

5min Maths مجلة

يقدم لكم ...

بكالوريا 2021

الأستاذ شعبان أسامة
CHABANE Oussama



الدوال

العددية

سبعة أسير و اقتصاد

"سنحقق كلا أحلامك إذا كنت مثلك

الشجاعة لمطاردها

والث ديزن

1. ملخص الدرس

2. تمارين البكالوريا 2008-2019

3. تمارين مقترحة

اصدار 2021 تلمسان 0775737163



5min maths

www.dzexams.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اليك أمها الطالب " مجلة 5min Maths " للسنة الثالثة ثانوي لشعبة تسيير و اقتصاد لمحور

الدوال العددية

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصص مساعديك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد وربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج والأهداف واحدة , في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك ويهديك الى سبيل الخير

الأستاذ شعبة أسامة

”

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلي الكريمة أولا



و ثانيا لجميع تلاميذي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر



مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة
بتاريخ: 2019/09/13



تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس

2. تمارين البكالوريا 2008-2019

3. تمارين مقترحة

#5min  Maths

1. ملخص الدرس

1 تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وليكن (C) منحنيا البياني في معلم $(O; I, J)$. نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحنيا (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر.

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

2 مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$.

بصيغة أخرى: إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b .

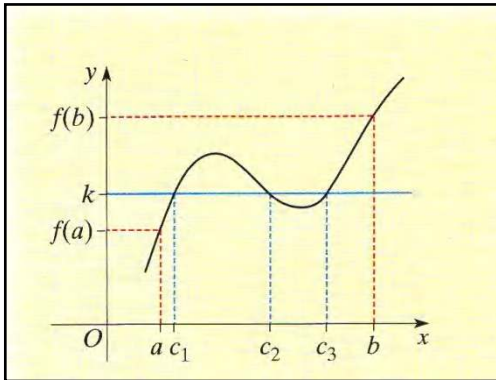
ملاحظة مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

التفسير البياني

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$ وليكن (C)

منحنيا البياني في معلم $(O; I, J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b . (بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1, c_2 و c_3).



3 نهايات الدوال المرجعية

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} &= +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty * \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 &= -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 &= +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 &= +\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 &= +\infty * \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty * & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 * & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0 * \end{aligned}$$

4 العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$.

• **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

• **نهاية جداء دالتين:**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

• **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

- ملاحظة** | تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات **"عدم التعيين"** (ح ع ت)
- يوجد أربع حالات عدم التعيين: $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، $0 \times (\pm\infty)$ و $\pm\infty \mp \infty$
- قاعدة** |
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.
 - النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

5 **المستقيمات المقاربة**

a و b عدنان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O; I, J)$.

التمثيل البياني	المستقيم المقارب	النهاية
	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = a$ والموازي لمحور الترتيب مستقيم مقارب للمنحني (C)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
	المستقيم (D) ذو المعادلة $y = b$ والموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

	المستقيم (d) ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
--	---	---

ملاحظة إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f .

6 الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x) - (ax + b)]$.

إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.

إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.

7 الدالة مركب

الدالة مركب دالتين

تعريف: v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I ، $u(x) \in J$.

الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $v \circ u$ والمعرفة على I

ب: $(v \circ u)(x) = v[u(x)]$. ونقرأ v دائرة u لـ x .

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x) = 2x^2 - 3$ و $v(x) = -3x + 1$

* الدالة $v \circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $v \circ u(x) = v[u(x)] = v(2x^2 - 3) = -6x^2 + 10$

* الدالة $u \circ v$ معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $u \circ v(x) = u[v(x)] = u(-3x + 1) = 18x^2 - 12x - 1$

مثال:

النهاية دالة مركب دالتين

a, b, c و تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u, v و f دوال حيث $f = v \circ u$.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}$ و نريد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ و $v(x) = \sqrt{x}$ ($f = v \circ u$)

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$

8 النهايات بالمقارنة

f, g و h دوال و l عدد حقيقي.

* إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

* إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \geq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

* إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

👉 ملاحظة | نمدد هذه الخواص إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي.

9 العدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و a و $a+h$ عدداً حقيقيين من I مع $h \neq 0$.
القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى 0 النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تؤول إلى عدد حقيقي نرمز له بالرمز $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a .

👉 ملاحظة | إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و نسمى الدالة $f': x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

التفسير البياني

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماساً معامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

👉 معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة a هي: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

التفسير الاقتصادي

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية. تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:
 $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية " نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد لـ $C_m(q)$ في الاقتصاد نضع $C_m(q) = C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C .

10 مشتقة الدالة مركب

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وقبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا: $(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$

1 1 المشتقة و اتجاه التغيرات

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي

تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماماً على I .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي

تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماماً على I .

* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

1 2 القيم الحدية المحلية

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x

من J ، $f(x) \leq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x

من J ، $f(x) \geq f(x_0)$.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

3 1 نقطة انعطاف

يمكن تعيين نقطة الانعطاف من خلال احدى الطرق التالية:

1. المماس (T) يخرق المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 . (بيانيا)

2. الدالة المشتقة f' تتعدم عند x_0 و لا تغير من اشارتها. (حسابيا)

3. المشتقة الثانية f'' تتعدم عند x_0 و تغير من اشارتها. (حسابيا)

4 1 مركز تناظر

لايثبات أن النقطة $\omega(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x) + f(a+x) = 2b$.

المقاربة 2:

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

المقاربة 3: تغير المعلم $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i}; \vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة فردية

5 1 محور تناظر

لايثبات أنالمستقيم $x = a$: (Δ) محور تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x) = f(a+x)$.

المقاربة 2:

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x) = f(x)$.

المقاربة 3:

تغير المعلم $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i}; \vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة زوجية

6 1 المناقشة البيانية

أنواع المناقشة البيانية: أفقية، مائلة ودورانية.

ليكن m عدد حقيقي. f دالة معرفة على I و (C) تمثيلها البياني في معام متعامد و متجانس.

1 المناقشة البيانية الأفقية: لها أشكال مختلفة منها: $f(x) = m$ ،

$$f(x) = m^2, f(x) = m-1, f(x) = m+1, f(x) = -m$$

$$f(x) = f(m), f(x) = -|m|, f(x) = |m|$$

مثال: لتكن الدالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و (C_f) تمثيلها موضح في

الشكل المقابل:

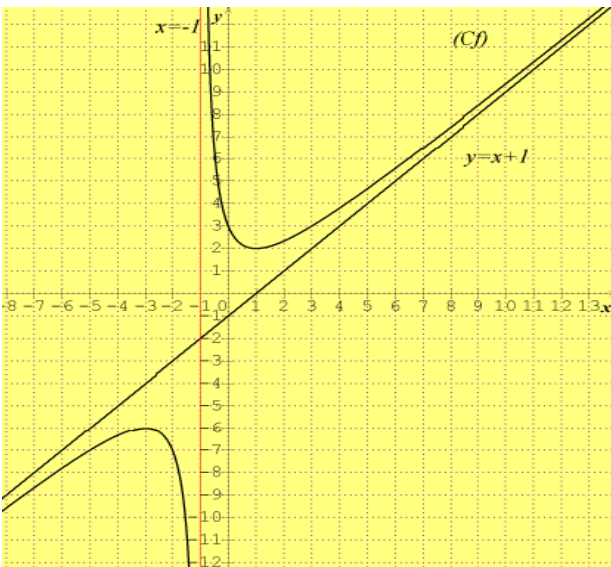
حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع

المستقيم ذو المعادلة: $y = m$ وعليه:

- للمعادلة حلين مختلفين من أجل: $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$.

- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m = -6$ أو $m = 2$.

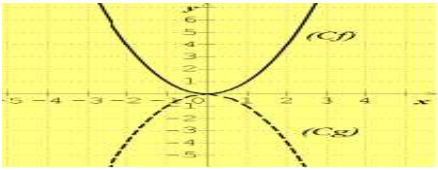
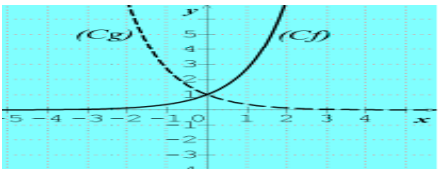
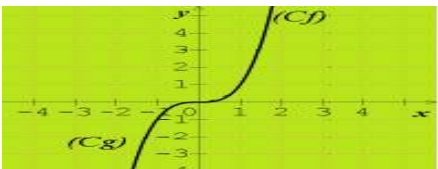
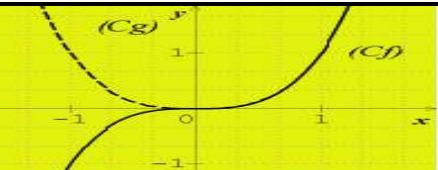
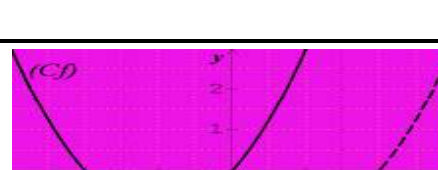
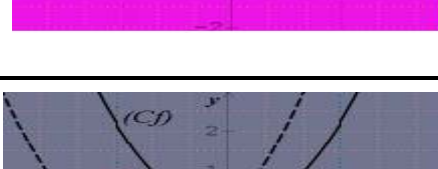
- ليس للمعادلة حلول من أجل: $m \in]-6; 2[$.

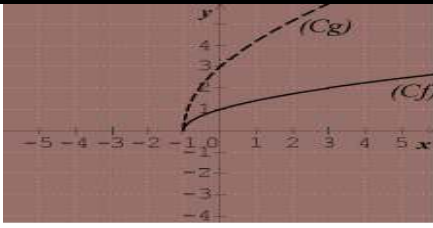


6 1 استنتاج تمثيل بياني انطلاقا من تمثيل بياني آخر

f و g دالتان معرفتان على I و (C_f) و (C_g) تمثيلهما البياني على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$.

$$k \in \mathbb{R}^*, a, b \in \mathbb{R}$$

التمثيل البياني	مثال تطبيقي	التفسير الهندسي	الحالات الممكنة
	$f(x) = x^2$ $g(x) = -x^2$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.	$g(x) = -f(x)$
	$f(x) = e^x$ $g(x) = e^{-x}$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.	$g(x) = f(-x)$
	$f(x) = x^3$ $g(x) = -(-x)^3$	(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة الى مبدأ المعلم O	$g(x) = -f(-x)$
	$f(x) = x^3$ $g(x) = x^3 $	(C_g) ينطبق على لما يقع فوق محور الفواصل. (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يقع تحت محور الفواصل.	$g(x) = f(x) $
	$f(x) = \ln(x)$ $g(x) = \ln(x)$	دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما x موجب	$g(x) = f(x)$
	$f(x) = (x+1)^2 - 1$ $g(x) = (- x +1)^2 - 1$	دالة زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما سالب.	$g(x) = f(- x)$
	$f(x) = x^2$ $g(x) = (x+1)^2 - 1$ $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u} = -a\vec{i} + b\vec{j}$ ، أي: $\vec{u} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$	$g(x) = f(x+a) + b$



$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$g(x) = 3\sqrt{x+1}$$

لتكن $M(x, y) \in (C_f)$ تكافئ:
 $M'(kx, ky) \in (C_g)$

$$g(x) = k.f(x)$$

لتكن f هي الدالة العددية المعرفة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	--	--	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$

تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية.

1. احسب $f'(x)$.

2. اعتمادا على جدول التغيرات الدالة :

أ- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

ب- عين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج- قارن بين صورتين العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بدلالة الدالة f معللا اجابتك.

3. نأخذ: $a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = \frac{1}{4}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ- بين أنه عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فان المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y = x + 1$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1; 2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C) .

د- عين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

4. λ عدد حقيقي ، عين بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي λ عدد حلول المعادلة: $f(x) = |\lambda|$.

2.

تمارين الدوال

العددية

بكالوريا

2019-2008

x	$+\infty$	1	$-\infty$
$f(x) - y$	--		+
الوضعية	(Δ) فوق (C)		(Δ) تحت (C)

ج- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر المنحنى (C):

طريقة سحب المحاور.

$$y = f(x) \text{ ولدينا: } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases} \text{ نضع:}$$

$$Y + 2 = f(X + 1) \text{ ومنه:}$$

$$Y = f(X + 1) - 2 = X + \frac{1}{4X} \text{ أي:}$$

$$\text{بوضع: } g(X) = X + \frac{1}{4X} \text{ نجد } g \text{ دالة فردية}$$

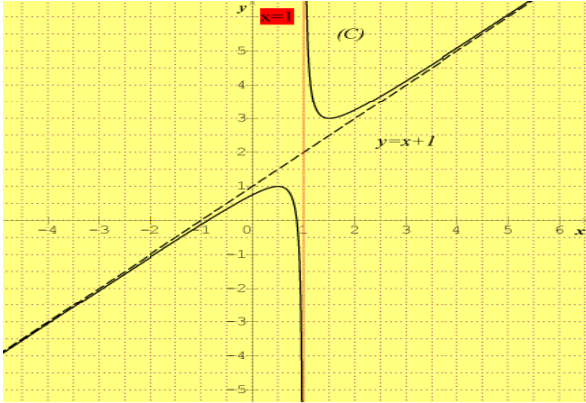
$$\text{لأن: } g(-X) = -g(X)$$

وبالتالي: النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

د- تعين نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \text{ و } f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, f(0) = \frac{3}{4}$$

الرسم:



4. المناقشة البيانية:

$$\lambda \in]-1;1[\text{ للمعادلة حلان.}$$

$$\lambda = -1 \text{ أو } \lambda = 1 \text{ للمعادلة حل مضاعف.}$$

$$\lambda \in]1;3[\cup]-3;-1[\text{ لا توجد حلول للمعادلة.}$$

حل مقترح

1. احسب $f'(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على حيث:

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. أ- ايجاد a, b, c :

باستعمال جدول التغيرات دالة f :

$$\begin{cases} a - 4c = 0 \\ \frac{1}{2}a + b - 2c = 1 \\ \frac{1}{2}a + b + 2c = 3 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي: } a = 1, b = 1, c = \frac{1}{4}$$

ب- حساب

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

ومنه: نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة: $x = -1$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

و $-\infty$ يوازي محور الترتيب.

ج- المقارنة:

$$\text{لدينا: } f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{4}\right) \text{ لأن: } \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \text{ و } f \text{ متناقصة على } \left[\frac{1}{2};1\right].$$

3. أ- المستقيم المقارب المائل:

$$\text{لدينا: } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[x + 1 + \frac{1}{4(x+1)} - (x+1) \right]$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4(x+1)} \right] = 0$$

وبالتالي: عندما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ فان المنحنى (C) يقبل

مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y = x + 1$.

ب- الوضعية:

$$\text{لدينا: } f(x) - y = \frac{1}{4(x+1)}$$

f دالة عددية معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني و جدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	2

أجب ب: خطأ أو صحيح على كل سؤال مما يلي مع تبرير الاجابة:

1. المستقيم الذى معادلته $y = 2$ مقارب للمنحنى (C_f) .

2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.

3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي :

$$S =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

4. في المجال $]-\infty; -1[$ يكون $f(-2) > f(x)$ عندما يكون $x < -2$.

5. النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي الى المنحنى (C_f) .

6. الدالة f زوجية.

حل مقترح

1. صحيح

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

2. خطأ

لأن : من جدول التغيرات نلاحظ أن .

3. صحيح

لأن لدينا : $f(x) > 2$ من أجل كل x من D_f وبالتالي $f(x) > 0$ لما $x \in D_f$.

4. صحيح

لأن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1[$ وبالتالي من أجل

$$x < -2 \text{ نجد : } f(x) < f(-2) \text{ أي : } f(-2) > f(x)$$

5. خطأ

$\lambda = -3$ أو $\lambda = 3$ للمعادلة حل مضاعف.

$\lambda \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ للمعادلة حلان.

$f(-3) \neq 1$ ومنه: النقطة $A(-3;1)$ لا تنتمي الى المنحنى (C_f) .

6. خطأ

لأن لدينا: $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ نلاحظ أن D_f غير متناظر بالنسبة للمبدأ O ، أي: $-1 \notin D_f$ ولكن $1 \in D_f$.

الدالة العددية f معرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

يرمز (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس .

I. 1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1} : \mathbb{R} - \{-1\}$$

2. احسب نهايات f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب يطلب تعيين معادلته.

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

II. 1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فان:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} , \text{ و } f' \text{ هي الدالة المشتقة للدالة } f .$$

2. عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها وشكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

III. 1. بين أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. أرسم كلا من (D) ، (Δ) و (C_f) .

3. عين بيانا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة: $f(x) = m$ حلان مختلفان.

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = e^2 - 1$.

5. دراسة الوضعية ل (C_f) و (Δ) .

$$\text{لدينا: } \frac{4}{x+1} f(x) - y = [f(x) - (x-1)]$$

$$\text{ندرس اشارة } \frac{4}{x+1} \text{ نجد:}$$

لما $x < -1$ المنحنى (C_f) تحت (Δ) .

ولما $x > -1$ المنحنى (C_f) فوق (Δ) .

1.(II) المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\text{لدينا: } f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2}$$

$$\text{ذكّر: } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = \frac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

2. تعيين اتجاه تغير الدالة f .

* اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط (لأن المقام موجب تماما على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و هي:

$$(x-1)(x+3) = 0 \text{ معناه: } (x-1) = 0 \text{ أو } (x+3) = 0 \text{ أي: } x = 1 \text{ أو } x = -3$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$(x-1)(x+3)$		+	0	--

و عليه: f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

و متناقصة تماما على المجال: $]-3; -1[\cup]-1; 1]$

(لأن: $-1 \notin D_f$)

* جدول تغيرات:

1.(I) تعين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$\text{لدينا: من أجل كل } x \in \mathbb{R} - \{-1\} : f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2 + (a+b)x + (b+c)}{x+1}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ b+c = 3 \end{cases}$$

2. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{4}{x+1} = +\infty$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\text{وبالتالي: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{4}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1} = -\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x - 1 + \frac{4}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - 1 + \frac{4}{x+1} = +\infty$$

3. بما أن: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ فإن المنحنى

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب معادلته: $x = -1$.

4. المستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

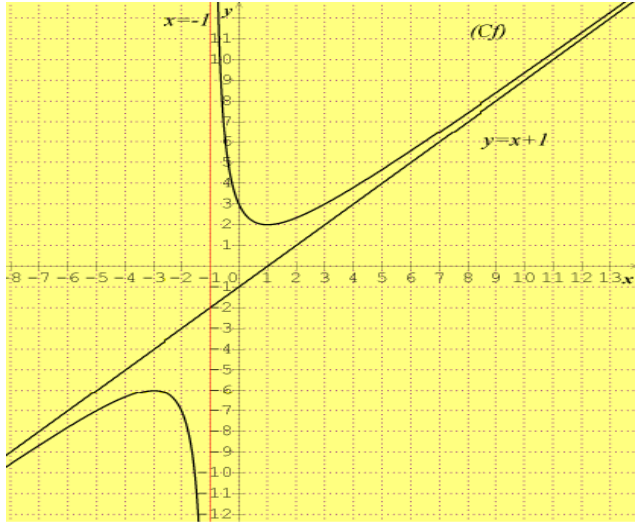
$$\text{لدينا: } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1)$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

ومنه: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

و بالتالي : النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. رسم (D) ، (Δ) ، و (C_f) .



حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $y = m$ وعليه:

- للمعادلة حلين مختلفين من أجل: $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$.

- للمعادلة حل مضاعف من أجل: $m = -6$ أو $m = 2$.

- ليس للمعادلة حلول من أجل: $m \in]-6; 2[$.

4. حساب المساحة:

$$S = \int_1^{e^2-1} [f(x) - (x-1)] dx = \int_1^{e^2-1} \frac{4}{x+1} dx = [4 \ln(x+1)]_1^{e^2-1} ua.$$

$$S = 4(\ln e^2 - \ln 2) ua = (8 - 4 \ln 2) ua \text{ ومنه:}$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$--$	$--$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-6	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(1) = 2 \text{ و } f(-3) = -6$$

3. معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0:

تكتب من الشكل: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ حيث: $f(0) = 3$

$$\text{و } f'(0) = -3 \text{ اذن: } y = -3x + 3.$$

III. 1. تبين أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

الطريقة 1:

لذكير: $A(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) معناه: من أجل كل x ، $2\alpha - x$ من D_f ، لدينا: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$.

$$\text{لدينا: } \alpha = -1 \text{ و } \beta = -2 \text{ وبالتالي:}$$

$$f(-2-x) = -2-x-1 + \frac{4}{-2-x+1} :$$

$$\text{ومنه: } f(-2-x) = -x-3 + \frac{4}{-x-1} = -x-3 - \frac{4}{x+1}$$

$$\text{و } f(-2-x) + f(x) = -4 \text{ أي:}$$

$$f(2(-1)-x) + f(x) = 2(-2)$$

و بالتالي النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

الطريقة 2: سحب المحاور.

$$\text{نضع: } \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 2 \end{cases} \text{ و لدينا: } y = f(x)$$

$$\text{و منه: } Y - 2 = f(X - 1)$$

$$\text{أي: } Y = f(X - 1) + 2 = X + \frac{4}{X}$$

$$\text{بوضع: } g(X) = X + \frac{4}{X} \text{ نجد دالة فردية}$$

$$\text{لأن: } g(-X) = -g(X)$$

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فان: $f(x) = x - 5 + \frac{\alpha}{x^2}$ ، حيث α عدد حقيقي يطلب تعيينه

2. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فان:

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2}$$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يطلب تعيين معدلتهما..

5. أوجد معادلة ل (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

6. أرسم (Δ) والمنحنى (C_f) .

7. أ- عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(2) = -10$.

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور

الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$$

1. تعيين α :

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^3(x-5) + 4}{x^3}$$

أي: $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2}$ وبالتالي: $\alpha = 5$.

2. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 5 + \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 5 + \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 5 + \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$$

3. أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 1 - \frac{8x}{x^4} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 2x + 4)}{x^3} \text{ لأن:}$$

$$(x-2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 - 8$$

لدينا: $x^2 + 2x + 4$ مميزه: $\Delta = -12$ ومنه: $x^2 + 2x + 4 > 0$ و

بالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة: $\frac{x-2}{x^3}$ وبالتالي:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	--	0

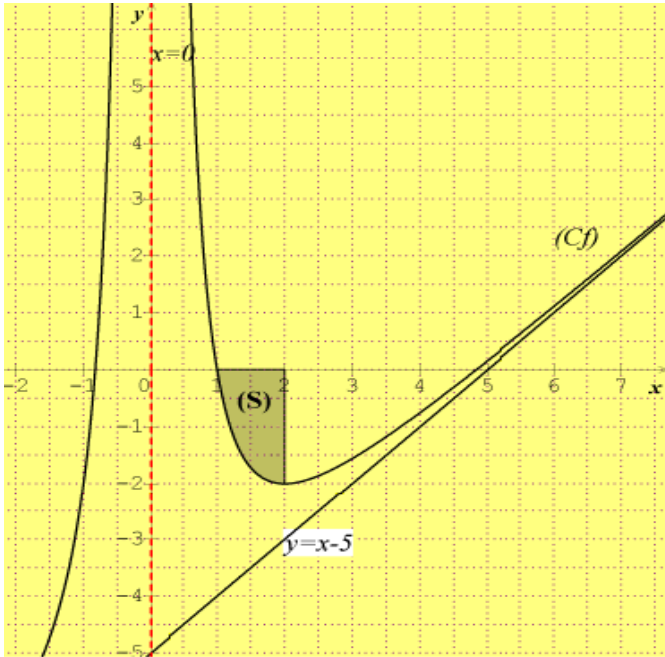
f متزايدة تماما على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$

متناقصة تماما على $]0; 2[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f .

$$S = \int_1^2 -f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx$$

$$S = \frac{3}{2}ua \text{ ومنه: } S = F(1) - F(2) \text{ وبالتالي: } S = \frac{3}{2}ua$$



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	--	0	+
$f(x)$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$	-2	$+\infty$

4. المستقيمين المقاربين:

بما أن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ فان: $x=0$ معادلة مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب.

$$\text{ونلاحظ أن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x^2} \right) = 0$$

ومنه: $y = x-5$ معادلة مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

5. معادلة المماس (Δ) :

$$\text{المعادلة هي: } y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{حيث: } f'(1) = -7 \text{ و } f(1) = 0$$

وبالتالي: معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = -7x + 7$.

6. رسم (Δ) والمنحنى (C_f) . (أنظر أسفله)

7. أتعين الدالة الأصلية F للدالة f :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - 4\frac{1}{x} + c \text{ , حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

$$\text{لدينا } F \text{ تحقق: } F(2) = -10 \text{ معناه: } c = 0$$

$$\text{اذن: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - 4\frac{1}{x}$$

ب-المساحة:

لذكير: * اذا كانت f الدالة سالبة على المجال $[a; b]$ و S المساحة المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيمان: $x=a$, $x=b$ و

$$y=0 \text{ فان: } S = \int_a^b -f(x)dx$$

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx \quad *$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{بالعبارة:}$$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الوحدة 1cm على محور الفواصل و 4cm على محور الترتيب.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$.

2. احسب نهاية الدالة $+\infty$ عند وعند $-\infty$ ، واستنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلة له.

3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

4. احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(-x) = 2 - f(x)$ و استنتج أن (C) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

6. أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C).

$$1.7\text{-أ} \quad \text{احسب التكامل:} \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

ب- احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوى المحدد بالمنحنى و محور الفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$ و $x = 1$.

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{بالعبارة:}$$

1. التبيان :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$= 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\text{و بالتالي: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

اذن: $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و $-\infty$ ، يوازي محور الفواصل.

3. الوضعية:

$$\text{لدينا: } f(x) - y = \frac{-x}{x^2 + 1} \quad \text{اشارة الفرق } f(x) - y \text{ هي من اشارة: } -x \text{ معناه:}$$

لما $x < 0$ المنحنى (C) فوق (Δ) .

ولما $x > 0$ المنحنى (C) تحت (Δ) .

في النقطة $A(0,1)$ المنحنى (C) يقطع (Δ) .

4. حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-1(x^2 + 1) + x(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

*اشارة $f'(x)$ من اشارة: $x^2 - 1$.

أ.7- حساب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

ب-المساحة:

$$S = 4 \cdot \int_0^1 f(x) dx = 4cm^2 \times \left(\int_0^1 1 - \frac{x}{x^2+1} dx \right) cm^2$$

$$S = 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) cm^2 \text{ ومنه:}$$

$$S = (4 - 2 \ln 2) cm^2 \text{ أي:}$$

ومنه: $x^2 - 1 = 0$ أي: $(x-1)(x+1) = 0$ إذن: $x = 1$ أو $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x-1)(x+1)$		+	0	--

وعليه: f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال: $[-1; 1]$.

*جدول تغيرات:

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	--
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

5. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

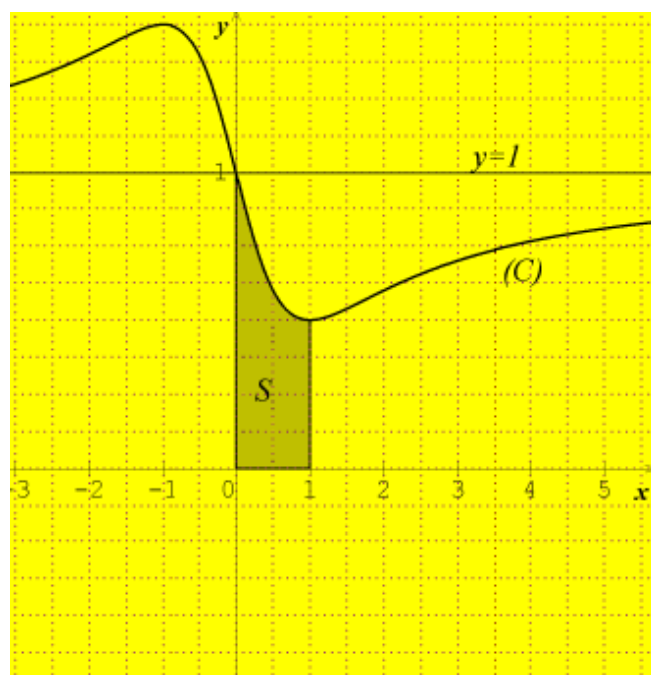
$$2 - f(x) = 2 - 1 + \frac{x}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1}$$

$$= f(-x)$$

نستنتج أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر (C) .

ملاحظة: بما أن $\Omega(0;1) \in (C)$ فإن Ω نقطة انعطاف أيضا.

6. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C) .



f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كمايلي :

1. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

2. أ- المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x^2+1)^2 - 57600}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+x)^2 - 57600}{(x+1)^2} \text{ ومنه :}$$

ب- اتجاه التغير:

نلاحظ أن:

$$(x^2+x)^2 - 57600 = (x^2+x-240)(x^2+x+240)$$

لدينا من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $x^2+x+240 > 0$ ، ومنه : إشارة $f'(x)$ من إشارة: $x^2+x-240$.

نجد: $\Delta = 961$ وبالتالي: يوجد حلان هما: 15 و -16

(16-) حل مرفوض لأنه لا ينتهي الى مجموعة تعريف

(الدالة f).

x	-1	15	$+\infty$
$x^2+x-240$	--	0	+

ومنه: متزايدة تماما على $[15; +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-1; 15]$.

*جدول تغيرات:

x	-1	15	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	+
$f(x)$	$+\infty$	4825	$+\infty$

f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعبرة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$$

1. احسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- جد الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=0$.

3. تنتج احدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و 200 آلة على الأكثر. نمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة اضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f أي : من أجل كل x من المجال $[5; 200]$ ، $C_m(x) = f(x)$.

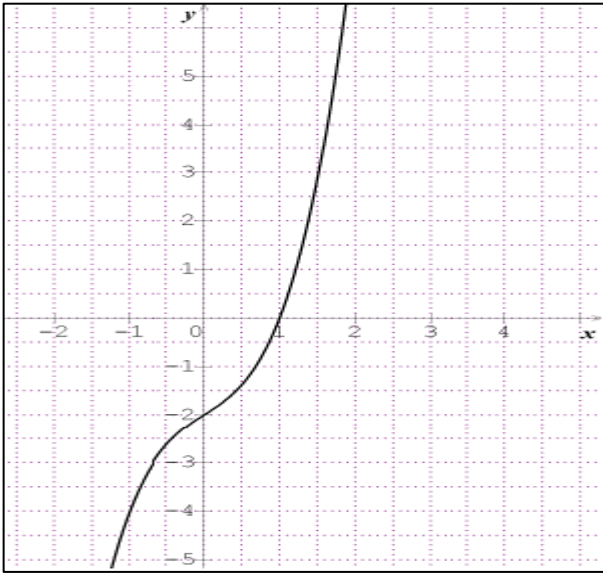
أ- ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون التكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟.

ب- نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج آلة ونذكر

$$C'(x) = C_m(x) \text{ أن :}$$

جد عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$ ، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000 ، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 + x - 2$ و تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .



بقراءة بيانية عين $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x - \frac{1-x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(1) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

(2) يبين أنه من أجل كل x غير معدوم : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(3) أ - يبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(4) يبين أن المعادلة $f(\alpha) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1, 4; -1, 3[$.

(5) أرسم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

(6) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين التي معادلاتها : $y = x$ ، $x = 1$ و $x = 3$.

ج- الدالة الأصلية H للدالة $h : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$:

لدينا : $H(x) = \int h(x)dx = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) + c$

حيث c عدد حقيقي .

نعلم أن H تنعدم من أجل $x = 0$ أي : $H(0) = 0$

وبالتالي : $c = 0$.

3. أ- عدد الآلات

الكلية الهامشية أقل ما يمكن أي نبحت عن القيمة الحدية الصغرى للدالة f .

من جدول التغيرات نجد أن f لها قيمة الحدية الصغرى تبلغها من أجل : $x = 15$.

وبالتالي عدد الآلات هو 15 .

ب- الكلفة الإجمالية

نعلم أن : $C'(x) = C_m(x)$ ومنه : C هي الدالة الأصلية للدالة f لأن :

$$C_m(x) = f(x)$$

أذن : $C(x) = \int f(x)dx = \int f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100x + \frac{57600}{x+1} dx$

أي : $C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln(x+1) + k$.

حيث : k عدد حقيقي .

علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000 يعني :

$$C(5) = 4000 \text{ ومنه : } k = \frac{473375}{12} - 57600 \ln 6$$

وبالتالي :

عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$ هي :

$$C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}$$

استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى :

$$C(15) = 101662,43 \text{ DA}$$

حل مقترح

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 + x - 2$

3.أ - تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\text{لدينا : } f(x) - y = f(x) - x = -\frac{x-1}{x^2} = \frac{-x+1}{x^2}$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x+1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0 \quad \text{و}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

ب - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

: $-x+1$ من إشارة $f(x) - x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	○	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

4. تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4; -1,3[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و

$$\begin{cases} f(-1.4) = -0,17 \\ f(-1.3) = 0,06 \end{cases} \quad \text{و} \quad]-1,4; -1,3[\subset]-\infty; 0[$$

أي $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، بحيث

$$-1.4 < \alpha < -1.3$$

5. الرسم :

$$\bullet g(1) = 0$$

• إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

انطلاقا من التمثيل البياني المعطى نلخص جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$

أ -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

ب -

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2} \right) = +\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

(2) تبيان أنه من أجل كل x غير معدوم: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل x غير

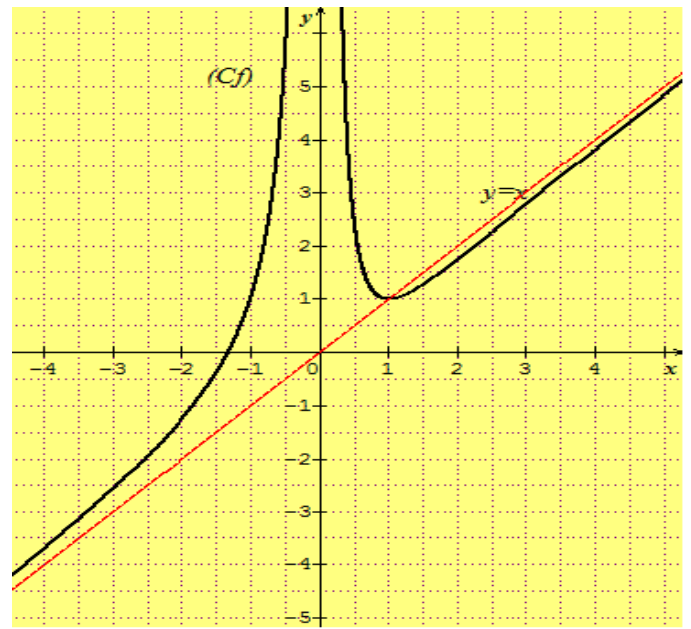
معدوم :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1 \times x^2 - 2x(x-1)}{(x^2)^2} \\ &= 1 - \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = 1 - \frac{-x^2 + 2x}{x^4} \\ &= \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(x^3 + x - 2)}{x^4} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

- إتجاه تغير الدالة f :

لندرس إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		- ○ +	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$



(1) حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = x$.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^3 (x - f(x)) dx \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{x-1}{x^2} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{x} \right]_1^3 \\
 &= \ln 3 + \frac{1}{3} - 1 = \ln 3 - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

3. تمارين مقترحة

1.

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
1. أحسب النهايات للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
 2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f(x) = (x+1)(x-1)^2$.
 4. عين نقط تقاطع (C_f) مع حامي محوري الإحداثيات.
 5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثيها.
 6. عين معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
 7. أنشئ (C_f) و (T) في نفس المعلم.

2.

1. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.
1. أدرس تغيرات g على $\mathbb{R}$.
 2. أ- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .
ب- احسب $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(1)$ ثم أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1} .
 3. عين حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.
2. f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$.
1. برهن أنه من أجل كل x عدد حقيقي غير معدوم إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

2. أدرس تغيرات دالة f .

3. برهن أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$ واستنتج حصر ل $f(\alpha)$.

4. نسي (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 3cm)

لتكن I نقطة من (C) فاصلتها -1 و J نقطة من (C) فاصلتها 1

أ-تحقق أن المستقيم مماس ل (C) عند J .

ب-عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند I ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لهذا المماس.

ج-أرسم (C) (نأخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة تقريبية للعدد α).

3.

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$

1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. عين الأعداد الحقيقية a, b, c و d بحيث من أجل كل x من D_f : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$.

3. استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نسميه (Δ) .

4. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5. بين أن المنحنى (C_f) يقطع (xx') في نقطة فاصلتها α يطلب تعيين حصر ل α سعته 10^{-1} .

6. أنشئ (C_f) .

7. نضع : $g(x) = \frac{|x|^3 + 3|x|^2 + 6|x| + 3}{(|x|+1)^2}$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

أ- أثبت أن g دالة زوجية ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

ب- اشرح كيف نستطيع أن ننشئ (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) ثم انشئ (C_g) في نفس المعلم السابق.

الدالة f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة ب: $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 14}{(x+3)^2}$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من D_f : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+3)^2}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$.

2. احسب النهايات ل f على D_f . ماذا تستنتج بيانيا؟

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على D_f ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. احسب $f(-3, 9)$ و $f(-3, 8)$ ، ماذا تستنتج ؟

5. عين نقط من (C) يكون المماس عندها موازي للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = \frac{7}{8}x + 2$.

6. أرسم (C).

7. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = \frac{|x|^3 + 4|x|^2 - 3|x| - 14}{(|x|+3)^2}$ ، و (C') تمثيلها البياني.

أ- أثبت أن g دالة زوجية، ماذا تستنتج بيانيا؟

ب- أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ج- أرسم (C').

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; -1\}$ ب $f(x) = \frac{3x^2 + 9x + 7}{x^2 + 3x + 2}$

(C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة $1cm$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\}$: $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C).

4) D مستقيم معادلته $y = 3$. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى D .

(4) احسب $f'(x)$ واستنتج تغيرات الدالة f .

- شكل جدول تغيرات f .

(5) بين أنه من أجل كل $\mathbb{R} - \{-2; -1\}$: $f(-3-x) = f(x)$. ماذا يمكن أن تستنتج؟

(6) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل.

(7) أنشئ المنحني (C) والمستقيمات المقاربة.

(8) U متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$:

احسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

6.

تكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب

إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول التغيرات.

(2) أ) عين الأعداد الحقيقية a, b, c و d بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$

ب) استنتج أن C_f يقبل المستقيم D الذي معادلته $y = x - 2$ كمستقيم مقارب.

ج) حدد وضعية C_f بالنسبة إلى D .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-\infty; 1[$. استنتج حصر α بتقريب 10^{-2} .

(4) أنشئ D و C_f في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور الترتيب)

(5) استنتج بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

7.

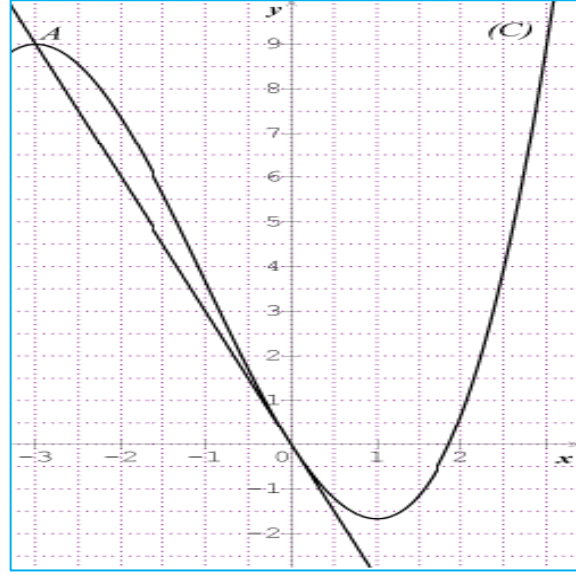
الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة وقابلة

للاشتقاق على المجال $[-3; 3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث:

* يمر (C) بمبدأ المعلم O ويشمل النقطة $A(-3; 9)$.

* يمر (C) في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا. ويقبل المستقيم (OA)

كمماس عند النقطة O .



1. ماهو معامل توجيه المستقيم (OA) .

2. عين اتجاه تغير الدالة f .

3. حل بيانيا في المجال $[-3; 3]$ المتراجحة: $f(x) \geq -2$.

4. نفرض أن: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث: a, b, c و d أعداد حقيقية.

بين أن: $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = -3$ و $d = 0$.

8.

1. ليكن P كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1. أدرس تغيرات الدالة P ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين ان المعادلة $P(x) = 0$ تقبل تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1; +\infty[$. عين حصر α سعته 10^{-1} .

3. استنتج حسب قيم اشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب: $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. عين النهايات للدالة f . ماذا تستنتج بيانياً؟

2. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$

3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بين أن: $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$ ثم عين حصراً للعدد $f(\alpha)$.

5. عين معادلة (T) المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6. تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; 1[$: $f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

7. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

8. أرسم (T) و (C_f) .

9.

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^3}$

C هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$ الوحدة $3cm$.

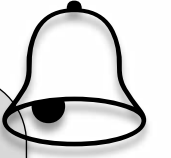
1. درس تغيرات f ، شكل جدول التغيرات.

2. أ- حل المعادلة $f(x) = 0$ ، استنتج أن للمنحنى C لا يقطع محور الفواصل.

ب- حسب جدول التغيرات ناقش حسب قيم اعداد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

ج- عين معادلة لكل من المماسين T_1 و T_2 للمنحنى C عند النقطتين اللتين فاصلتهما $\frac{1}{2}$ و 1.

3. أنشئ المماسين T_1 ، T_2 و المنحنى C .



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ
والتنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

**تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي
للصفحة**

5min  Maths 