

تمرين 1

أحسب الجداء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 2$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

2- $\|\vec{u}\| = \frac{4}{7}$ و $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

3- $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

4- $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 4$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{7\pi}{6}$

5- $\|\vec{u}\| = 6$ و $\|\vec{v}\| = 5$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$

6- $\|\vec{u}\| = 4\sqrt{3}$ و $\|\vec{v}\| = \frac{7}{3}$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{6}$

حل التمرين رقم 1

1- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$

2- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{7}$

3- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-15}{4}$

لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

4- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -6\sqrt{3}$

لأن : $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 5 \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}$

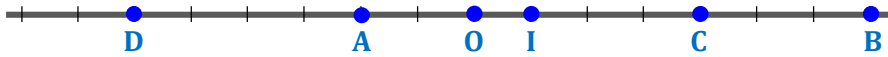
لأن : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4\sqrt{3} \times \frac{7}{3} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 14$

لأن : $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين 2

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
حيث : $OI = 1$ ، $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{OI}$ ، $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD}$



حل التمرين رقم 2

1- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا ولهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \times 6 = 54$

2- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطين خطيا ومتعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -4 \times 3 = -12$

3- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا ومتعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -9 \times 10 = -90$

4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطين خطيا ولهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 10 \times 4 = -40$

5- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{DO}$ مرتبطين خطيا ولهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{OI} = 6 \times 1 = 6$

6- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{DB}$ مرتبطين خطيا ومتعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{DB} = -3 \times 13 = -39$

النجاح يحققه فقط الذين يواصلون المحاولة بنظرة ايجابية للأشياء

تمرين 3

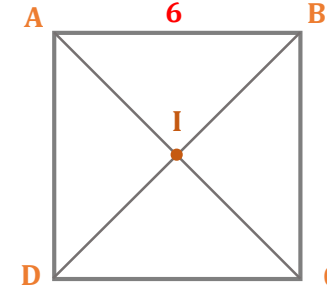
ABCD مربع حيث:

AB = 6 و I نقطة تقاطع قطريه.

أحسب الجداءات السلمية التالية :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$$



حل التمرين رقم 3

1- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطين خطيا ولهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 = 36$

2- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CB}$ متعامدين .

فان : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

3- بما أن : قطرا المربع متعامدين فان الشعاعين $\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IC}$ متعامدين.

ومنه : $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$

4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{BI}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BI} = -6 \times 6 = -36$

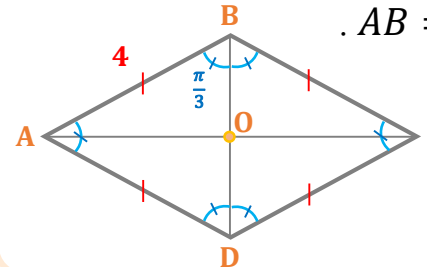
تمرين 4

ABD و BCD مثلثان متقايسا الأضلاع حيث AB = 4 .

أحسب الجداءات السلمية التالية :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD}$$



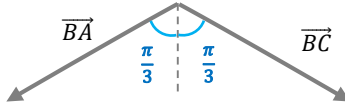
1- لدينا : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

ومنه : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8$

2- لدينا : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

ومنه : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$

لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

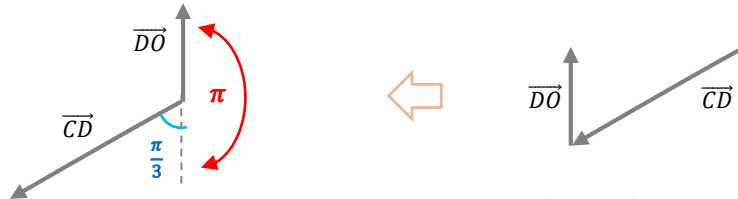


3- لدينا : $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} = DO \times CD \times \cos(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{CD})$

ومنه : $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 4 \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} = -4$

لأن : $(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DO}, -\overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DC}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

حيث : $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$



4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -4 \times 4$ اذن : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -16$

يقوم الناجحون بما لا يرغب به الفاشلون ، لذا لا تتنى ان يكون الامر سهلا
بل تمنى ان تكون انت الأفضل

تمرين 5

أحسب بطريقتين الجداء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ -3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

2- $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ -4 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

حل التمرين رقم 5

الطريقة الأولى : نستخدم " $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ "

1- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + (-2) = 5$

2- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4 \times 2) + (-6) \times (1) = 2$

3- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5 \times 7) + (2 \times 8) = 51$

4- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-4) + (-4) \times (-2) = 0$

الطريقة الثانية : نستخدم " $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ "

1- لدينا : $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 13$ و $\|\vec{v}\|^2 = 2$ و $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 8$

اذن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(13 + 2 - 8) = 5$

2- لدينا : $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-6)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2}$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 52$ و $\|\vec{v}\|^2 = 5$ و $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 53$

اذن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(52 + 5 - 53) = 2$

3- لدينا : $\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + 2^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 8^2}$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 29$ و $\|\vec{v}\|^2 = 113$ و $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 40$

اذن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(29 + 113 - 40) = 51$

4- لدينا : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 20$ و $\|\vec{v}\|^2 = 20$ و $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 40$

اذن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(20 + 20 - 40) = 0$

ملاحظة

إذا كان $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ فان حساب مركبات الشعاع $\vec{u} - \vec{v}$ هي كالتالي :

$$\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$$

تمرين 6

في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ لدينا النقط $A(5, 2)$ ، $B(3, 4)$ و $C(0, 1)$.

1- أحسب الجداء السلمي لـ : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ و $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ و $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

2- ماذا يمكن القول عن المثلث ABC .

حل التمرين رقم 6

الطريقة الأولى : نستخدم " $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ "

1- $\square$ لدينا : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-5 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و لدينا $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-5 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

اذن : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-2) \times (-5) + (2) \times (-1) = 8$

لدينا : $\vec{BA} \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{BA} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ و لدينا $\vec{BC} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 1-4 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

اذن : $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (2) \times (-3) + (-2) \times (-3) = 0$

لدينا : $\vec{CA} \begin{pmatrix} 5-0 \\ 2-1 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ و لدينا $\vec{CB} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

اذن : $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (5) \times (3) + (1) \times (3) = 18$

الطريقة الثانية : نستخدم " $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ "

1- لدينا : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-5 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و لدينا $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-5 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ولدينا أيضا : $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$ و عليه $\vec{CB} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

اذن : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}$

$\|\vec{AB} - \vec{AC}\| = \|\vec{CB}\| = \sqrt{3^2 + 3^2}$

وعليه : $\|\vec{AB}\|^2 = 8$ و $\|\vec{AC}\|^2 = 26$ و $\|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2 = 18$

اذن : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(8 + 26 - 18) = 8$

لدينا : $\vec{BA} \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{BA} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ و لدينا $\vec{BC} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 1-4 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

ولدينا أيضا : $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{CB} = \vec{AC}$ و عليه $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-5 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

اذن : $\|\vec{BA}\| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$

$\|\vec{BA} - \vec{BC}\| = \|\vec{AC}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}$

وعليه : $\|\vec{BA}\|^2 = 8$ و $\|\vec{BC}\|^2 = 18$ و $\|\vec{BA} - \vec{BC}\|^2 = 26$

اذن : $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(8 + 18 - 26) = 0$

لدينا : $\vec{CA} \begin{pmatrix} 5-0 \\ 2-1 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ و لدينا $\vec{CB} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ولدينا أيضا : $\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{CA} + \vec{BC} = \vec{BA}$ و عليه $\vec{BA} \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{BA} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

اذن : $\|\vec{CA}\| = \sqrt{5^2 + 1^2}$

$\|\vec{CB}\| = \sqrt{3^2 + 3^2}$

$\|\vec{CA} - \vec{CB}\| = \|\vec{BA}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$

وعليه : $\|\vec{CA}\|^2 = 26$ و $\|\vec{CB}\|^2 = 18$ و $\|\vec{CA} - \vec{CB}\|^2 = 8$

اذن : $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}(26 + 18 - 8) = 18$

2- لدينا : $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$ و عليه الشعاعين $\vec{BA}$ و $\vec{BC}$ متعامدين .

اذن : المثلث ABC قائم في B .

لايهم من اين انت قادم ، المهم الى اين انت ذاهب .

تمارين 7

في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ يعطى :

1- $\vec{u}(3, -2)$ و $\vec{v}(2, 4)$ أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\|\vec{v}\|$ و $\vec{u}^2$.

2- $\vec{u}(\frac{1}{2}, -2)$ و $\vec{v}(4, -1)$ أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

3- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{4\sqrt{3}}{2}$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$ و $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ أحسب $\|\vec{u}\|$.

4- $\vec{u}(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3})$ و $\vec{v}(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$ أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

حل التمرين رقم 7

1- لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 2) + (-2) \times (4) = -2$

و لدينا : $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

و لدينا أيضا : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (3 \times 3) + (-2) \times (-2) = 13$

2- لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\frac{1}{2} \times 4) + (-2) \times (-1) = 4$

و لكن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

و عليه : $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{17}{4}}$

ومنه : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{8}{17}$ اذن $4 = \sqrt{\frac{17}{4}} \times \sqrt{17} \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

3- لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

و منه : $-\frac{4\sqrt{3}}{2} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\frac{5\pi}{6})$

و عليه : $\|\vec{u}\|^2 = 4$ (لأن : $\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

اذن : $\|\vec{u}\| = 2$

4- أولا نقوم بتبسيط مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

لدينا $\vec{u}(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3})$ فتصبح $\vec{u}(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(لأن : $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$)

(و لأن : $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

و لدينا $\vec{v}(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$ فتصبح $\vec{v}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

وعليه : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2}) \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$

و لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

ومنه : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4} = 1 \times 1 \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

(لأن : $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$)

اذن : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$

ليس النجاح هو مفتاح السعادة بل السعادة هي مفتاح النجاح
فان انت احببت ما تقوم به فلسوف يكون النجاح من نصيبك.

تمارين 8

ABC مثلث حيث $AB = 2$ ، $AC = 3$ ، $BC = \frac{3}{2}$.

1- أحسب $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

2- أحسب $\cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

تمرين 11

1- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث : $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 2$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

- أحسب : $(4\vec{u} - 3\vec{v})(\vec{u} + 2\vec{v})$ ، $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$.

2- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث : $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 2$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

- أحسب : $(\vec{u} + \vec{v})^2$ ، $(\vec{u} - \vec{v})^2$ ، $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$.

حل التمرين رقم 11

1- حساب : $(4\vec{u} - 3\vec{v})(\vec{u} + 2\vec{v})$

$$(4\vec{u} - 3\vec{v})(\vec{u} + 2\vec{v}) = 4\vec{u}^2 + 8\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v}^2$$

$$= 4 \times (3) + 2 \times (-3) - 6 \times (-3) = 24$$

- حساب : $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v})^2 = 9\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 - 2((3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v}))$$

$$= 9\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= 9 \times (9) + 4 \times (4) + 12 \times (-3) = 61$$

2- حساب : $(\vec{u} + \vec{v})^2$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 9 + 4 + 2 \times (-3) = 7$$

- حساب : $(\vec{u} - \vec{v})^2$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 9 + 4 - 2 \times (-3) = 19$$

- حساب : $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}(\|\vec{CA}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 - \|\vec{CA} - \vec{CB}\|^2)$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - \|\vec{BA}\|^2)$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}\left(3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2^2\right) = \frac{29}{8}$$

(ملاحظة : $BC = CB$ و $AC = CA$ و $AB = BA$)

تمرين 9

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{11}{8} , BC = \frac{3}{2} , AB = 2$$

- أحسب $\cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

حل التمرين رقم 9

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \|\vec{BC}\|^2)$$

$$\text{ومنّه : } \frac{11}{8} = \frac{1}{2}\left(2^2 + AC^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$$

$$\text{لكن : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \text{ ومنّه : } \frac{11}{8} = 2 \times 1 \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$$

$$\text{اذن : } \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{11}{16}$$

تمرين 10

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \text{ و } AC = 3 \text{ و } AB = 2$$

- بين ان المثلث ABC قائم في B .

حل التمرين رقم 10

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \text{ أي : } \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = 4$$

$$\text{ومنّه : } \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 4 \text{ أي : } AB^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 4$$

$$\text{وعليه : } 4 + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 4 \text{ أي : } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

اذن : المثلث ABC قائم في B .

أحيانا يغلق الله سبحانه و تعالى امامنا بابا لكي يفتح لنا بابا آخر أفضل منه
ولكن الانسان يضيع تركيزه في النظر الى الباب الذي أغلق
بدلا من باب الامل الذي انفتح امامه على مصراعيه.