

المناخ الأول التوال كثيرات الحدود (03 آباب وفلسفة، 03 آباب ولغات أجنبية)

ذالة كثير حدود من الدرجة الأولى

 a و b عددين حقيقيين، $a \neq 0$

$$f(x) = ax + b$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

 f ذالة كثير حدود من الدرجة الأولى

01- النهايات

 $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax) = -\infty$$

 $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax) = +\infty$$

02- اتجاه تغير الذالة f $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$f'(x) = a < 0$$

 f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$f'(x) = a > 0$$

 f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.03- جدول تغيرات الذالة f $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

 $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

04- تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثياتب- تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصلنحل المعادلة $f(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{a}$

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ B\left(-\frac{b}{a}; 0\right) \right\}$$

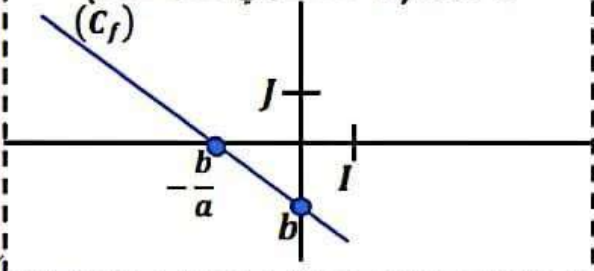
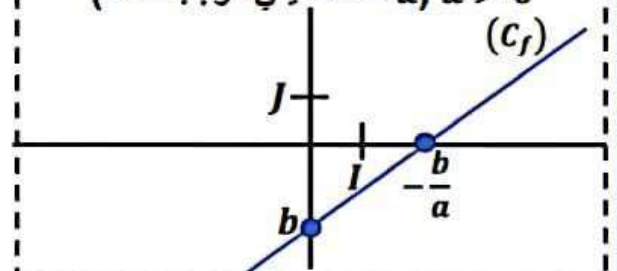
نسمي نقطة التقاطع B إن لم تذكر في التمرينأ- تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيبنحسب $f(0) = b$ نجد

$$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; b)\}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تذكر في التمرين05- التمثيل البياني للذالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: منحناها عبارة عن مستقيم ولرسم هذا المستقيم نستعمل جدول مساعد

x		
y		

 $a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما) $a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

03-جدول تغيرات الدالة f

(5)

(يكون جدول تغيرات الدالة f حسب إشارة $f'(x)$)

04-معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (Δ) .

من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان باختيار نقطتين من المماس $M(x_M; y_M)$ و $N(x_N; y_N)$

$$f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} \text{ نجد:}$$

كما يمكن إيجاد معادلة المماس (Δ) من البيان وذلك باتباع ما يلي:

(1) نحسب a : $a = f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$

(2) ثم نحسب b : b هو ترتيب نقطة تقاطع المماس (Δ) مع محور الترتيب $b = y_N - ax_N$

أو $b = y_M - ax_M$ في الأخير نجد: $(\Delta): y = ax + b$

ولدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى مماسه (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

أو كان الفرق من الشكل $f(x) - y = (x + 1)^3$ (ندرس إشارة $(x + 1)$)
نلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-	○	+
$f(x) - y$	-	○	+
الوضعية النسبية	يقع (C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	يقع (C_f) فوق (Δ)

مثلا إذا كان الفرق من الشكل $f(x) - y = x^3$ (ندرس إشارة x)
نلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	○	+
$f(x) - y$	-	○	+
الوضعية النسبية	يقع (C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	يقع (C_f) فوق (Δ)

ملاحظة: بمان المنحنى (C_f) غيّر وضعيته بالنسبة إلى مماسه (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 (لتكن هذه النقطة E)
نقول أن المنحنى (C_f) يخترق المماس (Δ) في النقطة E ونستنتج أن النقطة $E(x_0; f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) .

05-نقطة الانعطاف

لتبيان أن $E(x_0; y_0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) نتبع ما يلي:

(1) نحسب $f''(x)$ (انطلاقا من $f'(x)$)

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

(2) ندرس إشارة $f''(x)$ (نضع $f''(x) = 0$ نجد $x = x_0$)

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	-

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	+

$f''(x)$ انعدمت عند x_0 مُغيّرة إشارتها إذن $E(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ (C_f) وهي $E(x_0; y_0)$.

ملاحظة:

إذا طلب منا تبيان أن $f(x) = (\dots)(\dots)$ ننطلق من الطرف الثاني $(\dots)(\dots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$ ، نستعملها في حل معادلة $f(x) = 0$.

دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة (الأهم)

(4)

$a \neq 0$ ، b ، c و d أعداد حقيقية،

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

f دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

01- النهايات

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3) = -\infty$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3) = +\infty$$

02- اتجاه تغير الدالة f

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

(إشارة المشتقة)

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $ax^2 + \beta x + \gamma$

تذكير: إشارة $ax^2 + \beta x + \gamma$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ (*)

حسب إشارة المميز $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$

$\Delta < 0$ (المميز سالب تماما)

إشارة $f'(x)$

(إشارة $ax^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

$\Delta = 0$ (المميز معطوم)

إشارة $f'(x)$

(إشارة $ax^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	مثل	مثل
		إشارة α	إشارة α
		$x' = \frac{-\beta}{2a}$	

$\Delta > 0$ (المميز موجب تماما)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $ax^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل
	إشارة α	إشارة α	إشارة α	إشارة α

$$x'' = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x' = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حيث $x' < x''$ ، الترتيب في الجدول مهم.

(إشارة المشتقة حالة خاصة 01)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $ax^2 + \beta x$ ($\gamma = 0$)

إشارة $ax^2 + \beta x$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $ax^2 + \beta x = 0$ ويكون: $x(ax + \beta) = 0$ ومنه: $x = 0$ أو $x = -\frac{\beta}{a}$

(بعد إيجاد الحلول، نلخص إشارة $f'(x)$ في جدول)

(إشارة المشتقة حالة خاصة 02)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $ax^2 + \gamma$ ($\beta = 0$)

إشارة $ax^2 + \gamma$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $ax^2 + \gamma = 0$ ويكون: $x^2 = -\frac{\gamma}{a}$

$x^2 = k < 0$ لا توجد قيم x .

$x^2 = 0$ نجد $x = 0$

$x^2 = k > 0$ نجد $x = \sqrt{k}$ أو $x = -\sqrt{k}$

إشارة $f'(x)$

(إشارة $ax^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

إشارة $f'(x)$

(إشارة $ax^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	مثل	مثل
		إشارة α	إشارة α

نكون أمام هذه الحالة

في حالة $\beta = \gamma = 0$

أي: $f'(x) = ax^2$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $ax^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	$-\sqrt{k}$	$\sqrt{k}$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل
	إشارة α	إشارة α	إشارة α	إشارة α

حيث $k = -\frac{\gamma}{a}$

(2) دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

$a \neq 0$ و b, c أعداد حقيقية،

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

01- النهايات

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2) = -\infty$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2) = +\infty$$

02- اتجاه تغير الدالة f

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$f'(x) = 2ax + b$$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$f'(x) = 2ax + b$$

تذكير: إشارة $\alpha x + \beta$

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $\alpha x + \beta$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	مثل إشارة α	عكس إشارة α	مثل إشارة α

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة a	عكس إشارة a	مثل إشارة a

إشارة $f'(x)$

نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

إشارة $f'(x)$

نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$
ومتناقصة تماما على المجال $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$
ومتزايدة تماما على المجال $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$

03- جدول تغيرات الدالة f

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$-\infty$

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$+\infty$

04- معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (Δ) .

من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان باختيار نقطتين من المماس $M(x_M; y_M)$ و $N(x_N; y_N)$ نجد: $f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$

كما يمكن إيجاد معادلة المماس من البيان (سنشرح هذا الفصل في الدالة كثير حدود من الدرجة الثالثة)

ملاحظة:

إذا طلب منا تبين أن $f(x) = (\dots)(\dots)$ من الطرف الثاني $(\dots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$ ، نستعملها في حل معادلة $f(x) = 0$.

(6) ٥٥-تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$ [حسب اختيار $f(x)$]

نكون أمام (02) حالتين إما:

الحالة 01: إذا كان $d = 0$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في المعطيات ونقوم بإخراج x كعامل مشترك (ثم نحل معادلة جداء)

الحالة 02: إذا كان $d \neq 0$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في الأسئلة (ثم نحل معادلة جداء)

ملاحظة مهمة: عدد الحلول هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب

نحسب $f(0) = d$ نجد $f(0)$

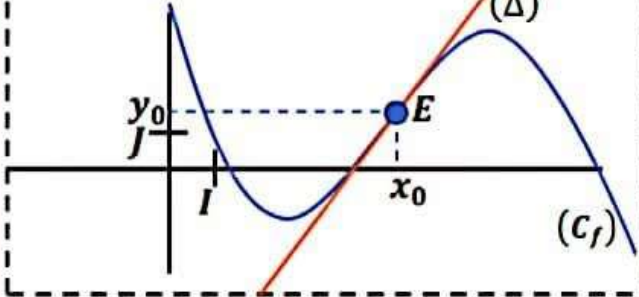
$$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; d)\}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تذكر في التمرين

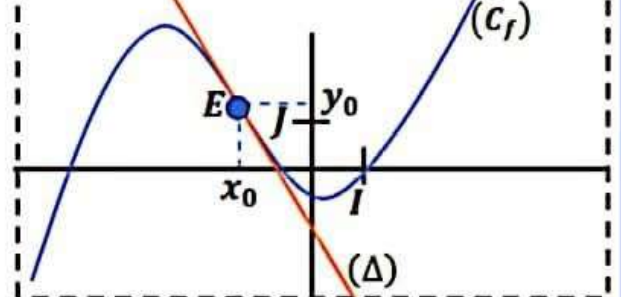
٥٦-التمثيل البياني للدالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: نعين مجموعة من النقط $M(x; f(x))$ ونصل بينها باليد نحصل على المنحنى (C_f) .

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



٥٥-إضافات: (أسئلة طرحت في البكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
1) عيّن نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y = 3x - 1$.	نحل المعادلة $f(x) = 3x - 1$ نجد حلين x_1 و x_2 . وبالتالي: $(C) \cap (D) = \{A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)\}$ لإيجاد y_1 نعوض x_1 في عبارة f أو في معادلة (D) .
2) حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) < -1$.	حلول المتراجحة $f(x) < -1$ هي فواصل نقط (C_f) الواقعة تحت المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ باستثناء فواصل نقط التقاطع، من البيان نجد $S = \dots$.
3) عيّن $f'(1)$ و $f'(-1)$ BAC2010.	أ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 موازيا لمحور الفواصل يعني $f'(1) = 0$. ب) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 كذلك موازيا لمحور الفواصل يعني $f'(-1) = 0$.
4) بيّن أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي 5. BAC2011.	نحل المعادلة $f'(x) = 5$ نجد حلين.

انتهى ملخص الدوال كثيرات الحدود.

٣- تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

أ- تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب

نحل المعادلة $f(x) = 0$ [حسب اختيار $f(x)$]
نكون أماما ثلاث (03) حالات إما:

الحالة 01: للمعادلة حلين متمايزين x' و x''

$$(C_f) \cap (xx') = \{B(x'; 0); C(x''; 0)\}$$

الحالة 02: للمعادلة حل مضاعف x'

$$(C_f) \cap (xx') = \{B(x'; 0)\}$$

الحالة 03: المعادلة ليس لها حلول $(C_f) \cap (xx') = \{ \}$

ب- تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب

نحسب $f(0) = c$ نجد

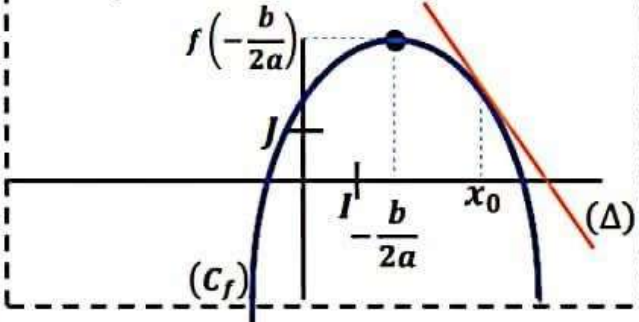
$$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; c)\}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تذكر في التمرين

٤- التمثيل البياني للدالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: نُعين مجموعة من النقاط $M(x; f(x))$ ونصل بينها باليد نحصل على المنحنى (C_f) .

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

