

التاريخ: 2023/05/25
المدة: ساعتين

المادة: رياضيات

المستوى: 2 علوم تجريبية

اختبار الفصل الثالث

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 5$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = 4u_n - 3$.

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = \frac{3}{u_n - 1}$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

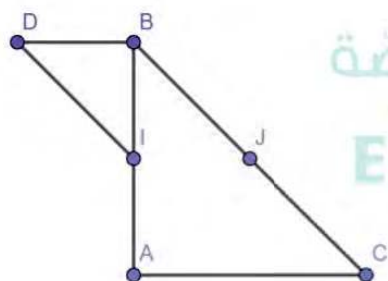
2. احسب v_0 ثم اكتب v_n بدلالة n .

3. بين أن $u_n = \frac{3}{v_n} + 1$ ثم استنتج u_n بدلالة n ، ثم احسب نهايتها.

4. احسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n والجداء P_n حيث:

$$P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) \text{ و } S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \quad S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

التمرين الثاني: (06 نقاط)



I. ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث 4 AB و BDI مثلث قائم في B ومتساوي الساقين، I منتصف [AB]، J منتصف [BC].

احسب الجداءات السلمية التالية:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{AB} \cdot \vec{BC}, \vec{AI} \cdot \vec{CJ}, \vec{AC} \cdot \vec{JI}, \vec{AC} \cdot \vec{ID} \text{ و } \vec{AJ} \cdot \vec{ID}.$$

II. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط

$$A(-2; -1), B(1; 3), \text{ و } C(2; -4).$$

1. احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ، $\|\vec{AB}\|$ و $\|\vec{AC}\|$. ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. اكتب معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها A وتشمل النقطة B.

3. (Δ) هو المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له.

أ. بين أن معادلة المستقيم (Δ) هي: $3x + 4y - 15 = 0$ ، تحقق أن المستقيم (Δ) هو مماس للدائرة $(\mathcal{C})$.

ب. اكتب معادلة لكل من المستقيمين (Δ') و (Δ'') اللذان يعامدان المستقيم (Δ) ويمسّان الدائرة $(\mathcal{C})$.

4. عين نقطتي تقاطع الدائرة $(\mathcal{C})$ مع المستقيم ذو المعادلة: $x + 2y - 1 = 0$.

5. ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m طبيعة مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق $2x^2 + 2y^2 + 4mx + 2m = 0$.

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أ. احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف الدالة f .

ب. بين أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة أحدها مائل (Δ) معادلته $y = x + 1$ ، اكتب معادلة لكل من المستقيمين الآخرين.

ج. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ، محددا إحداثيات نقطة تقاطعهما.

2. أ. بين أنه من أجل كل $x \neq -1$ و $x \neq 1$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$.

ب. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ. بين أن المنحنى (C_f) يقبل أربع مماسات معامل توجيهها -2 . (لا يطلب كتابة معادلاتها)

ب. دون حساب $f''(x)$ ، بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أ. بين أنه من أجل كل $x \neq -1$ و $x \neq 1$ فإن: $f(-x) + f(x) = 2$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

ب. اكتب معادلة المماس (C_f) عند $x_0 = 0$. ارسم (Δ) ، (C_f) و (C_f) .

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^3 + x^2(m+1) - (m+1) = 0$.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$ ، (C_g) تمثيلها البياني.

أ. بين أن الدالة g هي دالة زوجية.

ب. اكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

ج. اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) وارسمه في المعلم السابق.

بالتوفيق

من إعداد: الأستاذ بن مسعود

المادة: رياضيات	السنة الدراسية: 2022-2023
الأستاذ: بن مسعود	المستوى: 2 ع ت
تصحيح اختبار الفصل الثالث	

$$P_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$$

$$P_n = \frac{3}{V_0} \times \frac{3}{V_1} \times \dots \times \frac{3}{V_n}$$

$$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \dots \times \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+\dots+n}}$$

$$P_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}} = 4^{\frac{n^2+3n+2}{2}}$$

التحريين الثاني :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \quad (\text{متعامدان})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{BA} = -AB^2 = -16$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{CI} = \vec{AI} \cdot \vec{AI} = AI^2 = 4 \quad (\text{AI هو المثلث المثلث})$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{JI} = -AC \times JI = -8 \quad (\text{المثلثات المتشابهة})$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{ID} = AC \times ID \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -8$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{ID} = 0 \quad (\text{متعامدان})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 - 12 = 0 \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (II)$$

$$\| \vec{AC} \| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \quad \| \vec{AB} \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

(ع) مركزها A(-2, 1) نصف قطرها AB=5

(ع) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ ومنه

(د) : $-3x - 4y + c = 0$ (P) (3)

نعوض بإحداثيات B نجد : c = 15

(د) : $3x + 4y - 15 = 0$ ومنه

d(A, A) = $\frac{|3(-2) + 4(1) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 = \rho$

ومن (د) معادلتي (ع) و (د)

(ج) $\vec{u}$ شعاع ناضج ل (A) (ن) و

ومن معادلتها عن الشكل $4x - 3y + c = 0$

التحريين الأول :

$$V_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1} - 1} \quad (1)$$

$$N_{n+1} = \frac{3}{4u_n - 3 - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{u_n - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n$$

(V_n) هندسي أساسها $q = \frac{1}{4}$

(2) $V_n = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه $V_0 = \frac{3}{u_0 - 1} = \frac{3}{4}$

(3) لدينا : $V_n = \frac{3}{u_n - 1}$ ومنه $\frac{u_{n-1} - 1}{3} = \frac{1}{V_n}$

أي $u_n - 1 = \frac{3}{V_n} + 1$ نجد : $u_n = \frac{3}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n} + 1$

في الأخير :

لأن $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

(4) $S_n = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right)$

$S_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$S'_n = \frac{3}{V_0} + 1 + \frac{3}{V_1} + 1 + \dots + \frac{3}{V_n} + 1$

$S'_n = 3 \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n} \right) + \underbrace{1+1+\dots+1}_{m+1 \text{ مرة}}$

$\frac{4}{3}$ أساسها $q = \frac{1}{4}$ من التحريين الأول

$S'_n = 3 \left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)4^n \right) + m+1$

$S'_n = 4 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right) + m+1$

$S'_n = \frac{4}{3} (4^{n+1} - 1) + m+1$

(5) P مجموعة تعريف الدالة g متناظرة بالنسبة للمحور

$$g(-x) = f(-1-x) = f(1-x) = g(x)$$

وصف دالة زوجية

(6)

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) = \frac{-x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} & \text{لما } x > 1 \text{ و } x < -1 \\ f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} & \text{لما } -1 < x < 1 \text{ و } x < -1 \text{ أو } x > 1 \end{cases}$$

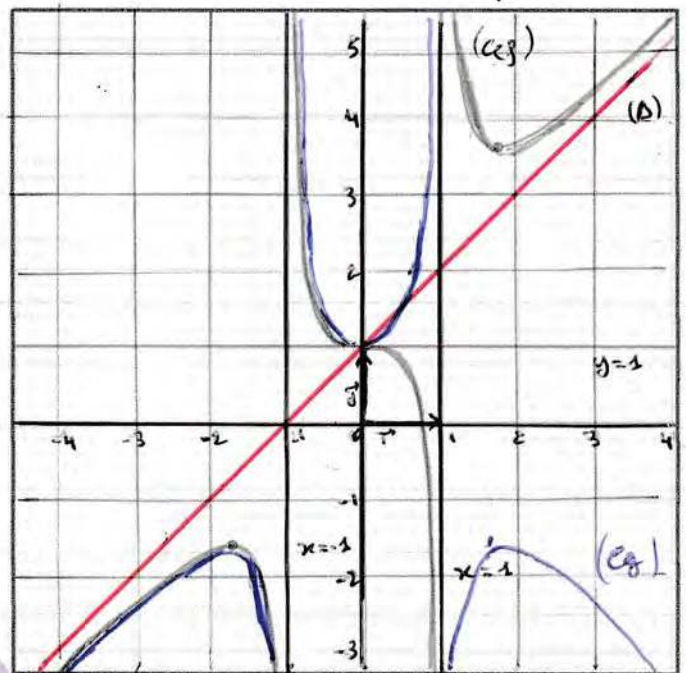
(7)

لما $x \in]-\infty, -1] \cup]0, 1[$ (مثبت) (ك)
 $g(x) = f(x)$ لأن
 ولما $x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ (سالب) (ك)
 فإن (ك) يكون متناظر بالنسبة لمحور التماثل.

انتهى

الأستاذ بن مسعود

الرسم:



(7)

$$x^3 + mx^2 + x^2 - m - 1 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 1 = -mx^2 + m$$

$$x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 1)(-m)$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = -m$$

$$f(x) = -m$$

مناقشة أفقية (قفاطع (ك) مع المستقيمة $y = -m$)

$$\text{لما } -m < 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m > \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{أي } m > \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{لما } -m = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{أي } m = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{لما } 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} < -m < 1 \text{ أي } -1 < m < \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{أي } -1 < m < \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{لما } -m = 1 \text{ أي } m = -1$$

$$\text{أي } m = -1$$

$$\text{لما } 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} < -m < 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} < m < -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{أي } -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} < m < -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{لما } -m = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \text{ أي } m = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{أي } m = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$

$$\text{لما } -m > 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ أي } m < -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{أي } m < -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{أي } m < -1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$