



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسية

①

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 11

(I) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

(3) أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- عين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x) - f''(x)$ برر اجابتك.

(4) أ- بين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

أ- بين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

(5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

(6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(7) بين أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

(8) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2; -1[$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .

(9) مثل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ، (C_f) .

(10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي غير المعلوم m عدد واشارة المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

(1) ماهو اتجاه تغير الدالة g ؟

(2) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ ثم بين أن:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

(4) تحقق من:

$$y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

هي معادلة للمستقيم (d) .

(I)

(1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] = -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x - 2e^x + 3x + 6}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x \left(x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x} \right)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x}}{1 + \frac{3}{e^x}} \right] = +\infty \end{aligned}$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - e^x(4e^x)}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x + 3)^2 + 12e^x}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} \\ &= \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \end{aligned}$$

(3) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ولدينا

$$\begin{aligned} e^x - 3 = 0 &\Rightarrow e^x = 3 \\ &\Rightarrow x = \ln 3 \end{aligned}$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها ، اذن :

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ب- تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الأولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية وتغير اشارتها
ومنه $f''(\ln 3) = 0$

(4) أ- تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_1] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب- تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_2] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{12}{e^x + 3} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

(5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$ لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة البسط

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y_1$	-	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_2) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_2]$ لدينا:

$$f(x) - y_2 = 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} = \frac{12}{e^x + 3} > 0$$

ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	

(6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ &= \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3} \right)^2 (x) + 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0 + 3} \\ &= \frac{1}{2}x + 1\end{aligned}$$

(7) تبين أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :



نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

- نبين أن $(\ln 3 + x) \in D_f$ و $(\ln 3 - x) \in D_f$:

لدينا: $x \in]-\infty; +\infty[$ معناه $x \in D_f$

ومنه $(\ln 3 + x) \in]-\infty; +\infty[$ و $(\ln 3 - x) \in]-\infty; +\infty[$

- نبين أن $f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = 2 \ln 3$

$$\begin{aligned} f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) &= \left(\ln 3 + x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} \right) + \left(\ln 3 - x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} + \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{12e^x}{3e^x + 3} + \frac{12e^{-x}}{3e^{-x} + 3} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^x}{e^x + 1} + \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4 + 4e^x + 4 + 4e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2} \right) \\ &= 2 \ln 3 \end{aligned}$$

(8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2; -1[$

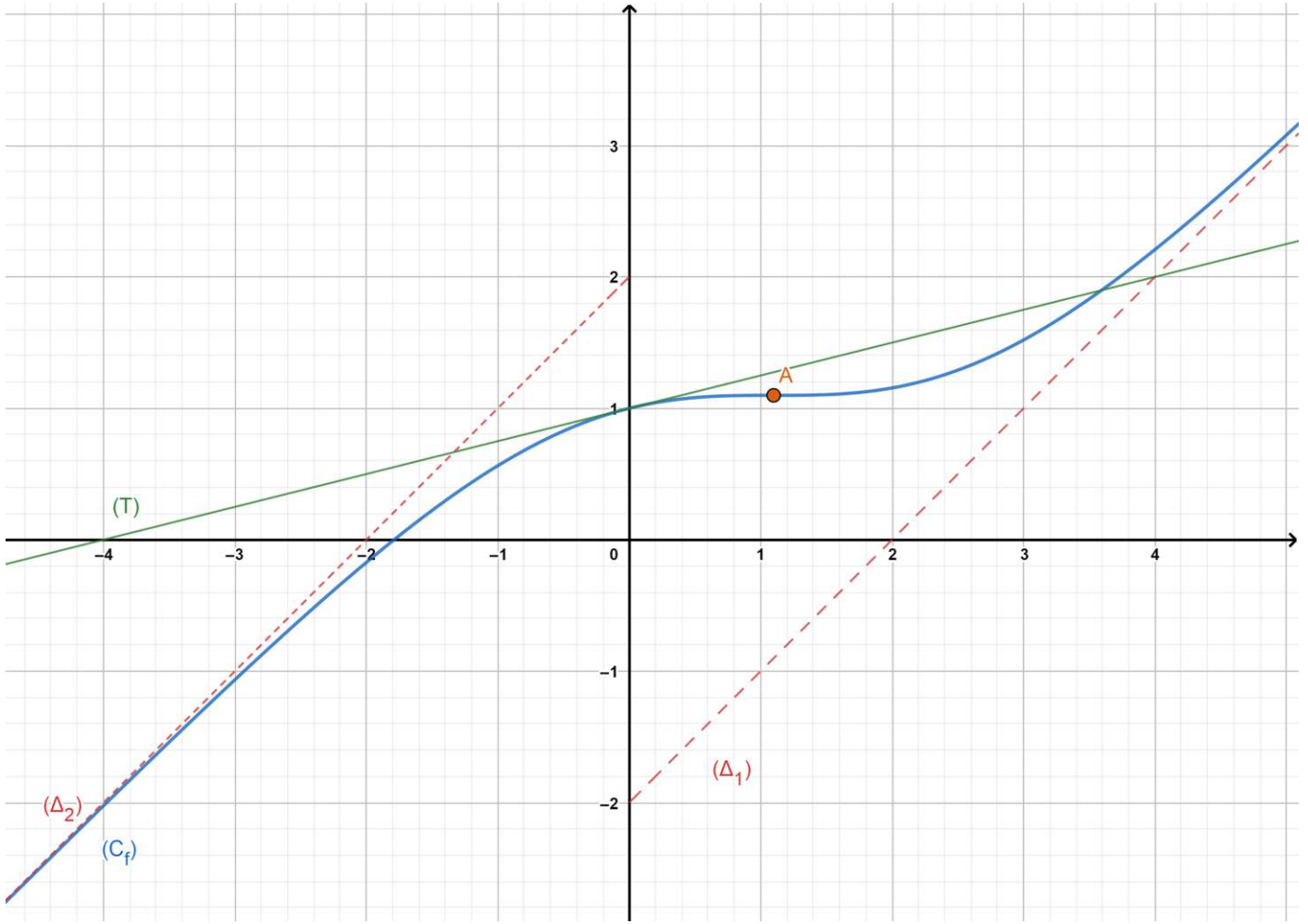
- حصر α :

α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

(9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(10) المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

$$h(x) = f(-|x|)$$

ومنه:

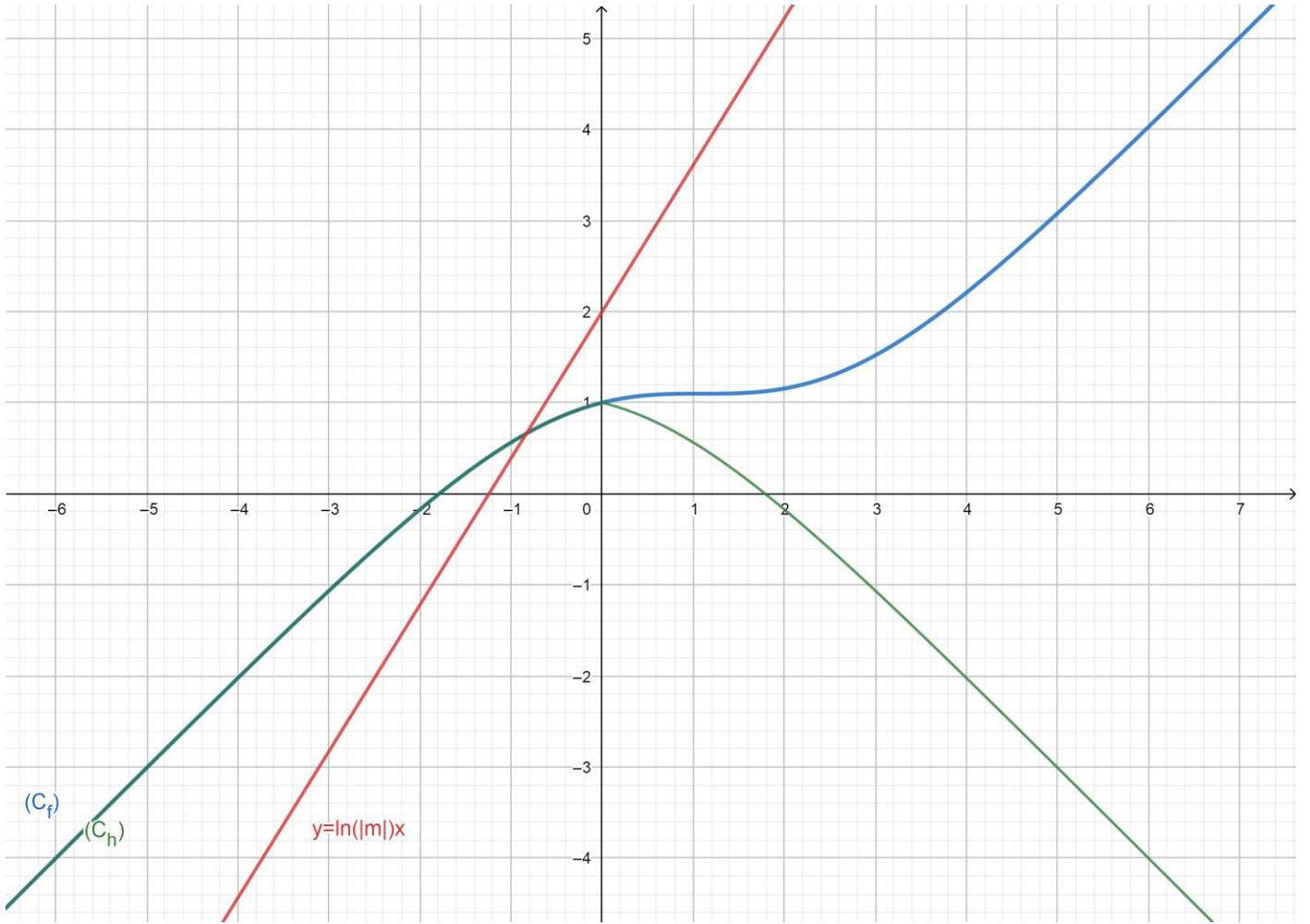
$$h(x) = \begin{cases} f(-(x)); x \geq 0 \\ f(-(-x)); x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

لما $x \leq 0$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x \geq 0$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) والمنحني (C_h) والمستقيم $y = \ln|m| x$



ومنه المناشة كآلاتي:

لما: $1 \leq \ln|m|$ أي: $|m| \leq e$ أي: $-e \leq m \leq e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول
لما: $\ln|m| > 1$ أي: $|m| > e$ أي لما: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

(II) لدينا: $g(x) = f(3x - 2)$

(1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

لدينا الدالة k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

(2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x - 2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

(3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned}(d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2)\end{aligned}$$

(4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} \\ &\Rightarrow (\alpha + 2)(e^\alpha + 3) - 4e^\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \alpha e^\alpha + 3\alpha + 2e^\alpha + 6 - 4e^\alpha = 0 \\ &\Rightarrow e^\alpha(\alpha - 2) = -(3\alpha + 6) \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}(d): y &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{e^\alpha - 3}{e^\alpha + 3}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha} - 3}{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha} + 3}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}\end{aligned}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶