

مجلة النجاح

الدوال العددية - النهايات - الاشتقاقية -
الإستمرارية



إعداد : الأستاذ مسعود

Proff_Messaoud



الأستاذ مسعود للرياضيات



الأستاذ مسعود بن منصور



مكتسبات قبلية

• إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ مضاعف}$$

ولدينا :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	نفس إشارة a 		

• إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين

متمايزين هما :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	نفس a		عكس a	نفس a

المتطابقات الشهيرة

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

دراسة إشارة كثيرات الحدود

دراسة إشارة كثير حدود من الشكل $ax + b$

a و b عدنان حقيقيان حيث $a \neq 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	نفس إشارة a		عكس إشارة a

دراسة إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية

a , b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

لدراسة إشارة $ax^2 + bx + c$ نحل المعادلة باستعمال

المميز Δ حيث : $\Delta = b^2 - 4ac$

• إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة لا تقبل حل ولدينا:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	نفس إشارة a	

الدوال العددية

مجموعة التعريف

تعاريف و مصطلحات :

- الدالة ببساطة هي العبارة التي ترفق بكل عدد x صورة له y
- نرمز للدوال بالرمز $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$... الخ
- تسمى $f(x)$ أو y حيث $f(x) = y$ الدالة أو الصورة أو الترتيبة
- يسمى المتغير أو السابقة أو الفاصلة
- كل دالة معرفة على مجال يسمى مجموعة التعريف D

الدالة	مجموعة التعريف
كثير الحدود $f(x)$	$R =]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$h(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{h(x)}$	$h(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$	$h(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{h(x)} + \frac{g(x)}{k(x)}$	$h(x) \geq 0$ مع $k(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$	$g(x) \geq 0$ مع $h(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$	$h(x) \neq 0$ مع $\frac{g(x)}{h(x)} \geq 0$

العمليات على الدوال و مجموعة التعريف

$f(x)$ و $g(x)$ دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. k و λ عدنان حقيقيان.

العملية	مجموعة التعريف
$f(x) + k$	D_f
$\lambda f(x)$	D_f
$f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
$f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\{x \in D_f \cap D_g \text{ و } g(x) \neq 0\}$
$f \circ g$	$D_{f \circ g} \{x / x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$

تحديد مجموعة التعريف

القاعدة:

- لا كسرو لا جذر : $D_f = R =]-\infty; +\infty[$
- في الكسر نكتب: $0 \neq$ المقام
- في الجذر نكتب: $0 \geq$ ما بداخل الجذر
- في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر

: D_f هي تقاطع مجالات تعريف كل هذه الدوال

النهايات

نهايات الدوال المألوفة

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b] = -\infty (a > 0)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax + b] = +\infty (a > 0)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b] = +\infty (a < 0)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax + b] = -\infty (a < 0)$

• حالات عدم التعيين :

$$\frac{0}{0} / \frac{\infty}{\infty} / 0 \times \infty / +\infty - \infty$$

• قواعد حساب النهايات :

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0 / \frac{\text{عدد}}{0} = \infty / \infty \times \infty = \infty$$

• نهاية دالة كثير حدود عند المالانهاية :

هي نهاية الحد الأعلى درجة

• نهاية دالة ناطقة عند المالانهاية :

هي نهاية الحد الأعلى درجة من البسط على
الحد الأعلى درجة من المقام

التفسير الهندسي

النهاية : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

$x = a$ مستقيم مقارب عمودي يوازي محور الترتيب
بجوار $\pm \infty$

النهاية : $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$

$y = b$ مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل
بجوار $\pm \infty$

النهاية : $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$

إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل

العمليات على النهايات

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$
l	l'	$l + l'$	$l \times l'$	$\frac{l}{l'} : l' \neq 0$
l	∞	∞	$\infty : l \neq 0$	0
∞	l'	∞	$\infty : l' \neq 0$	∞
0	0	0	0	$\frac{0}{0}$
l	0	l	0	$\infty : l \neq 0$
0	∞	∞	$\frac{0}{\infty}$	0
∞	0	∞	$\frac{\infty}{0}$	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{+\infty}{+\infty}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{-\infty}{+\infty}$
$+\infty$	$-\infty$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$-\infty$	$\frac{+\infty}{-\infty}$

نهاية الدالة مركب

مبرهنة

◀ a, b, c تمثل أعداد حقيقية أو $-\infty$ أو $+\infty$

و u, v و f دوال حيث : $f = u \circ v$

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = b$

و إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = c$

فإن : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة 01

◀ f, g و h دوال و l عدد حقيقي

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

و : $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$

و إذا كان من أجل كل x :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

مبرهنة 02

◀ f, g و h دوال . l و l' أعداد حقيقية

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l' \quad \text{و} :$$

و إذا كان من أجل كل x :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

فإن :

$$l \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq l'$$

مبرهنة 03

◀ f و g دالتان و l عدد حقيقي

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

و إذا كان من أجل كل x :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

فإن :

مبرهنة 04

◀ f و g دالتان و l عدد حقيقي

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

و إذا كان من أجل كل x :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

فإن :

إزالة حالات عدم التعيين

• حالات عدم التعيين :

$$\frac{0}{0} \quad / \quad \frac{\infty}{\infty} \quad / \quad 0 \times \infty \quad / \quad +\infty - \infty$$

الاختزال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{ح ع ت}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3 \end{aligned}$$

التحليل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 1} - 2x + 1 = +\infty - \infty \quad \text{ح ع ت}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{\left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} - 2 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} - 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty \end{aligned}$$

المرافق

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = +\infty - \infty \quad \text{ح ع ت}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = 0$$

العدد المشتق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{ح ع ت}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x - 0} = -\sin(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

مبرهنة القيم المتوسطة

تعريف

◀ f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a ; b]$ من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c) = k$

التفسير الهندسي

◀ f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$ و ليكن (C) منحناها البياني في معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b

◀ إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a ; b]$ وكان

$$f(a) \times f(b) < 0$$

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور

$$\text{بين } a \text{ و } b \text{ بحيث : } f(\alpha) = 0$$

أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a ; b]$

الاستمرارية

تعريف

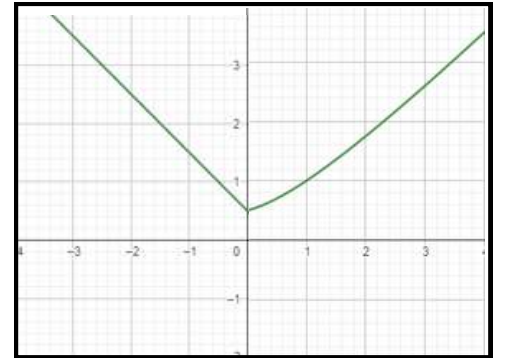
◀ f مستمرة عند قيمة a معناه $f(a)$ معرفة و :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

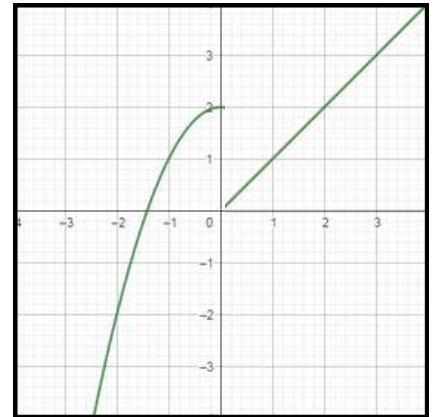
◀ f مستمرة على مجال I من R معناه f مستمرة عند كل قيمة من I .

التفسير الهندسي

◀ تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يتم رسم منحناها بدون رفع القلم



مستمرة



غير مستمرة

الإشتقاقية

قابلية الإشتقاق عند عدد

دالة معرفة على مجال I من R ، a عدد من I

نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد a معناه :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

يسمى $f'(a)$ العدد المشتق للدالة f في العدد a .

ملاحظات:

• يمكن تعريف العدد المشتق للدالة f عند a بالعلاقة

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

• إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند عدد a من I ، نقول

أنها قابلة للإشتقاق على I ، و تسمى الدالة $f'(x)$ الدالة المشتقة لـ f

• إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على مجال I ،

فهي مستمرة على هذا المجال ، والعكس ليس

دائما صحيح

مماس منحنى دالة

دالة معرفة على المجال I الذي يشمل a و (C_f)

تمثيلها البياني .

إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند a فإن (C_f) يقبل عند

النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (T) معامل توجيهه

$f'(a)$ و معادلته :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

الإشتقاق من اليمين و من اليسار

دالة f قابلة للإشتقاق عند a من اليمين معناه :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$$

دالة f قابلة للإشتقاق عند a من اليسار معناه :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$$

ملاحظات:

• إذا كان $f'_d(a) = f'_g(a)$ فإن الدالة f قابلة للإشتقاق عند a

• إذا كان $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند a و النقطة $A(a; f(a))$ تسمى نقطة زاوية

التفسير الهندسي:

• إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق عند a من اليمين

فإن (C_f) يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة

$A(a; f(a))$ معامل توجيهه $f'_d(a)$ و معادلته :

$$y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$$

• إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق عند a من اليسار

فإن (C_f) يقبل نصف مماس من اليسار عند النقطة

$A(a; f(a))$ معامل توجيهه $f'_g(a)$ و معادلته :

$$y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$$

• إذا كان $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ نقول أن (C_f) يقبل عند

النقطة A نصفي مماسين يصنعان بينهما زاوية

المماس العمودي لمنحنى دالة

• إذا كانت الدالة f مستمرة عند a و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

• فإن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند

• والمنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا عموديا معادلته $x = a$

المشتقات والعمليات

مشتقات الدوال المألوفة :

الدالة $f(x)$	المشتقة $f'(x)$	مجال ت
$k \ (k \in R)$	0	R
ax	a	R
$ax^n \ (n \geq 2/n \in N)$	anx^{n-1}	R
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	R^*
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	R
$\sin(x)$	$\cos(x)$	R

• الدالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على R

• الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها

المشتقات والعمليات على الدوال :

دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من R و $k \in R$

المشتقة	الدالة
$u' + v'$	$u + v$
ku'	ku
$u' \times v + v' \times u$	$u \times v$
$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{1}{v} \ (v \neq 0)$
$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$	$\frac{u}{v} \ (v \neq 0)$

مشتق الدالة $u(ax + b)$

a و b عدنان حقيقيان حيث $a \neq 0$ ، u دالة قابلة

للاشتقاق على مجال I من R ، ليكن J المجال

المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax + b$ ينتمي إلى J

الدالة $f(x) = u(ax + b)$ قابلة للاشتقاق على J

ولدينا من أجل كل x من J

$$f'(x) = au'(ax + b)$$

إشتقاق دالة مركبة

مشتقة الدالة $v \circ u$

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R وقبلت الدالة v الإشتقاق على المجال $u(I)$ ، فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$$

مشتقة الدالة الجذرية

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R وكانت موجبة تماما على I ، فإن الدالة $\sqrt{u(x)}$ تقبل الإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I

$$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

مشتقة الدالة $[u(x)]^n$

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R ، فإن الدالة u^n قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I :

$$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$$

مشتقة الدالة $\frac{1}{u^n}$

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R ولتنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$$

المشتقات المتتالية

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على مجال I ، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f'(x)$ وتسمى المشتقة الأولى للدالة f

إذا كانت الدالة f' قابلة للإشتقاق على مجال I ، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $(f'(x))'$ وتسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' أو $f^{(2)}$

تسمى الدوال f' ، f'' ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f

إتجاه تغير الدالة

المشتقة و إتجاه التغير

f قابلة للإشتقاق على I من R

إذا كان من أجل كل x من I :

◀ $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I

◀ $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I

◀ $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة تماما على I

القيم الحدية المحلية

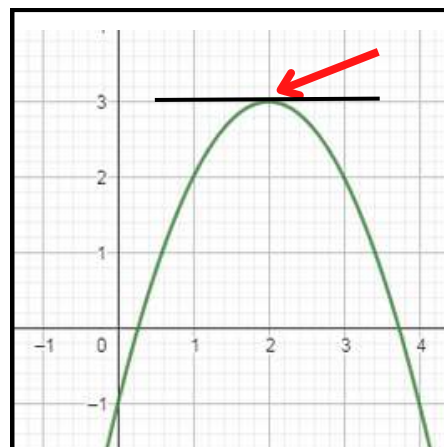
f قابلة للإشتقاق على I من R يشمل x_0

◀ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى للدالة f ،

يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I و

يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J لدينا

$$f(x_0) > f(x)$$

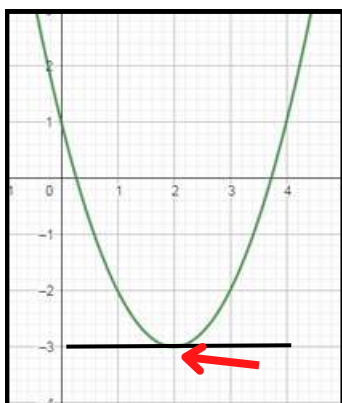


◀ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى للدالة f ،

يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I و

يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J لدينا

$$f(x_0) < f(x)$$



نقطة الإنعطاف

◀ نقول أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $\omega(x_0; f(x_0))$

إذا تحقق أحد الشرطين :

• المشتقة الأولى f' تنعدم عند x_0 و لا تغير إشارتها

• المشتقة الثانية f'' تنعدم عند x_0 و تغير إشارتها

• المماس يخرق المنحنى (C_f) عند x_0

