

ملخصات مفيدة قبل البكالوريا

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

المراجعة النهائية

* قواعد الحساب *

① الجداءات الشهيرة

الجداءات الشهيرة من الدرجة الثالثة	الجداءات الشهيرة من الدرجة الثانية
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	

② حل المعادلات من الدرجة الثانية

حساب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$			
$\Delta < 0$: إذا كان :	$\Delta = 0$: إذا كان :	$\Delta > 0$: إذا كان :	
المعادلة لا تقبل حلول	المعادلة تقبل حل مضاعف هو : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	المعادلة تقبل حلين متميزين هما : $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$
لا يمكن تحليل $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	تحليل $ax^2 + bx + c$
$-\infty \xrightarrow{+\infty}$ إشارة a	$-\infty \xrightarrow{x_0} 0 \xrightarrow{+\infty}$ إشارة a إشارة a	$-\infty \xrightarrow{x_1} 0 \xrightarrow{x_2} 0 \xrightarrow{+\infty}$ إشارة a إشارة $(-a)$ إشارة a	إشارة $ax^2 + bx + c$

③ خواص القيمة المطلقة

إذا كان x و y عددين حقيقيين فإن :

$\sqrt{x^2} = x $	$ -x = x $	$ x \geq 0$
$ x + y \leq x + y $	$y \neq 0 \Rightarrow \left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }$	$ x \times y = x \times y $
$ x - a = \begin{cases} x - a & ; x \geq a \\ -x + a & ; x \leq a \end{cases}$	$ x + a = \begin{cases} x + a & ; x \geq -a \\ -x - a & ; x \leq -a \end{cases}$	$ x = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$
	إذا كان $ x \geq a$ فإن $x \geq a$ أو $x \leq -a$	إذا كان $ x \leq a$ فإن $-a \leq x \leq a$

④ قواعد الحصر

لتكن a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماماً .

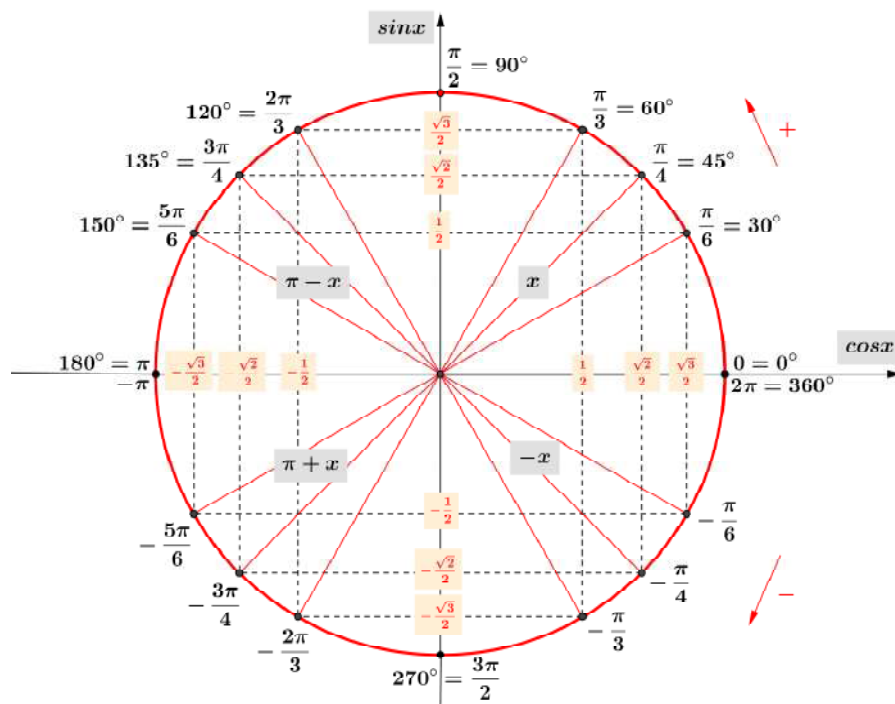
خاصية الـ				
قسمة	ضرب	طرح	جمع	
$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$	$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$	$a - d \leq x - y \leq b - c$	$a + c \leq x + y \leq b + d$	$a \leq x \leq b$ $c \leq y \leq d$

⑤ الدائرة المثلثية وحساب المثلثات

x عدد حقيقي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

$\begin{cases} \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \end{cases}$	$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$	$\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$
--	--	--



★ النهايات ★

① نهايات بعض الدوال المرجعية

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	الدالة مقلوب
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	الدالة جذر
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ مع n فردي	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ مع n زوجي	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	الدالة x^n $n \in \mathbb{N}^*$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

$+\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	حالات عدم التعيين
$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\ell}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\ell}{0} = \infty$	حالات يمكن التعيين
بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط و المقام بالنسبة لدوال جذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب و نقسم في المرافق عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك				طرق الإزالة

③ مبرهنات في النهايات

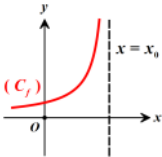
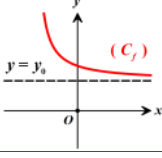
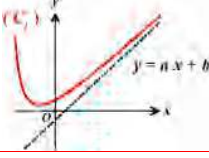
نعتبر u, v, f ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، ولتكن a, b, c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$	مبرهنة التركيب
إذا كان: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	مبرهنة الحصر
إذا كان: $f(x) \geq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ إذا كان: $f(x) \leq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ إذا كان: $f(x) - \ell \leq g(x)$ حيث: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	مبرهنات المقارنة

④ نهايات الدوال المثلثية

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	--	---	---

* المستقيعات المقاربة *

لتكن f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

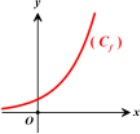
التمثيل البياني	التفسير الهندسي	النهاية
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$
	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ ، ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(y'y)$

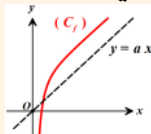


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$$

ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

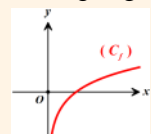
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y = ax$



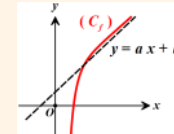
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(x'x)$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞



★ الاستمرارية و مبرهنة القيم المتوسطة ★

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a .

① الاستمرارية

	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f عند a
إذا كان $\ell_1 = \ell_2$ فإن f مستمرة عند a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \ell_1$ حيث $\ell_1 \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f على يمين a
	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \ell_2$ حيث $\ell_2 \in \mathbb{R}$	استمرارية الدالة f على يسار a

② صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

f دالة متناقصة تماماً على I	f دالة متزايدة تماماً على I	المجال I
$f(I)$	$f(I)$	$[a; b]$
$[f(b); f(a)]$	$[f(a); f(b)]$	$[a; b]$
$\left] \lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right[$	$[a; b[$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b) \right]$	$]a; b]$
$\left] \lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right]$	$]a; b[$

③ مبرهنة القيم المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a; b[$	مبرهنة ①
إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[a; b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a; b[$	مبرهنة ②
إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a; b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a و b بحيث $f(\alpha) = 0$.	مبرهنة ③
إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[a; b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a; b[$	مبرهنة ④

★ الاشتقاقية ★

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ و a عدد من D_f .

① الاشتقاقية

	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f عند a
إذا كان $f'_d(a) = f'_g(a)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند a	$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a
	$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$	قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a

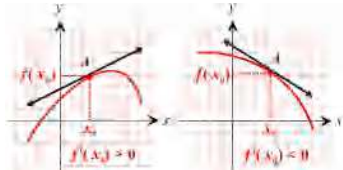
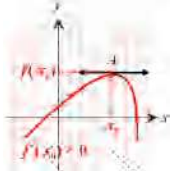
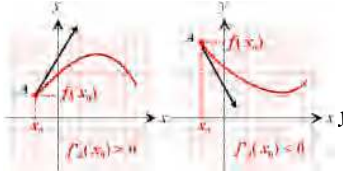
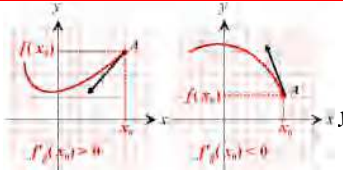
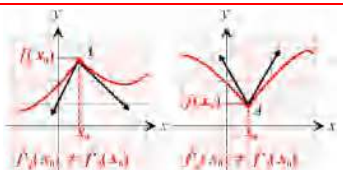
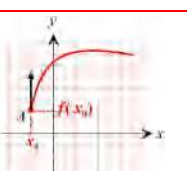
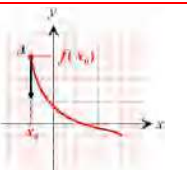
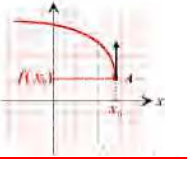
② مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
$a \in \mathbb{R}$ حيث a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$a x$	a	$\mathbb{R}$
x^n حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

③ المشتقات والعمليات على الدوال

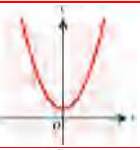
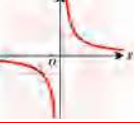
$u \circ v$	u^n	$\sqrt{u}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{1}{v}$	$u \times v$	au	$u \pm v$	الدالة
$v' \cdot u'(v)$	$n \times u^{n-1} \times u'$ $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$u'v - v'u$	au'	$u' \pm v'$	الدالة المشتقة

④ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

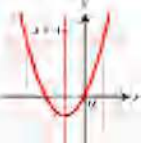
التفسير الهندسي	الاستنتاج	النهاية
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماساً معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 $f'(x_0) = a$ و	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y = f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 $f'(x_0) = 0$ و	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 $f'_d(x_0) = a$ و	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 $f'_g(x_0) = b$ و	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$
 (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية.	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 (C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
 (C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$
 (C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$
 (C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

★ شفعية دالة - مركز تناظر و محور تناظر ★

① شفعية دالة

التمثيل البياني	التفسير الهندسي	التعريف	
	(C_f) يقبل محور الترتيب كمحور تناظر	f دالة زوجية يعني من أجل كل : $-x \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(-x) = f(x)$	الدالة الزوجية
	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر	f دالة فردية يعني من أجل كل : $-x \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(-x) = -f(x)$	الدالة الفردية

② مركز تناظر و محور تناظر دالة

التمثيل البياني	التعريف	
	$\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $(2\alpha - x) \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$	مركز تناظر
	$x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $(2\alpha - x) \in D_f$ و $x \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) = f(x)$	محور تناظر

★ الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ★

(C_f) التمثيل البياني للدالة f و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.

الوضعية النسبية	إشارة الفرق $f(x) - y$
(C_f) يقع فوق (Δ)	$f(x) - y > 0$
(C_f) يقع تحت (Δ)	$f(x) - y < 0$
(C_f) و (Δ) يتقاطعان	$f(x) - y = 0$

★ إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم ★

ليكن (C_f) و (C_g) منحنين للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الدالة	التمثيل البياني
$f(x) = g(x) + b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$
$f(x) = g(x + a)$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$
$f(x) = g(x + a) + b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a; b)$
$f(x) = -g(x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x) = g(-x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الترتيب
$f(x) = -g(-x)$	المنحنين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$f(x) = g(x)$	- إذا كان $x \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) - إذا كان $x \leq 0$ فإن $f(x) = g(-x)$ منه (C_f) هو نظير (C_g) المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور الترتيب (f دالة زوجية)
$f(x) = g(x) $	- إذا كان $g(x) \geq 0$ فإن $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) - إذا كان $g(x) \leq 0$ فإن $f(x) = -g(x)$ منه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

★ المناقشة البيانية ★

ليكن (C_f) منى الدالة f و (Δ) مستقيم مائل (مماس أو مستقيم مقارب) معادلته $y = ax + b$.

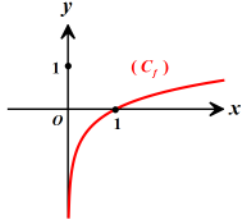
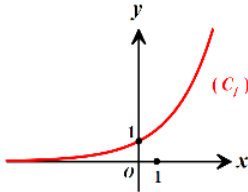
المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية ($m \in \mathbb{R}$)
$f(x) = m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل
$f(x) = ax + m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)
$f(x) = mx + b$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الدورانية حول النقطة $(0; b)$
$f(x) = m^2$ أو $f(x) = m $	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل ($y = m $ أو $y = m^2$) لكن المناقشة تبدأ من محور الفواصل نحو الأعلى
$f(x) = f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل معادلته $y = f(m)$

ملاحظات: نقول أن للمعادلة حل موجب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور الترتيب.

نقول أن للمعادلة حل سالب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور الترتيب.

نقول أن للمعادلة حل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة المماس.

★ الدالة الأسية و الدالة اللوغاريتمية ★

الدالة اللوغاريتمية	الدالة الأسية
1- تعريف: نسمي " الدالة اللوغاريتمية النبرية " الدالة التي نرمز لها بـ " $\ln$ " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$ و نكتب : $f(x) = \ln x$ 	1- تعريف: الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق : $f' = f$ و $f(0) = 1$ و نكتب : $f(x) = e^x$ أو $f(x) = \exp(x)$ 
2- خواص الدالة اللوغاريتمية النبرية: ليكن x و y من $]0; +\infty[$ و n عدد صحيح نسبي : $\ln e = 1$ ، $\ln 1 = 0$ ❗ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ ، $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ❗ $\ln x^n = n \ln x$ ، $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $x = y$: فإن $\ln x = \ln y$ ❗ $x > y$: فإن $\ln x > \ln y$ ❗ $0 < x < 1$ يعني $\ln x < 0$ و $x > 1$ يعني $\ln x > 0$ ❗	2- خواص الدالة الأسية: ليكن x ، y من $\mathbb{R}$ و n عدد صحيح نسبي : $e^1 = e \approx 2,71$ و $e^0 = 1$ ❗ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ، $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ❗ $e^{nx} = (e^x)^n$ ، $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $x = y$: فإن $e^x = e^y$ ❗ $x > y$: فإن $e^x > e^y$ ❗
3- مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية: $u(x) > 0$: $f(x) = \ln u(x)$ معرفة إذا كانت	3- مجموعة تعريف الدالة الأسية: $f(x) = e^{u(x)}$ ، الدالة f معرفة إذا كانت u معرفة
4- مشتقة الدالة اللوغاريتمية: $u(x) > 0$ مع $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$: $f(x) = \ln u(x)$ منه $u(x) \neq 0$ مع $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$: $f(x) = \ln u(x)$ منه	4- مشتقة الدالة الأسية: $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ منه : $f(x) = e^{u(x)}$
5- النهايات الشهيرة: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ مع $n > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-$	5- النهايات الشهيرة: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ مع $n > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
$x \in \mathbb{R}_+^*$ مع $e^{\ln x} = x$ ، $x \in \mathbb{R}$ مع $\ln e^x = x$	

★ الهندسة الفضائية ★

نعتبر في كل ما يلي $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، نضع: $A(x_A; y_A; z_A)$ ، $B(x_B; y_B; z_B)$ ، $C(x_C; y_C; z_C)$

مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ هي:	مركبات شعاع
طويلة الشعاع $\vec{u}(x; y; z)$ هي $\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	طويلة شعاع
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	المسافة بين نقطتين
I منتصف القطعة $[AB]$ حيث: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$	منتصف قطعة مستقيمة
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$	الجداء السلمي بين شعاعين
$\vec{v}(x'; y'; z')$ و $\vec{u}(x; y; z)$ حيث $\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$	العبارة التحليلية للجداء السلمي
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان:	تعامد شعاعين
$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان إذا كان: $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = k$ مع $k \in \mathbb{R}$ مع $\vec{u} = k\vec{v}$	الارتباط الخطي بين شعاعين
$\vec{n}(a; b; c)$ شعاعه الناظم $ax + by + cz + d = 0$	المعادلة الديكارية للمستوي (P)
$\vec{n} = k \times \vec{n}'$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'$ ناظمي لـ (P') و $k \in \mathbb{R}$	توازي مستويين (P) و (P')
$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'$ ناظمي لـ (P')	تعامد مستويين (P) و (P')
$d(A; (P)) = \frac{ ax_A + by_A + cz_A + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	بعد النقطة A عن المستوي (P)
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ حيث $\omega(x_0; y_0; z_0)$ مركزها و r نصف قطرها	المعادلة الديكارية لسطح كرة (S)
G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ مع $\alpha + \beta \neq 0$ معناه: $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$	مرجح نقطتين
G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$ مع $\alpha + \beta + \delta \neq 0$ معناه: $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \delta \overrightarrow{GC} = \vec{0}$	مرجح ثلاث نقط
G مركز ثقل المثلث ABC معناه G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \alpha), (C; \alpha)\}$	مركز ثقل المثلث ABC
$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}\right)$	إحداثيات مرجح نقطتين
$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \delta x_C}{\alpha + \beta + \delta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \delta y_C}{\alpha + \beta + \delta}; \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \delta z_C}{\alpha + \beta + \delta}\right)$	إحداثيات مرجح ثلاث نقط
الارتفاع $\times$ مساحة القاعدة $\times \frac{1}{2} = S$	مساحة مثلث
$V = \frac{1}{3} \times S \times h$ حيث S مساحة القاعدة (مثلث) و h الارتفاع	حجم رباعي الوجوه

$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} t \in \mathbb{R},$	التمثيل الوسيط للمستقيم (d)
$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$	التمثيل الديكارتي للمستقيم (d)
$\begin{cases} x = x_A + at + a's \\ y = y_A + bt + b's \\ z = z_A + ct + c's \end{cases} t, s \in \mathbb{R},$	التمثيل الوسيط للمستوي (P)
حيث $A(x_A; y_A; z_A)$ منه $\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ شعاعي توجيه له $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ مجموعة النقط M هو المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له $AM = BM$ مجموعة النقط M هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ $AM = AB$ مجموعة النقط M هو سطح كرة مركزها A و نصف قطرها AB $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ مجموعة النقط M هو سطح كرة التي قطرها $[AB]$ $\vec{AM} \cdot \vec{n} < 0$ أو $\vec{AM} \cdot \vec{n} > 0$ هو نصف فضاء مفتوح حده المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k$ مع $k \in \mathbb{R}^*$ هو المستوي العمودي على (AB) و الذي يشمل نقطة H حيث H المسقط العمودي لـ M على (AB)	مجموعة النقط M في الفضاء

★ الاستدلال بالتراجع ★

مبرهنة
$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي . للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي : ① نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$. ② نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.
ملاحظات
⊖ إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن : $n_0 = 0$ ، و إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $n_0 = 1$ ، وهكذا ... ⊖ يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية .

★ المتتاليات العددية ★

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
1- تعريف: (u_n) متتالية حسابية معناه: $u_{n+1} = u_n + r$	1- تعريف: (u_n) متتالية هندسية معناه: $u_{n+1} = u_n \times q$
2- الحد العام لمتتالية حسابية بدلالة الحد الأول: إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_0 + nr$ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_1 + (n-1)r$ بصفة عامة: $u_n = u_p + (n-p)r$ حيث $p \in \mathbb{N}$	2- الحد العام لمتتالية هندسية بدلالة الحد الأول: إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_0 \times q^n$ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ بصفة عامة: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حيث $p \in \mathbb{N}$
3- الوسط الحسابي: إذا كانت a, b, c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$	3- الوسط الهندسي: إذا كانت a, b, c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن: $a \times c = b^2$
4- المجموع: $S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$	4- المجموع: $S_n = \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1} \right) \times \text{الحد الأول}$
5- تقارب و تباعد متتالية حسابية: إذا $r > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ إذا $r < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ إذن المتتالية الحسابية دوماً متباعدة	5- تقارب و تباعد متتالية هندسية: إذا $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ متباعدة إذا $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ متقاربة إذا $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة)
6- اتجاه التغير: إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة	6- اتجاه التغير: إذا كان $q > 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً إذا كان $q < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة
تعريف و مبرهنات	
7- عدد الحدود: عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1	
8- متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل، متتالية محدودة: المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني: $u_n \leq A$ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني: $u_n \geq B$ المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.	
9- مبرهنات تقارب متتالية: إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة. إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.	
10- المتتاليتان المتجاورتان: تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كانت إحدهما متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.	

* الأعداد المركبة *

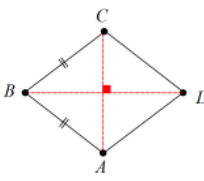
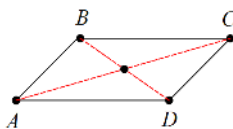
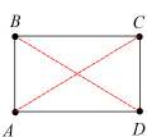
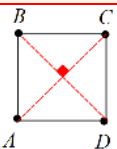
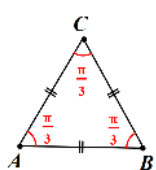
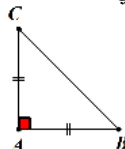
① الشكل الجبري ، الشكل المثلثي و الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم

الشكل الأسّي	الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$z = r e^{i\theta}$ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ترميز أولر: $\Rightarrow$ $\sin \theta = \frac{y}{r}$ و $\cos \theta = \frac{x}{r}$	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ $r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$: طولية z $\Rightarrow$ $\arg(z) = \theta + 2k\pi$: عمدة z مع $k \in \mathbb{Z}$	$z = x + i y$ مع $i^2 = -1$ $x = \operatorname{Re}(z)$: الجزء الحقيقي $\Rightarrow$ $y = \operatorname{Im}(z)$: الجزء التخيلي $\Rightarrow$ $\bar{z} = x - i y$: مرافق z $\Rightarrow$
خواصه	خواصه	خواصه
$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ ① $z \cdot z' = r \cdot r' e^{i(\theta+\theta')}$ ② $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$ ③ $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ ④ $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ ⑤ $z^n = r^n e^{in\theta}$ ⑥	$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$ ① $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ ② $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ ③ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ ④ $\arg(z^n) = n \arg(z)$ مع $n \in \mathbb{Z}$ ⑤	$z = 0$ إذا كان $x = 0$ و $y = 0$ ① $z = z'$ إذا كان $x = x'$ و $y = y'$ ② $z' = x' + i y'$ مع $\Rightarrow$ $z = \bar{z}$ إذا كان حقيقي ③ $z = -\bar{z}$ إذا كان تخيلي صرف ④ $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ ⑤ $z \times \bar{z} = z ^2$ ، $ z = \bar{z} $ ⑥

② توظيف الطويلة و العمدة في الهندسة

العبارة المركبة	التفسير الهندسي
$AB = z_B - z_A $	المسافة بين النقطتين A و B
$\overline{z_{AB}} = z_B - z_A$	الشعاع $\overline{AB}$
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[AB]$
$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$	G مركز ثقل المثلث ABC
$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \lambda z_C}{\alpha + \beta + \lambda}$	G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \lambda)\}$
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عدداً حقيقياً	A ، B و C على استقامة $(\overline{AB} // \overline{AC})$
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عدداً تخيلياً صرفاً	الشعاعان $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ متعامدان
$\arg(z_B - z_A)$	قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overline{OI}; \overline{AB})$
$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$	قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overline{AB}; \overline{AC})$

③ متوازي الأضلاع ، المعين ، المربع ، المستطيل والمثلثات

المعين	متوازي الأضلاع
$ABCD$ معين يعني أحد الشرطين : ① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $AB = AD$ أي: $z_B - z_A = z_D - z_A$ ② القطران متناصفان ومتعامدان أي : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ 	$ABCD$ متوازي أضلاع يعني أحد الشرطين : ① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$ ② القطران متناصفان أي: $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ 
المستطيل	المربع
$ABCD$ مستطيل يعني أحد الشرطين : ① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \pm \frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ ② القطران متناصفان ومتساويان أي: $z_A - z_C = z_B - z_D$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ 	$ABCD$ مربع يعني أحد الشرطين : ① $\overline{AB} = \overline{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $AB = AD$ أي: $z_B - z_A = z_D - z_A$ و $(\overline{AB}; \overline{AD}) = \pm \frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ ② القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي: $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ و $z_A - z_C = z_B - z_D$ 
المثلث المتقايس الأضلاع	المثلث القائم والمتساوي الساقين
ABC مثلث متقايس الأضلاع يعني أحد الشرطين : ① $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{3}$ و $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right = 1$ ② $z_A - z_B = z_A - z_C = z_B - z_C$ 	ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين يعني : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ و $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right = 1$ 

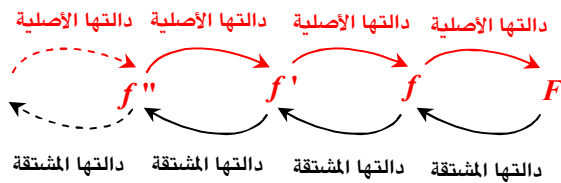
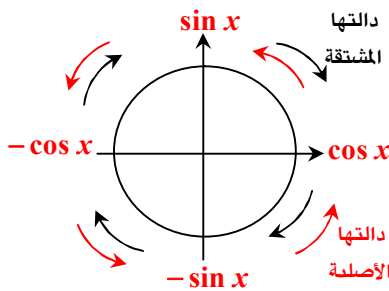
④ التحويلات النقطية في المستوي المركب

العبارة المركبة للتحويل f هي: $z' = az + b$			
a عدد مركب (غير حقيقي)		a عدد حقيقي	
$ a \neq 1$	$ a = 1$	$a \neq 1$	$a = 1$
f تشابه مباشر نسبته $k = a$ زاويته $\theta = \arg(a)$ مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$	f دوران مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ زاويته $\theta = \arg(a)$	f تحاكي نسبته $k = a$ مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$	f انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذات اللاحقة b ($b \neq 0$)
العبارة المختصر للتحويل f			
$z' - z_\omega = k e^{i\theta} (z - z_\omega)$	$z' - z_\omega = e^{i\theta} (z - z_\omega)$	$z' - z_\omega = k (z - z_\omega)$	$z' = z + b$

★ الدوال الأصلية و الحساب التكاملي ★

① الدوال الأصلية

السؤال	الجواب
1 ما هو شرط وجود دالة أصلية F للدالة f على المجال I	الشرط أن تكون الدالة f مستمرة على المجال I
2 كم عدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I	الدالة f تقبل عدد غير منتهي من الدوال الأصلية وهي : $F(x) + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$
3 أثبت أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$: $F'(x) = f(x)$
4 بين أن الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$: $F'(x) = G'(x)$



② الدوال الأصلية لدوال مألوفة

$f(x) =$	$F(x) =$	$I =$
a (a عدد حقيقي)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0; +\infty[$ أو $] -\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0; +\infty[$ أو $] -\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
e^{ax+b} ($a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$)	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$
$\ln x$	$x \ln x - x + c$	$]0; +\infty[$
$\ln(x-a)$ ($a \in \mathbb{R}$)	$(x-a) \ln(x-a) - x + c$	$]a; +\infty[$

③ الدوال الأصلية والعمليات على الدوال

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	
$(n \in \mathbb{N}^*) u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + c$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$u(x) \neq 0$

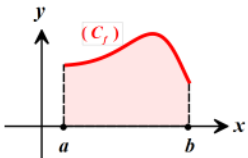
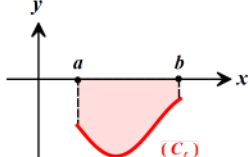
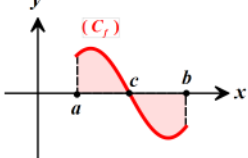
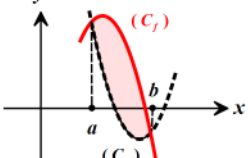
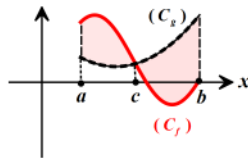
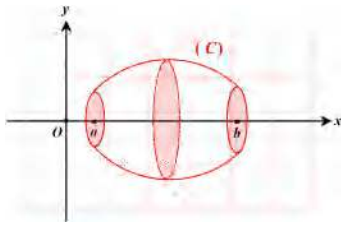
المعادلات التفاضلية

حلول المعادلة	المعادلة التفاضلية
$y = C e^{ax}$	$y' = a y$
$y = C e^{ax} - \frac{b}{a}$	$y' = a y + b$
$y = F(x) + c$	$y' = f(x)$
$y = F(x) + c_1 x + c_2$	$y'' = f'(x)$
$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$	$y'' = -\omega^2 y$

⑤ الحساب التكاملي

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	التكامل المحدود
$\int f(x) dx = F(x) + k$	التكامل الغير محدود
$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$	علاقة شال
$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$	المكاملة بالتجزئة
$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$	القيمة المتوسطة على مجال

⑥ حساب المساحات و الحجوم

المساحات S	التمثيل البياني لها
$S = \int_a^b f(x) dx$	
$S = \int_a^b -f(x) dx$	
$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx$	
$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$	
$S = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$	
الحجوم V	التمثيل البياني لها
حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$	

ملاحظة هامة: كل المساحات يجب أن تضرب في الوحدة ua حيث: $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

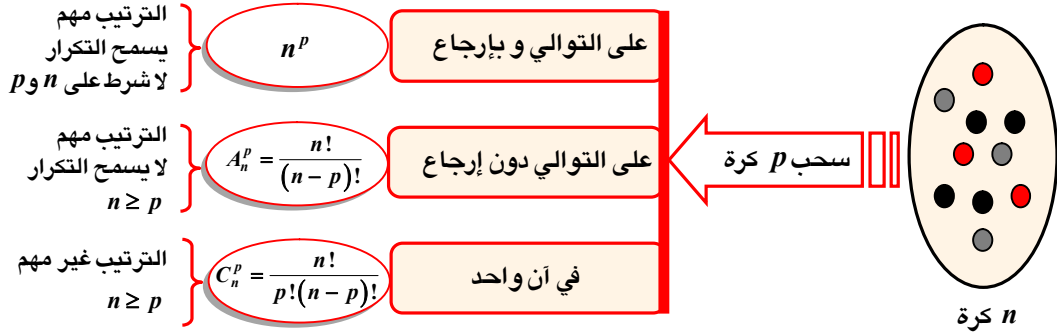
★ الاحتمالات ★

$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكليّة)}}$	احتمال الحادثة A
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	احتمال الحادثة العكسية $\bar{A}$
$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	الاحتمال الشرطي (A علماً بـ B)
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	الحوادث المستقلة

① أنواع السحب

توجد ثلاث أنواع من السحب وهي :

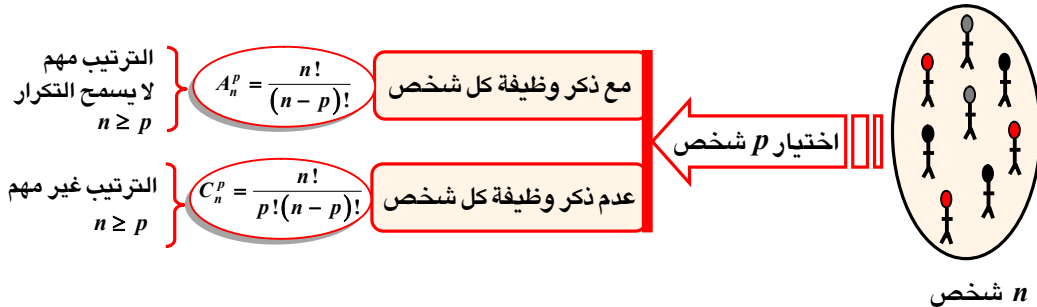
- ① السحب في آن واحد
 - ② السحب على التوالي و بإرجاع
 - ③ السحب على التوالي و بدون إرجاع
- ما هو عدد طرق لسحب p كرة من كيس يحتوي على n كرة ($n \geq 2$) ؟



② اللجان (الجمعيات)

عند تكوين لجنة معينة أو جمعية من عدة أشخاص ، يجب معرفة أمرين أساسيان ، هما :

- ① ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة
 - ② عدم ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة .
- ما هو عدد طرق لتكوين لجنة تتألف من p شخص من بين مجموعة ذات n شخص مع ($n \geq 2$) ؟



③ عدد طرق لإجراء تجربة

عند إجراء تجربة معينة بـ n_1 طريقة (إمكانية) و تجربة أخرى بـ n_2 طريقة (إمكانية) فإن :

- ① عدد طرق إجراء التجربتين معاً (التجربة الأولى و الثانية) هو الجداء : $n_1 \times n_2$.
- ② عدد طرق إجراء إحدى التجربتين فقط (التجربة الأولى أو الثانية) هو المجموع : $n_1 + n_2$.

★ الموافقات - الأعداد الأولية ★

① الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف	نقول أن العددين الصحيحين a, b متوافقان بترديد n (طبيعي) إذا وفقط إذا كان $a - b$ من مضاعفات n في $\mathbb{Z}$ ونكتب $a \equiv b [n]$ و يقرأ a يوافق b بترديد n .
خواص	• إذا كان: $a \equiv b [n]$ و $b \equiv c [n]$ فإن: $a \equiv c [n]$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ و $c \equiv d [n]$ فإن: $a \pm c \equiv b \pm d [n]$ و $a \times c \equiv b \times d [n]$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ فإن: $a + k \equiv b + k [n]$ و $k \times a \equiv k \times b [n]$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ فإن: $a^p \equiv b^p [n]$ حيث $p \in \mathbb{N}$. • إذا كان: $a \equiv b [n]$ فإن: $a + k n \equiv b + k n [n]$ و $a \equiv b + k n [n]$. • إذا كان: $a \equiv 0 [n \times m]$ فإن: $a \equiv 0 [n]$ و $a \equiv 0 [m]$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$ و أولي مع n. • إذا كان: $a \times b \equiv 0 [n]$ فإن: $a \equiv 0 [n]$ أو $b \equiv 0 [n]$ مع n عدد أولي.

② القاسم المشترك الأكبر PGCD و المضاعف المشترك الأصغر PPCM

خواص	• $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$ حيث $a \geq b$ و r باقي قسمة a على b. • $PGCD(k a; k b) = k \times PGCD(a; b)$ حيث: $k \in \mathbb{Z}^*$. • $PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$ • إذا كان: $PGCD(a; b) = d$ فإن: $(d \mid a \text{ و } d \mid b)$ و أيضاً: $\begin{cases} a = d a' \\ b = d b' \end{cases}$ مع $PGCD(a'; b') = 1$ • $PGCD(k a; k b) = k PGCD(a; b)$ مع $k \in \mathbb{Z}^*$. • إذا كان: $PGCD(a; b) = 1$ فإن: $PGCD(a; b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. • إذا كان: $PGCD(a; b) = 1$ فإن: $PGCD(a^n; b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. • إذا كان: $PGCD(a; b) = 1$ و $PGCD(a; c) = 1$ فإن: $PGCD(a; b c) = 1$.
------	---

③ مبرهنة بيزو

يكون العدداً الطبيعيان غير المعدومين a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عدداً صحيحان x و y حيث: $a x + b y = 1$

④ مبرهنة غوص

a, b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة، إذا كان a يقسم الجداء $b c$ و كان a أولياً مع b ، فإن a يقسم c .

⑤ المبرهنة الصغيرة لفيثاغورس

إذا كان p عدداً أولياً و a عدداً طبيعياً لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $(a^{p-1} - 1)$