



مذكرة رقم 01 : نهاية منتبهة أو غير منتبهة لدالة عند مالا نهاية

مذكرة رقم 02 : نهاية دالة عند عدد

مذكرة رقم 03 : العمليات على النهايات

مذكرة رقم 04 : نهاية مركب دالتين

مذكرة رقم 05 : المستقيم المقارب المائل

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية 2020 – 2021

✉ للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

الأستاذة ن مرواني للرياضيات 

profmerouani 

صفحة الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات 

merouaninardjiss@gmail.com 

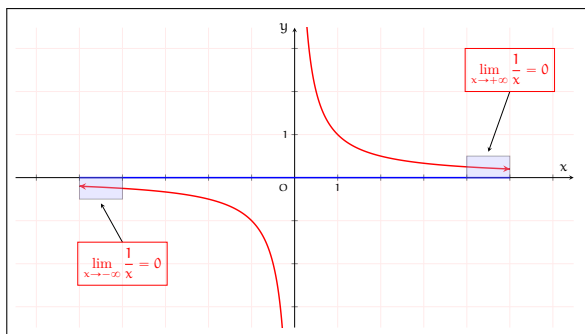
0770349020 

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 03 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة

المفاهيم الأساسية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
المفاهيم المستهدفة : نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة.
المصادر : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

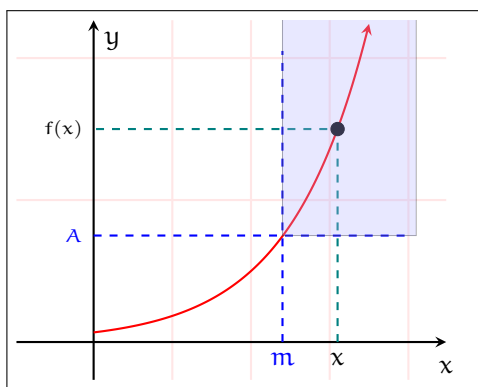
الوقت	سير الحصة	المراحل
5د	تذكير 1 <u>نهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$</u> تعريف f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$ و l عدد حقيقي. القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي و نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ملحوظة : نعرف بطريقة مماثلة النهاية لدالة f عند $-\infty$ 2 <u>التفسير الهندسي (المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل) :</u> إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو عند $(-\infty)$ على الترتيب.	الانطلاق البناء و الترسيع
30د		



ليكن التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$
 لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 و منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$
 (محور الفواصل) مقارب لمنحنى الدالة
 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

② نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

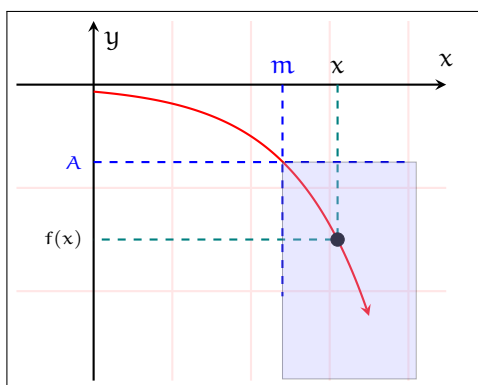
تعريف



f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$.
 القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن
 كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ حيث $A \in \mathbb{R}$
 يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير
 بالقدر الكافي.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ نكتب}$$

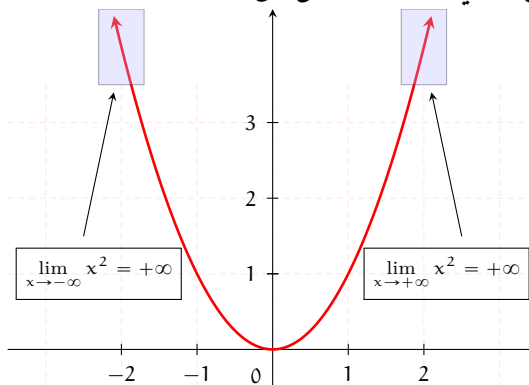
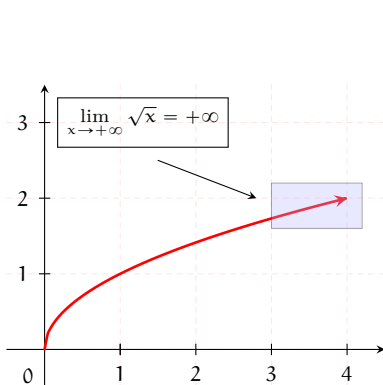
تعريف



f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; +\infty[$.
 القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن
 كل مجال من الشكل $]-\infty; A]$ حيث $A \in \mathbb{R}$
 يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر
 الكافي.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ نكتب}$$

التمثيل البياني و النهايات لكل من الدالتين $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$



1 لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2}{x-3}$

« أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ »

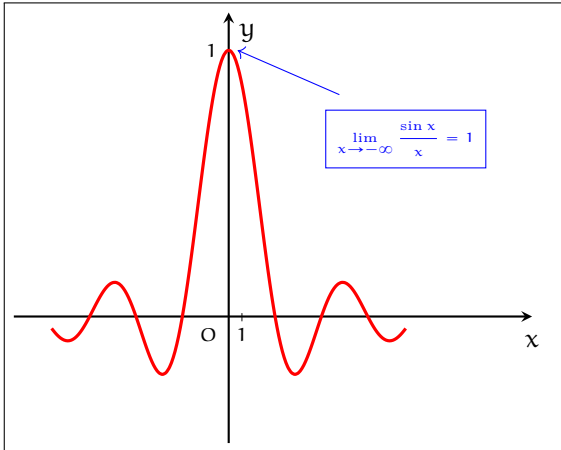
2 لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x-3}$

« أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ »

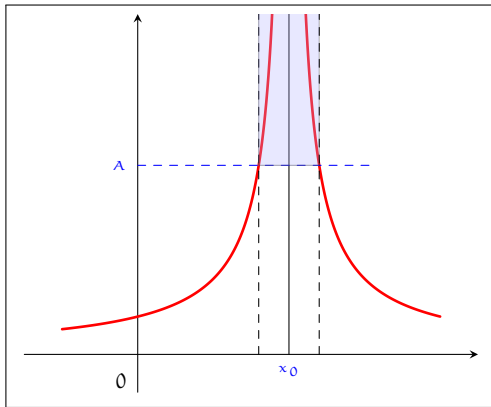
المستوى : 03 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : نهاية دالة عند عدد

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المفاهيم الأساسية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
المفاهيم المستهدفة : حساب نهاية عند عدد .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

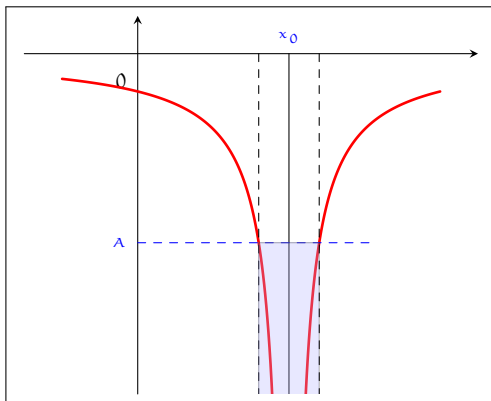
الوقت	سير الحصة	المراحل																				
د5	تذكير 1 نهاية منتهية عند عدد حقيقي : تعريف f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a; x_0[\cup]x_0; b[$ و l عدد حقيقي . القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	الانطلاق البناء و التزيين																				
د30	مثال $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : يشير كل من الجدول و التمثيل البياني للدالة f أنه كلما أخذ المتغير x قيما قريبة جدا من 0 (بقيم موجبة أو بقيم سالبة) فإن $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر إلى 1 و نكتب عندئذ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  <table> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> <tr><td>-0.04</td><td>0.999733</td></tr> <tr><td>-0.03</td><td>0.999850</td></tr> <tr><td>-0.02</td><td>0.999933</td></tr> <tr><td>-0.01</td><td>0.999983</td></tr> <tr><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>0.01</td><td>0.999983</td></tr> <tr><td>0.02</td><td>0.999933</td></tr> <tr><td>0.03</td><td>0.999850</td></tr> <tr><td>0.04</td><td>0.999733</td></tr> </table>	x	$f(x)$	-0.04	0.999733	-0.03	0.999850	-0.02	0.999933	-0.01	0.999983	0		0.01	0.999983	0.02	0.999933	0.03	0.999850	0.04	0.999733	
x	$f(x)$																					
-0.04	0.999733																					
-0.03	0.999850																					
-0.02	0.999933																					
-0.01	0.999983																					
0																						
0.01	0.999983																					
0.02	0.999933																					
0.03	0.999850																					
0.04	0.999733																					
	2 نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي :																					

تعريف



x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة بجوار x_0 .
القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي $+\infty$ يعني
أن كل مجال من الشكل $[A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$)
يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل
 x قريب بالقدر الكافي من x_0 . و نكتب
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

تعريف

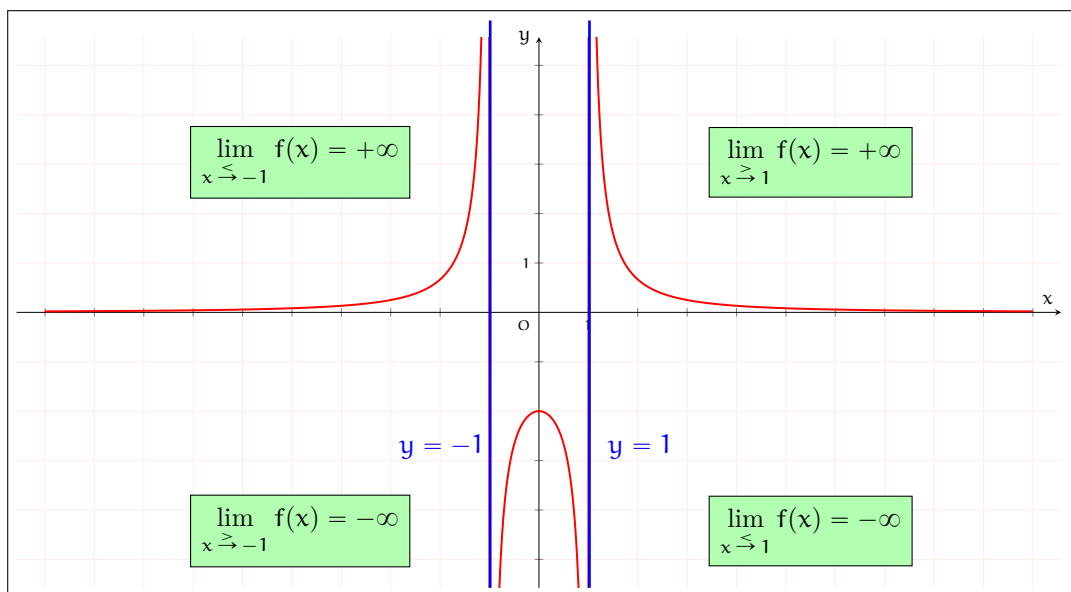


x_0 عدد حقيقي و f دالة معرفة بجوار x_0 .
القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي $-\infty$ يعني
أن كل مجال من الشكل $]-\infty; A]$ ($A \in \mathbb{R}$)
يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل
 x قريب بالقدر الكافي من x_0 . و نكتب
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

٢ التفسير الهندسي (المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الترتيب):

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x = x_0$ مستقيم
مقارب عمودي للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كيلي: $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$



1 لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2}{x-3}$

« أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ »

2 لتكن f الدالة المعرفة على $]3; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x-3}$

« أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ »

المستوى : 03 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : العمليات على النهايات

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 - 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المفاهيم الأساسية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
العمليات : عمليات على النهايات وطرق إزالة حالة عدم التعيين .
الأدوات المستخدمة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل																																																																																													
5د	تذكير طريقة: يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف. إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة. يمكن لدالة الا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها، مثلا الدالة $x \mapsto \sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$ 1 مبرهنات أولية على النهايات: f و g دالتان و x_0 يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، l و l' أعداد حقيقية. نهاية مجموعة دالتين <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$</td><td>$l$</td><td>$l$</td><td>$l$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$</td><td>$l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$</td><td>$l + l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>$-\infty$</td></tr></table> نهاية جداء دالتين <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$</td><td>$l$</td><td>$l > 0$</td><td>$l > 0$</td><td>$l < 0$</td><td>$l < 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$0$</td><td>$0$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$</td><td>$l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)]$</td><td>$l \times l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td></tr></table> نهاية حاصل قسمة دالتين <table><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$</td><td>$l$</td><td>$l$</td><td>$l$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$0$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$</td><td>$l'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$l' < 0$</td><td>$l' > 0$</td><td>$l' < 0$</td><td>$l' > 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$0$</td></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$</td><td>$\frac{l}{l'}$</td><td>$0$</td><td>$0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td><td>ح ع ت</td></tr></table> 2 حالات عدم التعيين: < تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : عدم التعيين حيث توجد أربع ح ع ت وهي من الشكل $-\infty + \infty$ أو $(+\infty - \infty)$ ، $0 \times \infty$ ، $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{0}$ < تتطلب حالات عدم تعيين دراسة خاصة في كل حالة	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	الانطلاق البناء و الترسيع
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$																																																																																									
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$																																																																																									
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$																																																																																									
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0																																																																																					
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$																																																																																					
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت																																																																																					
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0																																																																																			
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0																																																																																			
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت																																																																																			
30د																																																																																															

③ النهايات بعض الدوال المألوفة:

نهاية دالة كثير حدود

مبرهنة

نهاية دالة كثير حدود عند المالا نهاية $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حدها الاعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

نهاية دالة ناطقة

مبرهنة

نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

نهاية دالة الجذر تربيعي

مبرهنة

f دالة موجبة و l عدد حقيقي موجب

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$

إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

د30

مثال

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x - 2}{2x}} = \sqrt{2} \quad \text{و منه نستنتج أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 2}{2x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

④ إزالة حالات عدم التعيين:

دراسة مثال 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2}$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x^2} = +\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

و منه نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

دراسة مثال 02 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; -1]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3} + 2x - 2$:

* أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 = -\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 3} + 2x - 2)(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x - 2)}{(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 7}{(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 1}{-2x(\sqrt{1} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(8 + \frac{1}{x})}{-2x(\sqrt{1} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$ حيث $(a = \alpha)$

إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$ حيث $(\sqrt{a} = |\alpha|)$

نزول حالة عدم تعيين بالضرب في المرافق.

دراسة مثال 03 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[\frac{3}{2}; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{2x - 3} - 3x + 2$:

* أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x - 3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 = -\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

إذن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x - 3} - 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2} \right)} - 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} - 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} - 3 + \frac{2}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

دراسة مثال 04 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3} + x - 2$:

* أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 3} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{3}{x^2}\right)} + x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\left(4 - \frac{3}{x^2}\right)} + x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{\left(4 - \frac{3}{x^2}\right)} + 1 - \frac{2}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax + b} - \alpha x + \beta$
إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha x + \beta$ حيث $(\sqrt{a} \neq |\alpha|)$ نزيل حالة عدم تعيين باستخراج x كعامل مشترك.

دراسة مثال 05 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ كما يلي : $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

إزالتها

التحليل :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

دراسة مثال 06 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} - 2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

إذا كانت الدالة f تتضمن كثيرات حدود نقوم بتحليل البسط والمقام على الشكل

$$f(x) = \frac{(x-a)(\dots)}{(x-a)(\dots)}$$

إذا كانت الدالة f تتضمن جدرا نقوم بالضرب في المرافق $\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$ ثم نختزل العوامل المشتركة

دراسة مثال 07 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

* أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3}-2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

إزالتها

طريقة العدد المشتق :

لدينا $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ نلاحظ $f(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ حيث $g(x) = \sqrt{x+3}$ و $x_0 = 1$

باستعمال تعريف العدد المشتق نجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$$

$$g'(1) = \frac{1}{4}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ و كان مقام الدالة f يكتب من الشكل $(\alpha x + \beta)$

نزيل حالة عدم تعيين باستعمال طريقة العدد المشتق وذلك بإظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0) \text{ حيث } f(x) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

ثم نستنتج $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

تطبيق

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} \quad (6)$$

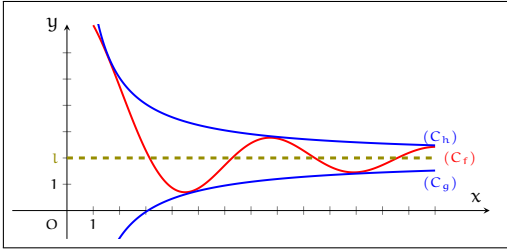
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{\frac{x}{5}-1} \quad (4)$$

المستوى : 03 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : العمليات على النهايات

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 - 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المفاهيم : المقاربات : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الصفاءات : المسنحة : حساب النهايات باستعمال المقارنة أو الحصر، حساب نهاية مركب دالتين .
الاهوار : المسنحة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل
د20	نشاط مقترح لكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{x^2}$ ① أثبت أنه من أجل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x^2}$ ② احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2}$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ حساب النهايات بالمقارنة : ① مبرهنة الحصر : مبرهنة  f, g, h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ l، و $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ مثال نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه فإن من أجل كل x من $]0; +\infty[$، $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و عليه نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ② مبرهنة الحد من الأعلى : مبرهنة f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $f(x) \geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	الانطلاق البناء و الترسيع
د30		

③ مبرهنة الحد من الأسفل :

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $f(x) \leq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + \sin x$ نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$
ومن هنا فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$
بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

تطبيق

f دالة عددية معرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$

1 أثبت أنه من أجل كل $x > 0$: $\frac{2x - 1}{x - 1} < f(x) < \frac{2x + 1}{x - 1}$

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

نشاط مقترح

لتكن f الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 1}}$

1 أثبت أن $f = g \circ h$ حيث g و h دالتين يطلب تعيينهما.

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3 عين b نهاية الدالة h عند $+\infty$ ثم نهاية الدالة g عند b ، ماذا تلاحظ؟

نهاية مركب دالتين :

مبرهنة

a, b و c تمثل أعداد حقيقية أو $\pm\infty$ و f, g و h دوال عددية حيث : $f = g \circ h$
إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ h)(x) = c$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$ ونريد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v ($f = v \circ u$) حيث $u(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ و $v(x) = \sin x$
بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} v(x) = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

د10

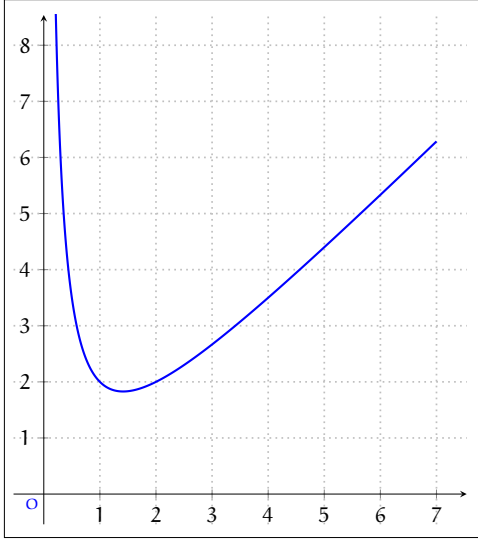
f دالة عددية معرفة على $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$

1 أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

المستوى : 03 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات
موضوع الحصة : المستقيم المقارب المائل

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 01 ساعة

المفاهيم الأساسية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الصفاءات المستعملة : تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب لمنحنى دالة .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

الوقت	سير الحصة	المراحل
20د	نشاط مقترح لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ ، المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$  * لتكن $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f) و $P(x, y)$ نقطة من (Δ). ① بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ فإن : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$ ② أحسب بدلالة x المسافة MP. ③ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} MP$ ، ماذا يمكنك القول عن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y]$ ؟ ④ في نفس المعلم أرسم المستقيم (Δ) ، ماذا تلاحظ؟	الانطلاق
30د	المستقيم المقارب المائل : تعريف (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ على الترتيب.	البناء و الترسيع

⚠ ملاحظة هامة

إذا كانت f و g دالتين بحيث : $f(x) = (ax + b) + g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ يكون مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ نفس الملاحظة لما يؤول x يؤول $(-\infty)$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ بـ : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2}$ بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0$$

إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2[$ بـ : $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x-2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]-\infty; 2[$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

3 إستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

طريقة: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$.

يكون المستقيم (Δ) هو مستقيماً مقارباً مائلاً للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$ على الترتيب) ،

إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$

(على الترتيب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+2}$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ومنه $a = 1$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 3}{x+2} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$ ومنه $b = 1$

إذ المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

بنفس الطريقة نجد أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

البناء
و
التزيين

التقويم

التقويم