



الخليل للرياضيات



مجلة

الزوايا الموجهة

الأستاذ: قويسم الخليل



- ملخص شامل للوحدة
- تمارين متنوعة محلولة

للسنة
ثانية ثانوي
الشعب العلمية



آخر تحديث: [08 فيفري 2023]

1

ملخص شامل

حول:

الزوايا الموجهة

1 الزوايا الموجهة

● يوجه المستوي:

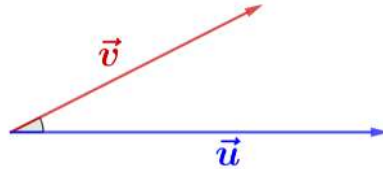
☒ توجيهها مباشرا (موجب) ← عكس عقارب الساعة

☒ توجيهها غير مباشرا (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة

● نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1.

فيما يلي: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة؛

● نسمي الثنائية $(\vec{u}; \vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين



● إذا كان x قياس للزاوية $(\vec{u}; \vec{v})$ فإن كل الاعداد من الشكل $x + 2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u}; \vec{v})$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

● يوجد قياس على المجال $]-\pi; \pi]$ يسمى القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$

● إيجاد القياس الرئيسي للزاوية $x = (\vec{u}; \vec{v})$:

☒ يكتب الشكل العام للزاوية بـ: $(\vec{u}; \vec{v}) = x + 2k\pi$

☒ نحصر الشكل العام للزاوية بين π و $-\pi$ ، أي: $-\pi < x + 2k\pi < \pi$

☒ يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القياس الرئيسي

● ملاحظة: يوجد طريقة أخرى لإيجاد القياس الرئيسي للزاوية $(\vec{u}; \vec{v})$ ، سنتطرق إليها خلال التمارين

☒ تقايس الزوايا الموجهة:

ليكن α قياسا للزاوية $(\vec{u}; \vec{v})$ و α' قياسا للزاوية $(\vec{u}'; \vec{v}')$

• تكون الزاويتان $(\vec{u}; \vec{v})$ و $(\vec{u}'; \vec{v}')$ متقايستان إذا وفقط إذا كان من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$:

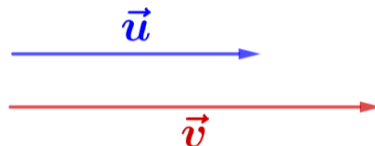
$$\alpha' = \alpha + 2k\pi$$

• أي: $\alpha' - \alpha$ مضاعف لـ 2π

☒ الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:

● $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه:

☒ $(\vec{u}; \vec{v}) = 2k\pi$ وهذا يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في نفس الاتجاه



☒ $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi + 2k\pi$ وهذا يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في اتجاهين متعاكسين



● خاصية $(k; k') \in \mathbb{R}^*$

✕ إذا كان: k و k' من نفس الإشارة فإن: $(k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$

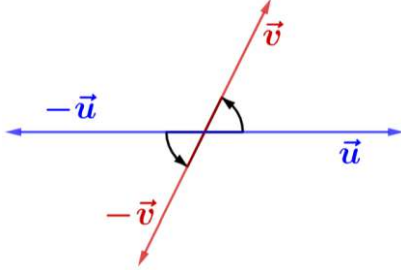
✕ إذا كان: k و k' مختلفين في الإشارة فإن: $(k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$

✕ علاقة شال:

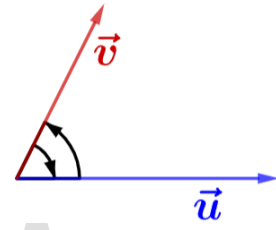
● لدينا: $(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{w}) + (\vec{w}; \vec{v})$

● نتائج:

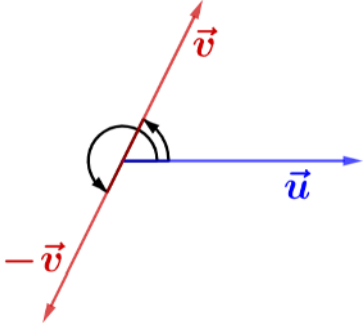
$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$$



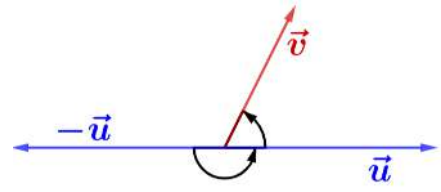
$$(\vec{u}; \vec{v}) = -(\vec{v}; \vec{u})$$



$$(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$$



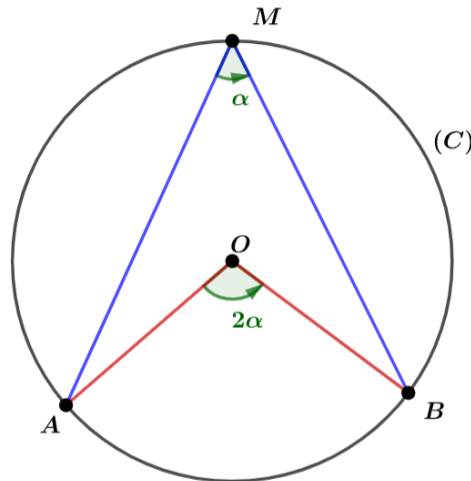
$$(-\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$$



✕ الزاوية المحيطية

إذا كانت A ، B و M ثلاث نقاط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلية (C) مركزها O فإن:

$$(\vec{OA}; \vec{OB}) = 2(\vec{MA}; \vec{MB})$$

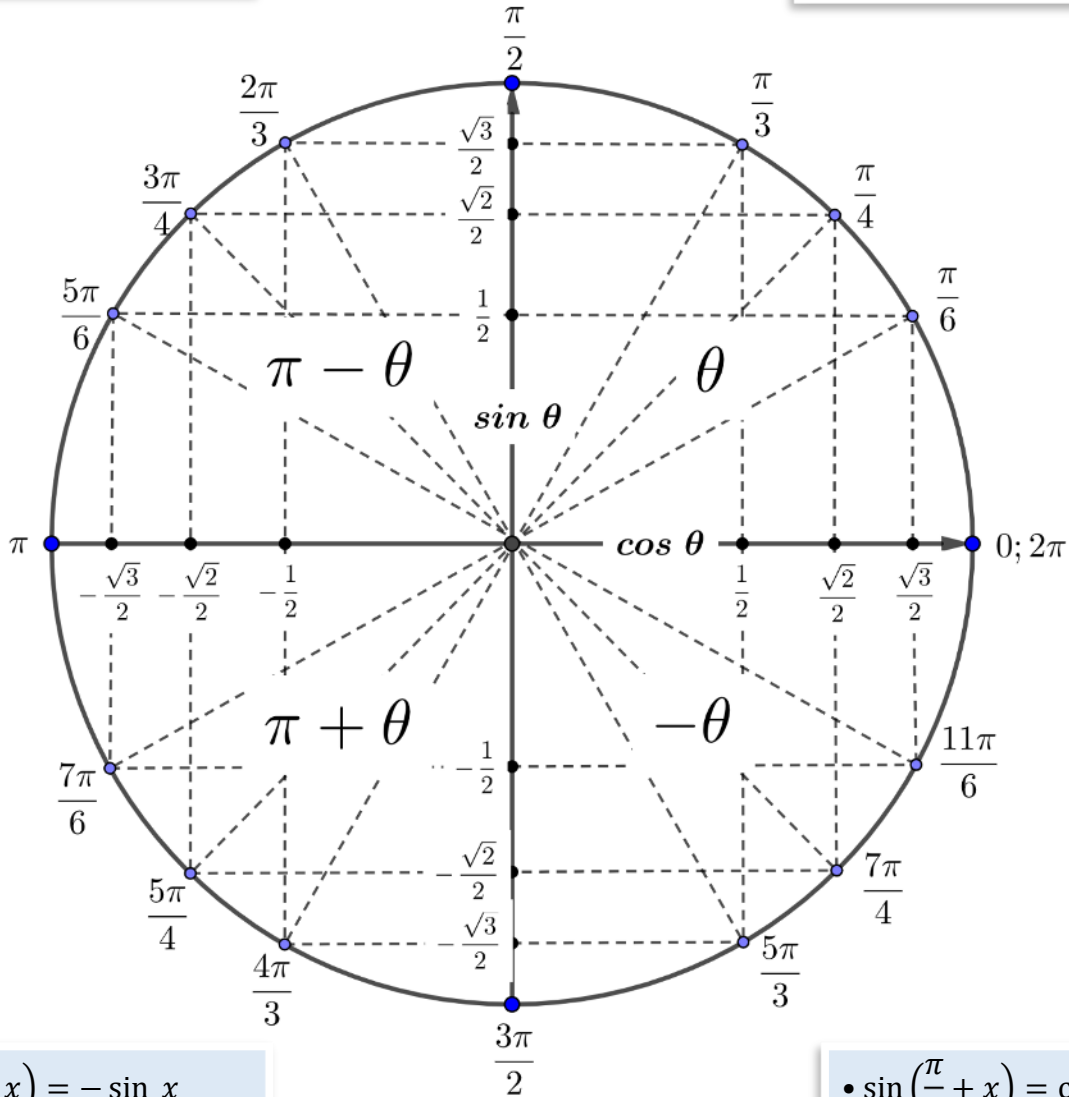


الدائرة المثلثية

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$



- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

جدول الزوايا الشهيرة

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

بعض العلاقات المثلثية الشهيرة

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

- $-1 \leq \cos^2 x < 1$
- $-1 \leq \sin^2 x < 1$
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $= 2 \cos^2 x - 1$
 $= 1 - 2 \sin^2 x$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$
- $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$

معادلات خاصة:

من أجل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

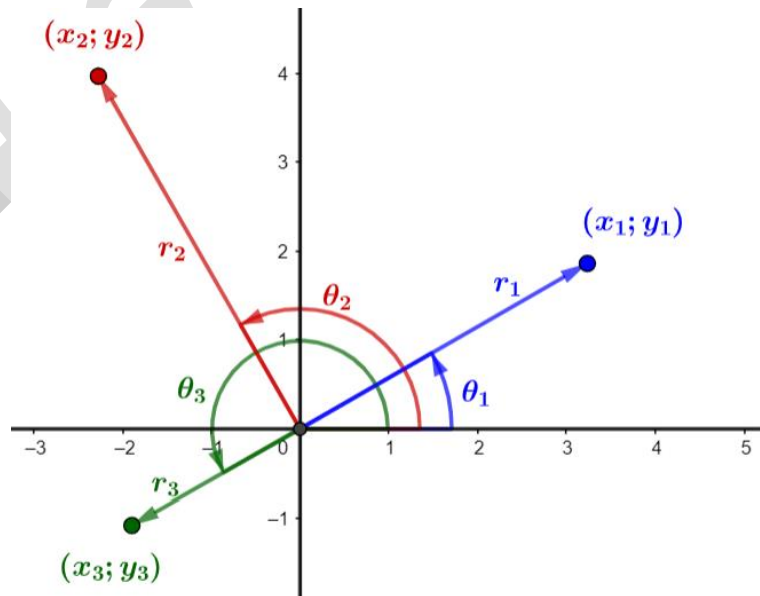
- $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$
- $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

3 الاحداثيات القطبية والديكارتية

ليكن $(o; \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد متجانس، ولتكن M نقطة من المستوى تختلف عن O

تسمى الثنائية $M(x; y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M

تسمى الثنائية $M(r; \theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث $r = OM$ و $\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$



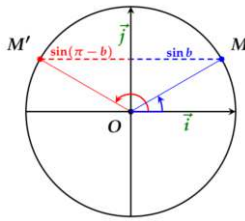
العلاقة بين الاحداثيات القطبية والديكارتية:

$$y = r \sin \theta$$

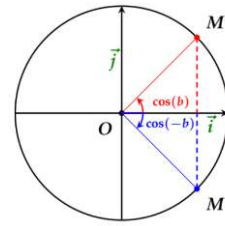
$$x = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$$



$$\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$$



المعادلات من الشكل: $\cos x = a$

إذا كان $a \notin [a; b]$ فالمعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$

إذا كان $a \in [a; b]$

1. نبحث عن القيس الرئيسي b حيث: $\cos b = a$

2. الحلول هي: $\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ x = -b + 2k\pi \end{cases}$

المعادلات من الشكل: $\sin x = a$

إذا كان $a \notin [a; b]$ فالمعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$

إذا كان $a \in [a; b]$

1. نبحث عن القيس الرئيسي b حيث: $\sin b = a$

2. الحلول هي: $\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ x = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

المعادلات من الشكل: $\cos a = \sin b$

إما أن نحول $\sin$ إلى $\cos$ بالقانون $\sin b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ أي من الشكل: $\cos a = \cos b$

أو نحول $\cos$ إلى $\sin$ بطريقتين:

• بالقانون $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ أي من الشكل: $\sin a = \sin b$

• بالقانون $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ أي من الشكل: $\sin a = \sin b$

{هذا من فضل ربي}

♥ زكاة العلم نشره ♥

الأستاذ: قويسم الخليل

2

تمارين متنوعة:

مرفقة بحلول مفصلة

التمرين 01

لتكن (C) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ ، ولتكن النقطتين A و B من (C) حيث:

$$(\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4} \quad \text{و} \quad (\vec{OI}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{6}$$

عين قيسا للزاوية الموجهة:

$$(\vec{OA}; \vec{OB}) \quad \textcircled{3}$$

$$(\vec{OJ}; \vec{OB}) \quad \textcircled{2}$$

$$(\vec{OJ}; \vec{OA}) \quad \textcircled{1}$$

التمرين 02

أوجد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$ التي قيسها α

$$\alpha = -\frac{35\pi}{2} \quad \textcircled{3}$$

$$\alpha = \frac{14\pi}{3} \quad \textcircled{2}$$

$$\alpha = 2007\text{rad} \quad \textcircled{1}$$

التمرين 03

أوجد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي قيسها α

$$\alpha = \frac{65\pi}{8} \quad \textcircled{2} \quad \alpha = -\frac{189\pi}{4} \quad \textcircled{1}$$

$$\alpha = \frac{2007\pi}{3} \quad \textcircled{4} \quad \alpha = \frac{721\pi}{5} \quad \textcircled{3}$$

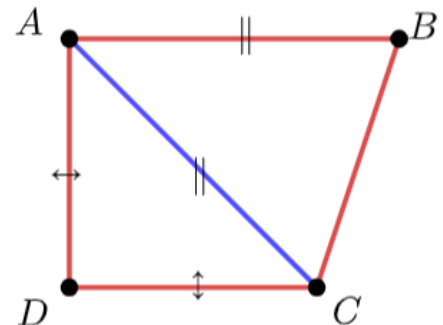
التمرين 04

هل العدادان $\frac{9\pi}{8}$ و $\frac{41\pi}{8}$ قياسان لزاوية موجهة لشعاعين؟

هل العدادان $-\frac{4\pi}{5}$ و $\frac{1924\pi}{5}$ قياسان لنفس الزاوية؟

التمرين 05

ABCD شبه منحرف قائم حيث: $AB = AC$ و $DC = AD$



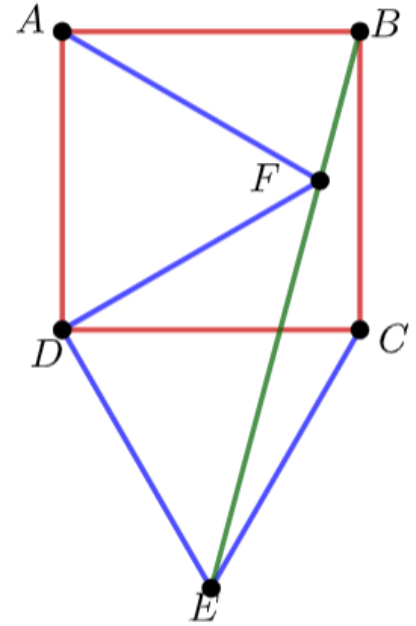
عين القيس الرئيسي للزاويا الموجهة التالية:

$$(\vec{AD}; \vec{AC}) \quad \textcircled{2} \quad (\vec{BA}; \vec{BC}) \quad \textcircled{1}$$

$$(\vec{BA}; \vec{AD}) \quad \textcircled{4} \quad (\vec{DC}; \vec{BA}) \quad \textcircled{3}$$

التمرين 06

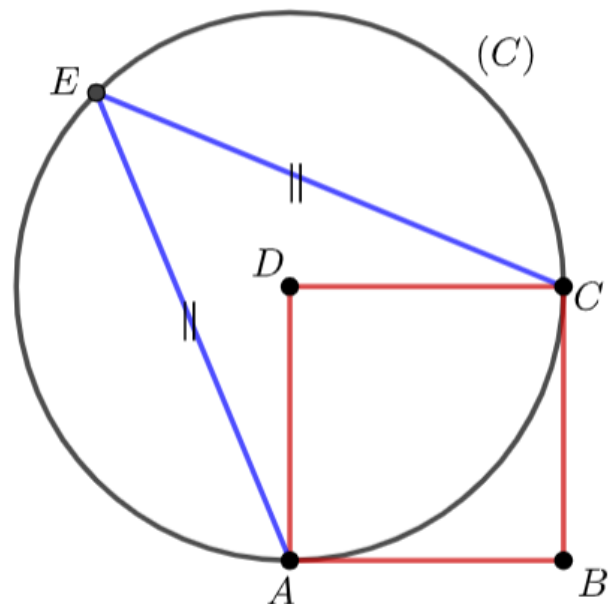
$ABCD$ مربع غير مباشر من المستوي حيث $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$. E نقطة خارج المربع $ABCD$ حيث: مثلث ECD مثلث متقايس الأضلاع، ولتكن النقطة F داخل المربع $ABCD$ حيث: مثلث AFD مثلث متقايس الأضلاع



- 1 أثبت أن المثلث ABF متقايس الساقين
- 2 عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA})$
- 3 عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF})$ ، ثم استنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FE})$
- 4 عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FE})$
- 5 استنتج أن النقط E, F و B على استقامة واحدة

التمرين 07

في المستوي الموجه، $ABCD$ مربع و ACE مثلث متساوي الساقين، (C) الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها DC كما في الشكل المقابل:



- ① عيّن قيساً لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC})$ و $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC})$
- ② بيّن أن المثلثين EDA و EDC متقايسان
- ③ عيّن قيساً لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DA})$ و $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})$
- ④ بيّن أن $(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \pi$
- ⑤ ماذا يمكنك القول عن النقط E ، D و B . علّل إجابتك.

التمرين 08

بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لكل من:

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) & \textcircled{2} \quad \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) \quad \textcircled{1} \\ \cos\left(-\frac{31\pi}{3}\right) & \textcircled{4} \quad \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) \quad \textcircled{3} \end{array}$$

التمرين 09

① بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لـ $\cos x$ إذا علمت أن:

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{3}{5}$$

② باستعمال آلة حاسبة عيّن مدور لـ x إلى 10^{-2}

التمرين 10

بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لكل من:

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) \quad \textcircled{2} \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \quad \textcircled{1}$$

التمرين 11

علما أن $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ دون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لـ $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

ثم استنتج $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

لاحظ أن: $\frac{\sqrt{3} + 2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}\right)^2$

التمرين 12

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد متجانس

- ① هي الاحداثيات القطبية للنقطة A في المعلم القطبي $(O; \vec{i})$. عيّن الاحداثيات الديكارتية للنقطة A
- ② لتكن النقطة B التي احداثياتها الديكارتية $(-\sqrt{3}; -1)$. عيّن احداثيات قطبية للنقطة B في المعلم القطبي $(O; \vec{i})$

التمرين 13

عين في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ النقاط التالية المعرفة بإحداثياتها القطبية:

$$D\left(4; \frac{\pi}{2}\right), \quad C\left(3; \frac{\pi}{6}\right), \quad B\left(2; -\frac{5\pi}{6}\right), \quad A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$$

التمرين 14

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ ، ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية، للمعادلتين ذات المجهول x ، التاليتين:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad ② \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ①$$

التمرين 15

علما أن قياس الزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$ هو $-\frac{\pi}{3}$ ، عين قياس الزوايا الموجهة التالية:

$$\begin{aligned} (5\vec{u}; 3\vec{v}) & \quad ② \quad (\vec{v}; \vec{u}) \quad ① \\ (2\vec{v}; -\vec{u}) & \quad ④ \quad (-6\vec{u}; 5\vec{v}) \quad ③ \end{aligned}$$

التمرين 16

عين قيمة كل من $\cos x$ و $\sin x$ للزاوية x في كل حالة مما يلي:

$$\begin{aligned} x = \frac{-5\pi}{6} & \quad ② \quad x = -\frac{945\pi}{2} \quad ① \\ x = \frac{2\pi}{3} & \quad ④ \quad x = \frac{-17\pi}{4} \quad ③ \end{aligned}$$

التمرين 17

بسط العبارات التالية:

$$\begin{aligned} A &= \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) \quad ① \\ B &= \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x \quad ② \\ C &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad ③ \\ D &= \cos(\pi - x) - \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) \quad ④ \\ E &= \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad ⑤ \\ F &= \tan(\pi + x) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cotan(2x) \quad ⑥ \end{aligned}$$

التمرين 18

x عدد حقيقي، أثبت العبارات التالية:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= \sin x \quad ① \\ \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) &= 0 \quad ② \\ \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) &= 0 \quad ③ \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = 1 \quad 4$$

التمرين 19

حل في المجال I المعادلات التالية:

$$I =]-\pi; \pi] \quad , \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad 1$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad \cos x - 2 = 0 \quad 2$$

$$I =]-\pi; \pi] \quad , \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 3$$

$$I = [0; 2\pi[\quad , \quad 2 \cos 2x = -\sqrt{2} \quad 4$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad 5$$

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \quad , \quad 2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \quad 6$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad \cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad 7$$

$$I = [-\pi; 2\pi[\quad , \quad \cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0 \quad 8$$

التمرين 20

حل في المجال I المتراجعات التالية:

$$I =]-\pi; \pi] \quad , \quad \cos x \leq \frac{1}{2} \quad 1$$

$$I = [0; 3\pi] \quad , \quad 2 \sin x + \sqrt{3} \leq 0 \quad 2$$

$$I = \left]-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \quad , \quad \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 3$$

$$I = [0; 2\pi[\quad , \quad -2 \cos 2x + \sqrt{3} \geq 0 \quad 4$$

$$I =]0; \pi] \quad , \quad 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0 \quad 5$$

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \quad , \quad \sqrt{2} \sin x - 1 > 0 \quad 6$$

التمرين 21

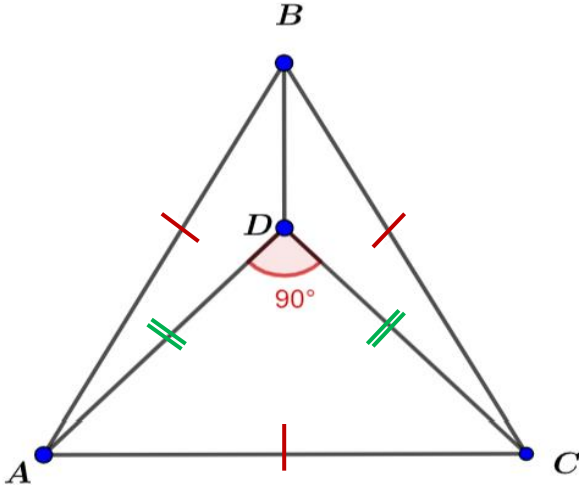
حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\cos x = \sin x \quad 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad 2$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \quad 3$$

التمرين 22



ABC مثلث متقايس الأضلاع و D نقطة داخل المثلث ABC
 بحيث ADC قائم في D ومتساوي الساقين كما هو موضع في
 الشكل التالي:

① عيّن قياسا للزوايا الموجهة التالية: $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ ،

$(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$ ، $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$

② ما هو مجموع هذه الأقياس

التمرين 23

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ كثير حدود معرف على $\mathbb{R}$ ب:

① احسب $P(1)$ ، ماذا تستنتج؟

② حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

③ استنتج حلول المعادلة $Q(x) = 0$ حيث: $Q(x) = 2 \sin^3 x - 7 \sin^2 x + 7 \sin x - 2$

ثم مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية

التمرين 24

① حل في المجال $]-\pi; \pi]$ المتراجعات التالية:

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 \geq 0 \quad ①$$

$$-2 \sin x - \sqrt{3} \geq 0 \quad ②$$

$$-\frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{2} \quad ③$$

② x عدد حقيقي، إذا علمت أن $2 \cos x \cdot \sin x = 1$ ، أحسب كلا من:

$$\cos x + \sin x \quad ①$$

$$\cos x - \sin x \quad ②$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x \quad ③$$

{هذا من فضل ربي}

♥ زكاة العلم نشره ♥

الأستاذ: قويسم الخليل



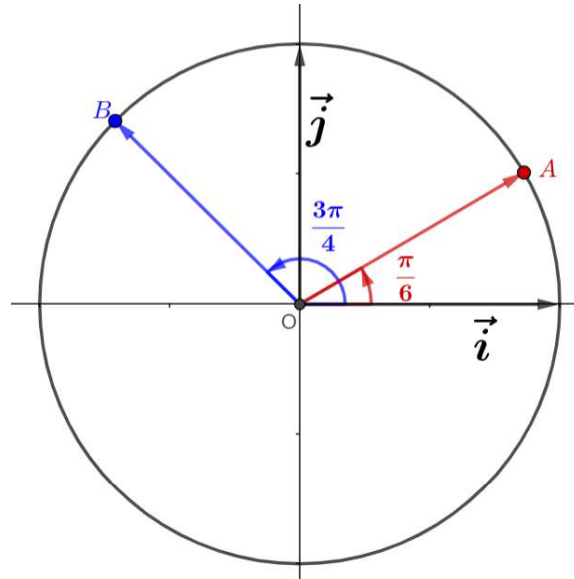
الخليل للرياضيات

3

طول التمارين:

طول مقترحة مفصلة

حل التمرين 01



⊙ تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{OA}; \vec{OB})$:

لدينا:

$$\begin{aligned} (\vec{OI}; \vec{OA}) + (\vec{OA}; \vec{OB}) &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow -(\vec{OA}; \vec{OB}) = (\vec{OI}; \vec{OA}) - \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow (\vec{OB}; \vec{OA}) = (\vec{OI}; \vec{OA}) - \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow (\vec{OB}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \boxed{(\vec{OB}; \vec{OA}) = -\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

⊙ تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{OB}; \vec{OA})$:

لدينا:

$$\begin{aligned} (\vec{OI}; \vec{OB}) &= (\vec{OI}; \vec{OJ}) + (\vec{OJ}; \vec{OB}) \Rightarrow (\vec{OB}; \vec{OA}) = (\vec{OI}; \vec{OB}) - (\vec{OI}; \vec{OJ}) \\ &\Rightarrow (\vec{OB}; \vec{OA}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \boxed{(\vec{OB}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

⊙ تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{OA}; \vec{OB})$:

لدينا:

$$\begin{aligned} (\vec{OA}; \vec{OB}) &= (\vec{OA}; \vec{OJ}) + (\vec{OJ}; \vec{OB}) \Rightarrow (\vec{OA}; \vec{OB}) = -(\vec{OJ}; \vec{OA}) + (\vec{OJ}; \vec{OB}) \\ &\Rightarrow (\vec{OA}; \vec{OB}) = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4} \\ &\Rightarrow \boxed{(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

حل التمرين 02

⊙ إيجاد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$ التي قياسها α :

$$\alpha = 2007\text{rad} \quad \boxtimes$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
-\pi < 2007 + 2k\pi \leq \pi &\Rightarrow -\pi - 2007 < 2k\pi \leq \pi - 2007 \\
&\Rightarrow \frac{-\pi - 2007}{2\pi} < k \leq \frac{\pi - 2007}{2\pi} \\
&\Rightarrow -319.92 < k \leq -318.92 \\
&\Rightarrow k = -319
\end{aligned}$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$ هو:

$$2007 + 2(-319)\pi = \boxed{2.66\text{rad}}$$

$$\alpha = \frac{14\pi}{3} \quad \boxed{\times}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
-\pi < \frac{14\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi &\Rightarrow -1 < \frac{14}{3} + 2k \leq 1 \\
&\Rightarrow -1 - \frac{14}{3} < 2k \leq 1 - \frac{14}{3} \\
&\Rightarrow \frac{-1 - \frac{14}{3}}{2} < k \leq \frac{1 - \frac{14}{3}}{2} \\
&\Rightarrow -2.8 < k \leq -1.8 \\
&\Rightarrow k = -1
\end{aligned}$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$ هو:

$$\frac{14\pi}{3} + 2(-1)\pi = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

$$\alpha = -\frac{35\pi}{2} \quad \boxed{\times}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
-\pi < -\frac{35\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi &\Rightarrow -1 < -\frac{35}{2} + 2k \leq 1 \\
&\Rightarrow \frac{-1 + \frac{35}{2}}{2} < k \leq \frac{1 + \frac{35}{2}}{2} \\
&\Rightarrow 8.25 < k \leq 9.25 \\
&\Rightarrow k = 9
\end{aligned}$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \vec{v})$ هو:

$$-\frac{35\pi}{2} + 2(9)\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

حل التمرين 03

إيجاد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي قيسها α

$$\alpha = -\frac{189\pi}{4} \quad \boxed{\times}$$

لدينا:

$$\alpha = -\frac{189\pi}{4} = -\frac{188\pi + \pi}{4} = -47\pi - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\alpha = \frac{65\pi}{8} \quad \boxed{\times}$$

لدينا:

$$\alpha = \frac{65\pi}{8} = \frac{64\pi + \pi}{8} = 8\pi + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

$$\alpha = \frac{721\pi}{5} \quad \boxed{\times}$$

$$\alpha = \frac{721\pi}{5} = \frac{720\pi + \pi}{5} = 144\pi + \frac{\pi}{5} = \boxed{\frac{\pi}{5}}$$

$$\alpha = \frac{2007\pi}{3} \quad \boxed{\times}$$

$$\alpha = \frac{2007\pi}{3} = 699\pi = \boxed{\pi}$$

حل التمرين 04

حتى يكون عددان حقيقان α و β قياسان لزاوية موجّهة لشعاعين يكفي أن يكون $\alpha - \beta$ من مضاعفات 2π

$$\frac{9\pi}{8} \text{ و } \frac{41\pi}{8} \quad \leftarrow$$

لدينا:

$$\frac{41\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} = \frac{32\pi}{8} = 4\pi = 2 \times 2\pi$$

إذن $\frac{9\pi}{8}$ و $\frac{41\pi}{8}$ قياسان لنفس الزاوية

$$-\frac{4\pi}{5} \text{ و } \frac{1924\pi}{5} \quad \leftarrow$$

لدينا:

$$\frac{1924\pi}{5} - \left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1928\pi}{5} = \frac{1925\pi + 3\pi}{5} = 385\pi + \frac{3\pi}{5} = \pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$$

إذن $-\frac{4\pi}{5}$ و $\frac{1924\pi}{5}$ ليسا قياسان لنفس الزاوية

حل التمرين 05

تعيين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية:

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \quad \textcircled{1}$$

لدينا:

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \pi \Rightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

$$(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) \quad \textcircled{2}$$

$$(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

$$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}) \quad \textcircled{3}$$

$$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}) = \pi$$

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AD}) \quad \textcircled{4}$$

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$$

1 اثبات أن المثلث ABF متقايس الساقين :

لدينا: $AD = AF$ لأن: AFD مثلث متقايس الأضلاع

لدينا: $AD = AB$ لأن: $ABCD$ مربع

ومنه: $AF = AB$

وعليه: ABF مثلث متساوي الساقين.

1 تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA})$:

لدينا: $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3}$

ومنه: $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}$

ولدينا:

$$2(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}) = \pi \Rightarrow (\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB})}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA}) = \frac{5\pi}{12}$$

2 تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF})$:

لدينا: $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{3}$

ولدينا: $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{6}$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}) = (\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DF})$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

استنتاج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FE})$

لدينا: $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{2}$

ولدينا: $DE = DF$

إذن المثلث DEF قائم في D ومتساوي الساقين

ومنه:

$$(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}) + 2(\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FE}) = \pi \Rightarrow (\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF})}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{4}$$

3 تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FE})$:

$$(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{FA}; \overrightarrow{FE})$$

$$= (\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{FA}; \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FE})$$

$$= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi$$

4 استنتاج أن النقط E, F و B على استقامة واحدة:
بما أن $(\overrightarrow{FB}; \overrightarrow{FE}) = \pi$ فإن النقط E, F و B على استقامة واحدة

حل التمرين 07

1 تعيين قياسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC})$ و $(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC})$:

لدينا $ABCD$ مربع ومنه

$$(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$$

ولدينا حسب نظرية الزاوية المحيطية:

$$2(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) \Rightarrow (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC})$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{4}$$

1 تبين أن المثلثين EDA و EDC متقايسان:

لدينا: ACE مثلث متساوي الساقين ومنه: $EA = EC$

لدينا: $ABCD$ مربع ومنه: $AD = DC$

إذن: المثلثان EDA و EDC متقايسان

2 تعيين قياسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DA})$ و $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

ولدينا: المثلث DCE متساوي الساقين

ومنه:

$$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) + 2(\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{EC}) = \pi \Rightarrow (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \pi - 2(\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{EC})$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \pi - 2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \frac{3\pi}{4}$$

أيضا نجد أن:

$$(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DA}) = \frac{3\pi}{4}$$

3 تبين أن $(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \pi$

لدينا $ABCD$ مربع ومنه $(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{4}$

ومنه:

$$(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$$

4 تبرير ماذا يمكننا القول عن النقط E, D و B :

حسب علاقة شال لدينا:

$$(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE}) = \pi \Rightarrow (\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DE}) = \pi$$

ومنه النقط E, D و B على استقامة

حل التمرين 08

بدون استعمال الآلة الحاسبة، تعيين القيم المضبوطة لكل من:

- $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi + \pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{24\pi + \pi}{6}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{12\pi - \pi}{3}\right) = \sin\left(-4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\left(-\frac{31\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{30\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(-10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

حل التمرين 09

1 تعيين القيم المضبوطة لـ $\cos x$

لدينا:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x = 1 &\Rightarrow \cos^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \\ &\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &\Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \text{أو} \\ \cos x = -\frac{4}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} & \text{ ولدينا:} \\ \cos x < 0 & \text{ أي:} \\ \cos x = -\frac{4}{5} & \text{ ومنه:}\end{aligned}$$

2 تعيين القيم المضبوطة لـ $\cos x$

يظهر لنا في الآلة الحاسبة بعد كتابة $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$ القيمة 2.49809
ومنه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = 2.5$

حل التمرين 10

بدون استعمال الآلة الحاسبة، تعيين القيم المضبوطة لكل من:

- $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{6\pi + \pi}{3}\right) = \sin\left(-2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل التمرين 11

تعيين القيم المضبوطة لـ $\sin \frac{7\pi}{12}$:

لدينا :

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= 1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) \\ &\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ &\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \\ &\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

استنتاج $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi + 7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

استنتاج $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi - 7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

حل التمرين 12

1) تعيين الاحداثيات الديكارتية للنقطة A :

لدينا : $r = 2$

ولدينا :

$$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

ومنه :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

إذن :

$$A(1; \sqrt{3})$$

2) تعيين احداثيات قطبية للنقطة B :

لدينا :

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

ومنه :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

إذن:

$$B\left(2; \frac{7\pi}{6}\right)$$

حل التمرين 13

تعيين في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ النقط التالية المعرفة بإحداثياتها القطبية:

$$A\left(1; \frac{\pi}{6}\right) \quad \square$$

لدينا: $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$
ومنه:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن:

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$B\left(2; -\frac{5\pi}{6}\right) \quad \square$$

لدينا: $r = 2$
ولدينا:

$$-\frac{5\pi}{6} = \frac{-6\pi + \pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه:

$$\begin{cases} x = 2 \cos\left(-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ y = 2 \sin\left(-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ y = -2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y = -2\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

إذن:

$$B(-1; -\sqrt{3})$$

$$C\left(3; \frac{\pi}{6}\right) \quad \square$$

لدينا: $r = 3$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$
ومنه:

$$\begin{cases} x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

إذن:

$$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$D\left(4; \frac{\pi}{2}\right) \quad \boxed{\times}$$

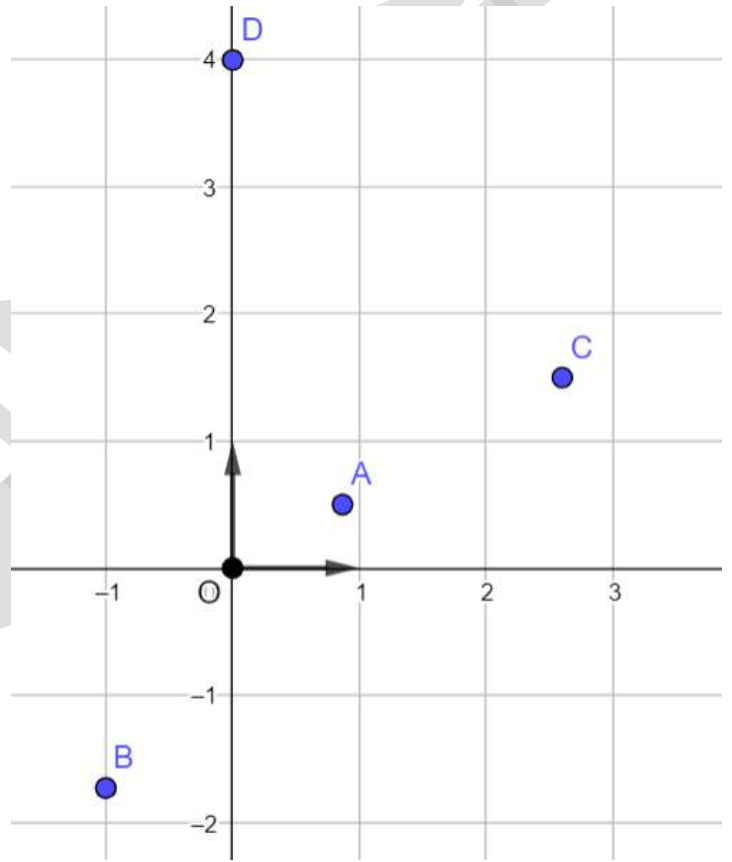
لدينا: $r = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$
ومنه:

$$\begin{cases} x = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

إذن:

$$D(0; 4)$$

ومنه:



حل التمرين 14

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x ، التاليتين:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{\times}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right); \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

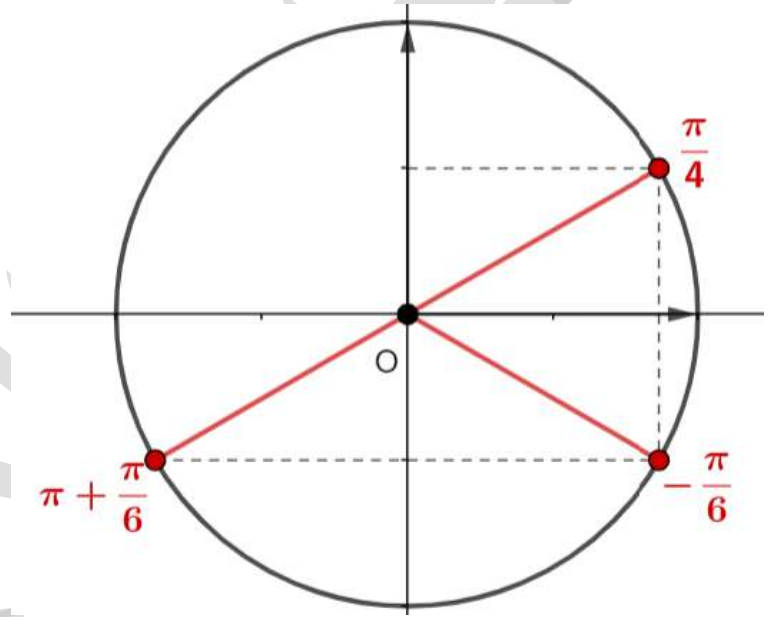
$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \boxed{\times}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right); \left(\pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

تمثيل الحلول:



حل التمرين 15

تعيين قيس الزوايا الموجهة التالية:

لدينا:

$$(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$$

ومنه:

- $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$
- $(5\vec{u}; 3\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$
- $(-6\vec{u}; 5\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$
- $(2\vec{v}; -\vec{u}) = (\vec{v}; \vec{u}) + \pi = -(\vec{u}; \vec{v}) + \pi = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$

حل التمرين 16

تعيين قيمة كل من $\cos x$ و $\sin x$ للزاوية x في كل حالة مما يلي:

① $x = -\frac{945\pi}{2}$

لدينا:

$$x = -\frac{945\pi}{2} = -\frac{-\pi + 946\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 473\pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

② $x = -\frac{5\pi}{6}$

لدينا:

$$x = -\frac{5\pi}{6} = \frac{-6\pi + \pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = \sin\left(-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

① $x = \frac{-17\pi}{4}$

لدينا:

$$x = \frac{-16\pi - \pi}{4} = -4\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $x = \frac{2\pi}{3}$

لدينا:

$$x = \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
- $\sin x = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حل التمرين 17

تبسيط العبارات التالية:

$$\begin{aligned} A &= \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) \\ &= \sin x - \cos x - \cos x \end{aligned}$$

$$= \boxed{\sin x - 2 \cos x}$$

$$\begin{aligned} B &= \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x \\ &= \sin x + \sin x + \cos x - \cos x \\ &= \boxed{2 \sin x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi + \pi}{2} - x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x \\ &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \sin x \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \boxed{-\cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \cos(\pi - x) + \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x + \cos x - \sin x + \cos\left(x + \frac{6\pi + \pi}{2}\right) \\ &= -\sin x + \cos\left(x + 3\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x + \cos\left(x + \pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x + \sin x \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x - \sin x - \cos x + \cos x \\ &= \boxed{-2 \sin x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \tan(\pi + x) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cotan(2x) \\ &= \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} + \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)} + \cotan(2x) \\ &= \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} + \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} + \cotan(2x) \\ &= \frac{-\sin x}{-\cos x} + \frac{-\cos(2x)}{\sin(2x)} + \cotan(2x) \\ &= \tan x - \cotan(2x) + \cotan(2x) \\ &= \boxed{\tan x} \end{aligned}$$

حل التمرين 18

اشبات العبارات الآتية؛

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2 \cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3 \sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \dots \\
& = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(10\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - 3\sin(-(\pi - x)) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) \\
& = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
& = \cos(x) - 2\sin(x) + 3\sin(x) - \cos(x) \\
& = \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \quad ②$$

$$\begin{aligned}
& \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos x + \cos\left(x + \pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \pi + \frac{\pi}{3}\right) \\
& = \cos x - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
& = \cos x - \left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
& = \cos x - \left[\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right] - \left[\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right] \\
& = \cos x - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \quad ③$$

$$\begin{aligned}
& \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin x + \sin\left(x + \pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \pi + \frac{\pi}{3}\right) \\
& = \sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
& = \sin x - \left[\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
& = \sin x - \left[\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right] - \left[\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right] \\
& = \sin x - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = 1 \quad ④$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} &= \frac{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)} \\
&= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

حل التمرين 19

حل في المجال I المعادلات التالية:

$$I =]-\pi; \pi] \quad , \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad ①$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{-1 - \frac{1}{3}}{2} < k \leq \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$-0.6 < k \leq 0.3 \quad \text{ومنه:}$$

$$k = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{ولدينا:}$$

$$\frac{-1 + \frac{1}{3}}{2} < k \leq \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$-0.3 < k \leq 0.6 \quad \text{ومنه:}$$

$$k = 0 \quad \text{ومنه:}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{3} \right); \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad \cos x - 2 = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = 2$$

المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ لأن $2 \notin [-1; 1]$

$$I =]-\pi; \pi] \quad , \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{لدينا:}$$

$$-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3} \quad \text{ومنه:}$$

$$-0.6 < k \leq 0.3 \quad \text{ومنه:}$$

$$k = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$-\pi < \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{ولدينا:}$$

$$-\frac{5}{6} < k \leq \frac{1}{6} \quad \text{ومنه:}$$

$$-0.83 < k \leq 0.16 \quad \text{ومنه:}$$

$$k = 0 \quad \text{ومنه:}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{3} \right); \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right\}$$

$$I = [0; 2\pi[\quad , \quad 2 \cos 2x = -\sqrt{2} \quad \textcircled{4}$$

$$2 \cos 2x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ 2x = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

لدينا: $0 \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi < 2\pi$
 ومنه: $-\frac{3}{8} \leq k < \frac{16}{8}$
 ومنه: $-0.37 < k \leq 1.62$
 ومنه: $k = \{0; 1\}$
 ولدينا: $0 \leq -\frac{3}{8} + k\pi < 2\pi$
 ومنه: $\frac{3}{8} \leq k < \frac{19}{8}$
 ومنه: $0.37 < k \leq 2.3$
 ومنه: $k = \{1; 2\}$
 إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{3\pi}{8}\right); \left(\frac{11\pi}{8}\right); \left(\frac{5\pi}{8}\right); \left(\frac{13\pi}{8}\right) \right\}$$

5 $I = \mathbb{R} , \cos^2 x = \frac{1}{2}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots (*) \\ \text{أو} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \dots (**) \end{cases}$$

نحل المعادلة (*):

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

نحل المعادلة (**):

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right); \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right); \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right); \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right] , \quad 2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \quad \textcircled{6}$$

$$2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

لدينا: $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$
 ومنه: $-0.125 \leq k \leq 1.375$
 ومنه: $k = \{0; 1\}$
 ولدينا: $-\frac{1}{2} \leq \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5}{2}$
 ومنه: $-0.875 \leq k \leq 0.625$
 ومنه: $k = 0$
 إذن:

$$S = \left\{ \left(-\frac{\pi}{4} \right); \left(\frac{7\pi}{4} \right); \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right\}$$

$$I = \mathbb{R} , \quad \cos 2x = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \quad \textcircled{7}$$

$$\cos 2x = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right); \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$I = [-\pi; 2\pi[, \quad \cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0 \quad \textcircled{8}$$

$$\cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{2} \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad \dots (*) \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots (**) \end{cases}$$

نحل المعادلة (*):

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

لدينا: $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi < 2\pi$
 ومنه: $-1.5 \leq k < 1.5$
 ومنه: $k = \{-1; 0; 1\}$

نحل المعادلة (**):

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

لدينا: $-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

ومنه: $-0.625 \leq k < 0.875$

$k = 0$ ومنه:

ولدينا: $-\pi \leq \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

ومنه: $-0.875 \leq k < 0.625$

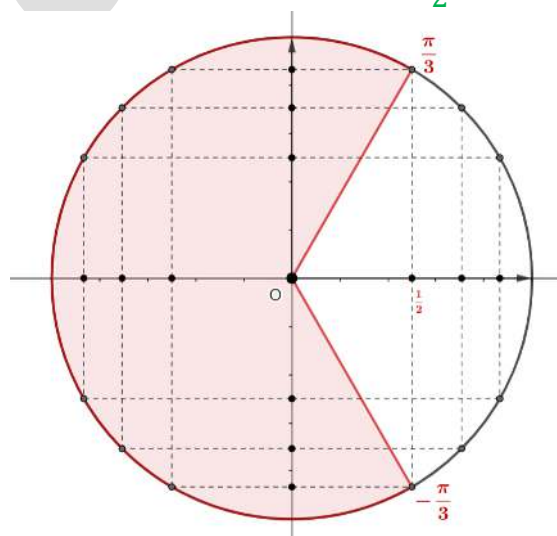
$k = 0$ ومنه:

إذن:

$$S = \left\{ \left(-\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}\right); \left(\frac{3\pi}{4}\right) \right\}$$

حل التمرين 20

① $I =]-\pi; \pi]$ ، $\cos x \leq \frac{1}{2}$

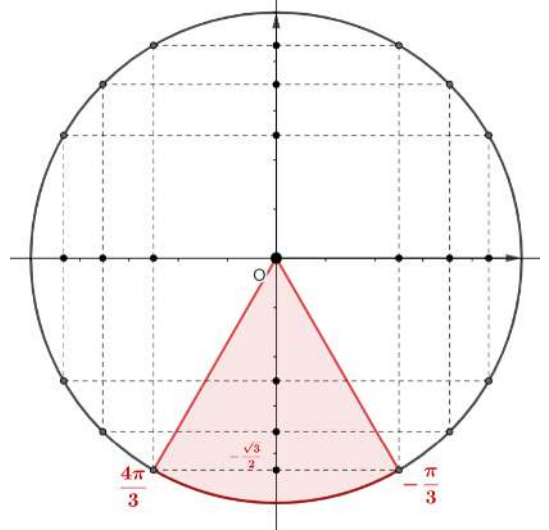


ومنه:

$$S_{]-\pi; \pi]} = \left] -\pi; -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi \right]$$

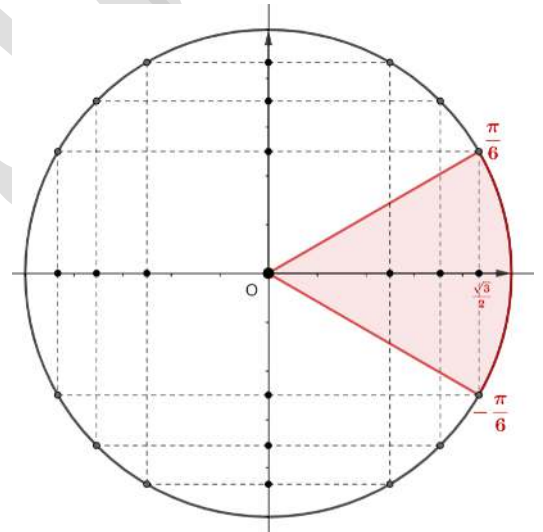
② $I = [0; 3\pi]$ ، $2 \sin x + \sqrt{3} \leq 0$

$$2 \sin x + \sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S_{[0;3\pi]} = \left[\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi \right] = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right]$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; 2\pi \right] , \quad \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ③$$



$$S_{\left] -\frac{\pi}{2}; 2\pi \right]} = \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{6} + 2\pi; 2\pi \right] = \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$$

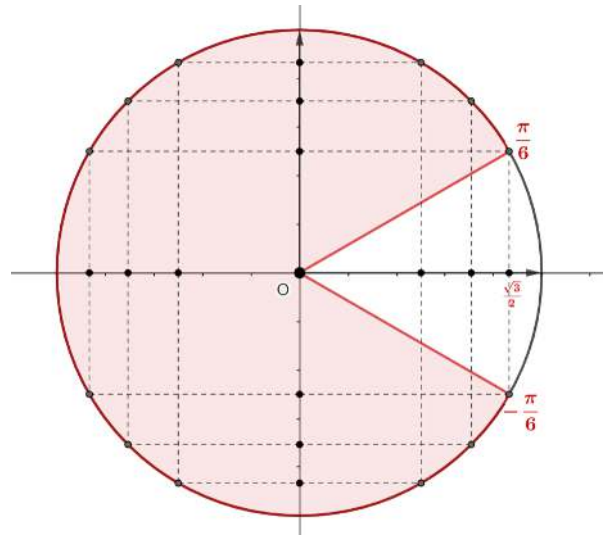
$$I = [0; 2\pi[, \quad -2 \cos 2x + \sqrt{3} \leq 0 \quad ④$$

$$-2 \cos 2x + \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow \cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نضع: $2x = y$
ومنه:

$$\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا: $x \in [0; 2\pi[$ ومنه $2x = [0; 4\pi[$
أي: $y = [0; 4\pi[$



$$S'_{[0;4\pi[} = \left[\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi; -\frac{\pi}{6} + 4\pi \right]$$

$$= \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{13\pi}{6}; \frac{23\pi}{6} \right]$$

ومنه:

$$S_{[0;2\pi[} = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{13\pi}{12}; \frac{23\pi}{12} \right]$$

$$I =]0; \pi] \quad , \quad 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \leq 0 \quad \textcircled{5}$$

$$2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \leq 0 \Rightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{6} \quad \text{نضع:}$$

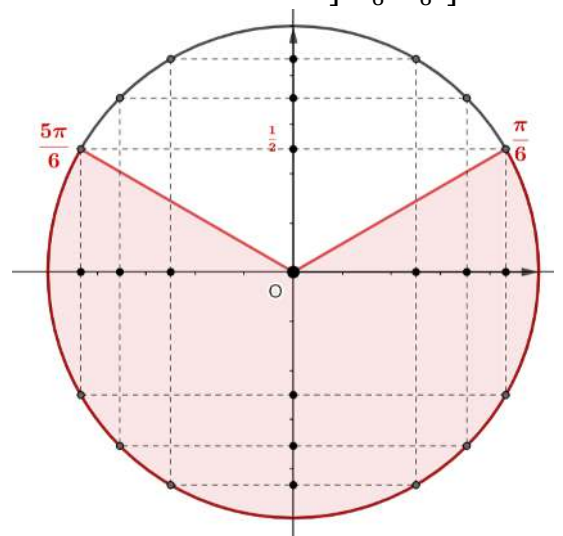
ومنه:

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin y \leq \frac{1}{2}$$

$$\left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \in \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right] \quad \text{ومنه:} \quad 2x \in]0; 2\pi] \quad \text{ومنه:}$$

$$x \in]0; \pi] \quad \text{لدينا:}$$

$$y = \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right] \quad \text{ومنه:}$$



$$S'_{\left] -\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]} = \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]$$

ومنه:

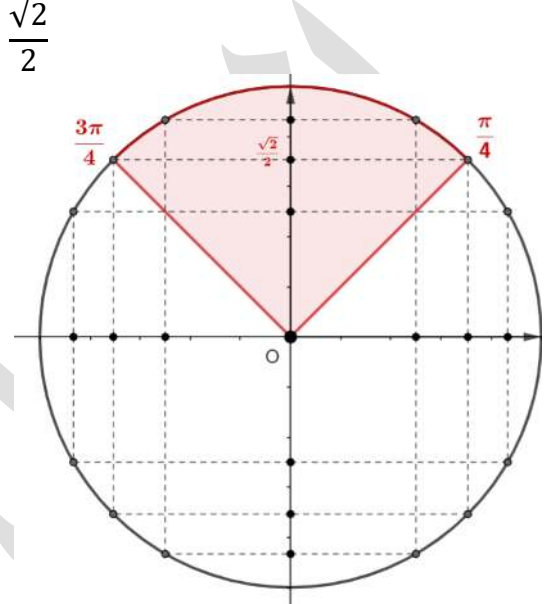
$$S_{[0;\pi]} = \left[\frac{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2}; \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2} \right] \cup \left[\frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2}; \frac{\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2} \right]$$

$$= \left[0; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right], \quad \sqrt{2} \sin x - 1 > 0 \quad \textcircled{6}$$

$$\sqrt{2} \sin x - 1 > 0 \Rightarrow \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$S_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]} = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi; \frac{5\pi}{2} \right] = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2} \right]$$

حل التمرين 21

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\cos x = \sin x \quad \textcircled{1}$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{أو} \\ 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (\text{مرفوض}) \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad ②$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ \frac{\pi}{3} - x = -\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(-\frac{2}{3}k\pi\right); \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \quad ③$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - 3x + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{1}{2}k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{24} - k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{5\pi}{48} + \frac{1}{2}k\pi\right); \left(-\frac{\pi}{24} - k\pi\right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

حل التمرين 22

① تعيين قياسا للزوايا الموجهة التالية: $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ ، $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$ ، $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ ؛ $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ ⤵

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$$

$(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$ ⤵

لدينا:

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) &= \pi \Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC})}{2} \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) \Rightarrow (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ &\Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) \quad \text{⬅}$$

$$(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \boxed{(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{12}}$$

$$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) \quad \text{⬅}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{2}}$$

② حساب مجموع هذه الأقياس:

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \boxed{0}$$

حل التمرين 23

① حساب $P(1)$:

$$P(1) = 2(1)^3 - 7(1)^2 - 7(1) - 2 = \boxed{0}$$

نستنتج أن 1 جذر لـ P

② حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Rightarrow 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)(ax^2 + bx + c) = 0 \\ &\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = 0 \\ &\Rightarrow ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c = 0 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -7 \\ c - b = 7 \\ -c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Rightarrow (x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)(2x^2 - 5x + 2) \\ &\Rightarrow 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ x - \frac{1}{2} = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = \frac{1}{2} \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

إذن:

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; 2 \right\}$$

③ استنتاج حلول المعادلة: $Q(x) = 0$

$$Q(x) = 0 \Rightarrow P(\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \text{أو} \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \text{أو} \\ \sin x = 2 \end{cases}$$

لدينا: $\sin x = 2$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ لأن $2 \notin [-1; 1]$ ومنه:

$$Q(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \dots (*) \\ \text{أو} \\ \sin x = \frac{1}{2} \dots (**) \end{cases}$$

نحل المعادلة (*):

$$\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

نحل المعادلة (**):

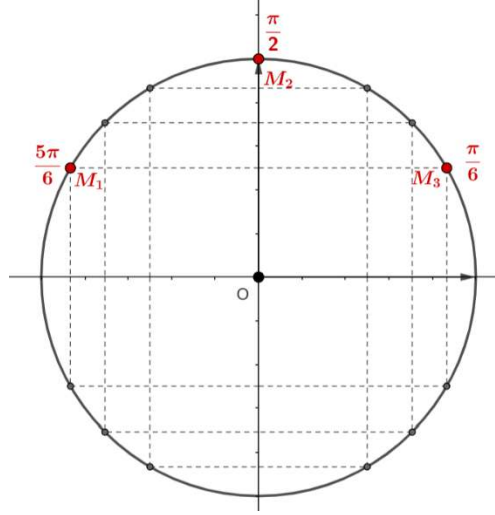
$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right); \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

تمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية:

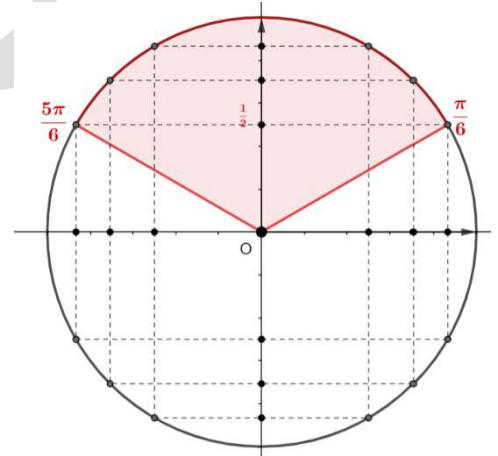


حل التمرين 24

(I) حل في المجال $]-\pi; \pi]$ المترجمات التالية:

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 \geq 0 \quad \text{①}$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$$

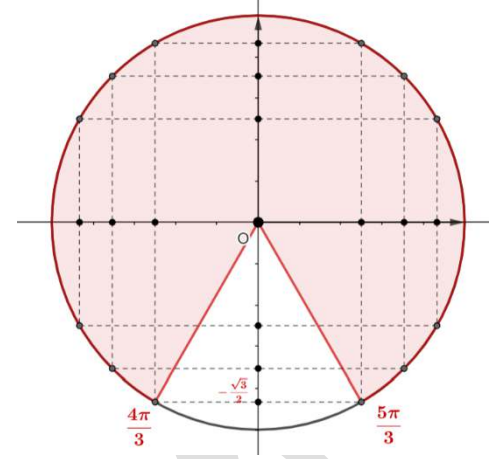


ومنه:

$$S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$-2 \sin x - \sqrt{3} \geq 0 \quad \text{②}$$

$$-2 \sin x - \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



ومنه:

$$S = \left] -\pi; \frac{4\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; \pi \right]$$

$$-\frac{1}{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \geq \sqrt{2} \quad (3)$$

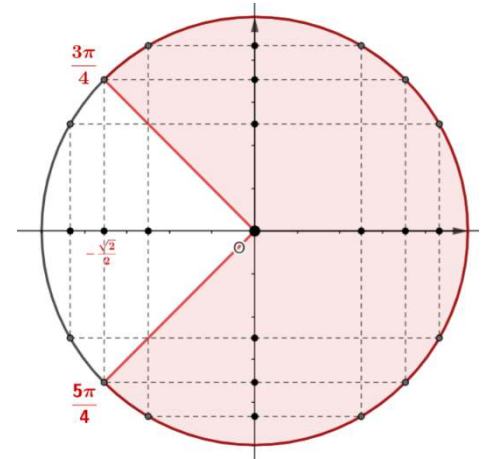
$$-\frac{1}{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \geq \sqrt{2} \Rightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = x - \frac{\pi}{3} \quad \text{نضع:}$$

ومنه:

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(y) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

لدينا: $x \in]-\pi; \pi]$ ومنه: $\underbrace{\left(x - \frac{\pi}{3} \right)}_y \in \left] -\pi - \frac{\pi}{3}; \pi - \frac{\pi}{3} \right]$ أي: $y \in \left] -\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$



ومنه:

$$S'_{\left] -\frac{5\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]} = \left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi \right] = \left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{8\pi}{3} \right]$$

$$S_{]-\pi; \pi]} = \left[-\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}; \frac{8\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right]$$

$$= \left[-\pi; \frac{13\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{19\pi}{12}; 3\pi \right]$$

(II) حساب كلا من:

$$\cos x + \sin x \quad (1)$$

لدينا:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1 + \underbrace{2 \cos x \sin x}_1 = 2$$

ومنه:

$$(\cos x + \sin x)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \\ \text{أو} \\ \cos x + \sin x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\cos x - \sin x$$

②

لدينا:

$$(\cos x - \sin x)^2 = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1 - \underbrace{2 \cos x \sin x}_1 = 0$$

أي:

$$(\cos x + \sin x)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\cos x + \sin x = 0}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

③

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x) \underbrace{(\cos x - \sin x)}_0 =$$

إذن:

$$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = 0}$$

{ هذا من فضل ربي }

♥ زكاة العلم نشره ♥

الأستاذ: قويسم الخليل



ال خليل للرياضيات