



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية -النهايات-

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 02

بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = +\infty \quad \text{مثال:}$$

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = 3$$

حالات عدم التعيين:

① $\infty - \infty$

② $0 \times \infty$

③ $\frac{\infty}{\infty}$

④ $\frac{0}{0}$

طرق إزالة حالات عدم التعيين:

(1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ حيث: $f(x_0) = g(x_0) = 0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتها على الشكل: $(x - x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(4x + 7)}{(x - 1)(x + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x + 7}{x + 3} \right) = \frac{11}{4} \quad \text{مثال 1:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \right) = -3 \quad \text{مثال 2:}$$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2 + 3x - 7$ على الشكل: $(x - 1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax + b$ ومنه:

$$(x - 1)Q(x) = (x - 1)(ax + b) = ax^1 + (b - x)x - b$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b - a = 3 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x - 1)(4x + 7)$$

مثال:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 8 & x + 2 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} & \\
 -2x^2 + 8 & \\
 \underline{+2x^2 + 4x} & \\
 +4x + 8 & \\
 \underline{-4x - 8} & \\
 0 &
 \end{array}$$

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

مثال: $x_0 = 1, p(x) = 4x^2 + 3x - 7$

$$\begin{cases}
 a' = a = 4 \\
 b' = aa' + b = 1(4) + 3 = 7 \\
 c' = x_0 b' + c = 1(7) - 7 = 0
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x - 1)(4x + 7)$$

	$a = 4$	$b = 3$	$c = -7$	معاملات $p(x)$
$x_0 = 1$	↓			الجذر x_0
	$a' = 4$	$b' = 7$	$c' = 0$	معاملات $Q(x)$

(2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال 1

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} \right) = \frac{1}{2}$$

مثال 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{x+8} - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{5-x} - 2)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-x)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{x+8} + 3} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$ ، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال 3)

أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال 4)

مثال 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2})(x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2})}{(x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x + 1)^2 - (x^2 + x - 2)}{x + 1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 3}{x + 1 + |x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} \right)} \right) \quad (x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| = x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 - x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \Rightarrow (x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(\underbrace{2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}_{\rightarrow 1} \right) \right) = -\infty
 \end{aligned}$$

2 استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}; f(2) = 1; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) = 1$$

$$f(x) = \sin(x); f(0) = 0; f'(x) = \cos(x)$$

نهاية دالة مركبة:

$$f = v \circ u: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow v} v(x) = c \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{4x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 3}} \right); \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 3} \right) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 4} \left(\sqrt{x} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

النهايات بالمقارنة:

الحالة ①:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \right) \text{ احسب}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(x) \leq 1 \\ \Rightarrow 2x - 1 &\leq 2x + \cos(x) \leq 2x + 1 \\ \Rightarrow \frac{2x - 1}{x + 1} &\leq \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1} \end{aligned}$$

ملاحظة: المتراجحة لم تتغير لأنه لما $(x \rightarrow +\infty)$ فإن: $(x + 1 > 0)$

أما إذا كان $(x \rightarrow -\infty)$ فإن: $(x + 1 < 0)$ ، منه تتغير المتراجحة عند القسمة على $(x + 1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x - 1}{x + 1} \leq \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{x + 1} \right) = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} = 2$$

الحالة ②:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 - \sin(x)} \right) \text{ احسب}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(x) \leq 1 \\ \Rightarrow -1 &\leq -\sin(x) \leq 1 \\ \Rightarrow 1 &\leq 2 - \sin(x) \leq 3 \\ \Rightarrow \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{x}{3} &\leq \frac{x}{2 - \sin(x)} \leq x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2 - \sin(x)} \geq \frac{x}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{3} \right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 - \sin(x)} \right) = +\infty$$

الحالة ③:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

مثال:

$$\text{احسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x \cos(x))$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq x \cos(x) \leq -x$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x \leq -2x^2 + \cos(x) \leq -2x^2 - x$$

$$\begin{cases} -2x^2 + \cos(x) - 2x^2 - x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + \cos(x)) = -\infty$$

ملاحظة:

غالبا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin(x); \cos(x))$ لما x يؤول $\pm\infty$.

حيث أن هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\pm\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائما ننتقل من حصر الدالة المثلثية $(\sin(x); \cos(x))$ بين (-1) و $(+1)$.

المستقيـمات المقاربة:

- ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب عمودي
(يوازي محور الترتيب)
- ② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow$ المستقيم $y = b$ مستقيم مقارب أفقي
(يوازي محور الفواصل)
- ③ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Rightarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل

◀ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ▶