايات للدالة f عند أطراف حدود مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{أ- تبيان من أجل } \mathbb{R}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

(ب) تغيرات وجدول تغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	-	○	+
x	-	○	+	+
$f'(x)$	+	○	-	+

تغيرات:

☒ الدالة f متزايدة على المجال $[\alpha, +\infty[$ والمجال $] -\infty, 0[$ ☒ الدالة f متناقصة على المجال $]0, \alpha[$ (5) أ) تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

وهو المطلوب.

ب) دراسة الوضع النسبي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-3; -3)$	(C_f) تحت (Δ)

6) تبين ان $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ أي تبين ان $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{2(\alpha^3 - 6) - 3\alpha(\alpha^2 + 2)}{\alpha^2 + 2}$$

$$\frac{\alpha^3 - 6\alpha - 12}{\alpha^2 + 2} = \frac{-g(\alpha)}{\alpha^2 + 2} = 0$$

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha \quad \text{اذن}$$

حصر $f(\alpha)$

لدينا

$$-1,48 < \alpha < -1,47$$

$$-\frac{48}{25} < f(\alpha) < -\frac{441}{200}$$

وهو المطلوب.

7) رسم المنحنى

