



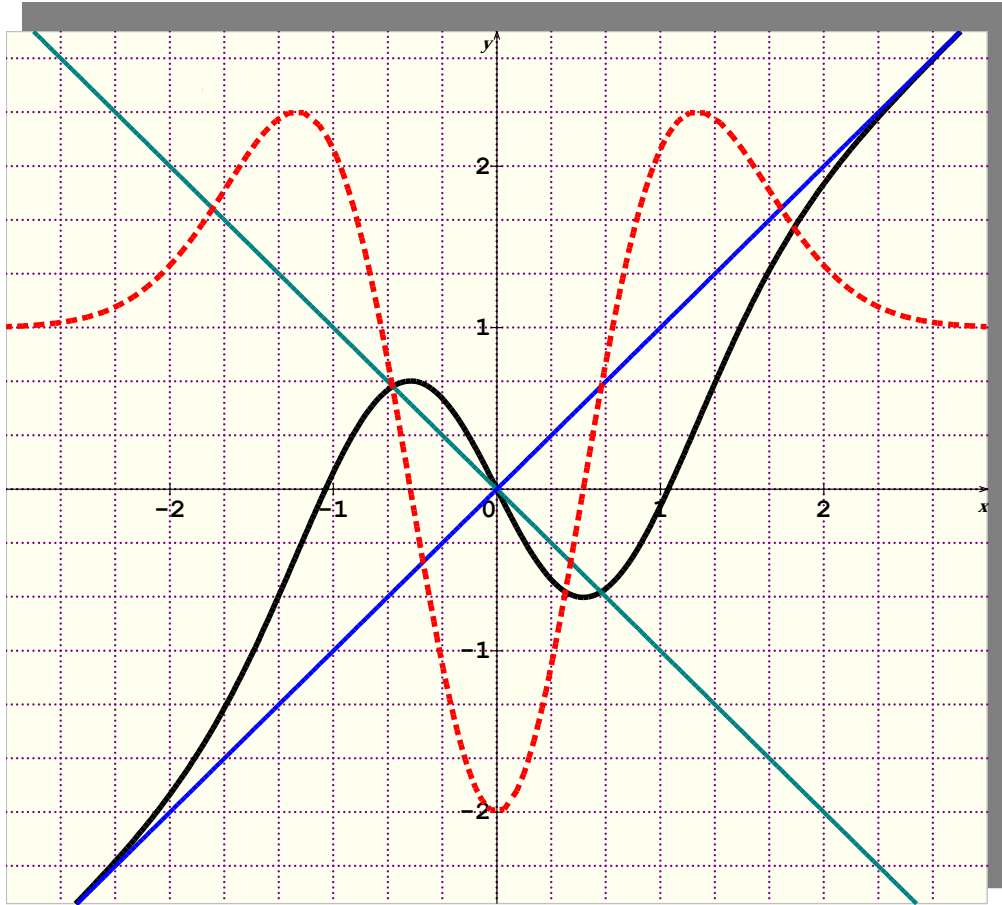
مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الدوال العددية
في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook

مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الدوال العددية
في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

حساب النهايات

الجزء الثاني

الاستمرارية-مبرهنة القيم المتوسطة

الجزء الثالث

الاشتقاقية وتطبيقاتها

الجزء الرابع

تمارين البكالوريات

العلوم التجريبية+تقني رياضي

(1)النصوص (2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الخامس

تمارين مقترحة

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook





الجزء الاول: حساب النهايات

التمرين 01

احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجال تعريفها، ثم فسر النتائج هندسيا في كل حالة

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}, f(x) = \frac{-3x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} \quad (2, D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}, f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 - 1} \quad (1$$

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \quad (4, D_f = \mathbb{R} - \{1; 3\}, f(x) = \frac{4x - 8}{-x^2 + 4x - 3} \quad (3$$

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (6, D_f =]1; +\infty[, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \quad (5$$

التمرين 02

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 3}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

$$(1) \text{ عين كل من الأعداد } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ بحيث من أجل كل } x \in \mathbb{R} - \{3\} : f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

(2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

(3) بين ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.

(4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

التمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 25x - 27}{(x - 2)^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

(3) احسب $\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - (2x - 3)]$ ، ثم فسر هندسيا هذه النتيجة

(2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = 2x - 3$ (Δ)

التمرين 04

I- احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) \quad (4, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad (3, \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (2, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} \quad (1$$

II- اثبت صحة النهايات التالية بطريقة مناسبة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x + 2) = 2 \quad (4, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{2} \quad (3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2 \quad (2, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \quad (1$$

التمرين 05

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - 2x + 1$: دالة عددية معرفة على المجال $D =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ كما يلي:

- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم تحقق $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- (2) جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
- (3) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-3x)] = 2$ ، ثم فسر بيانيا هذه النتيجة .

التمرين 06

$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x + 1}$: دالة عددية معرفة على المجال $D =]-1; +\infty[$ كما يلي:

- أ- بين أن $\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$ من أجل كل x من D .
- عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
- ب- برهن أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، ثم استنتج : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
- ج- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$: ماذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f ؟

التمرين 07

- 1- من أجل كل $x < 0$ ، بين أن : $\sqrt{x^2 + 3x} < -x$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{x^2 + 3x})$
- 2- من أجل كل $0 < x < 1$ ، بين أن : $2x < \sqrt{x^2 - x - 4}$. استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 4} + 2x)$

التمرين 08

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$: ب $\mathbb{R}$ وليكن C_f منحنىها البياني.

- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $\frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$
- (2) استنتج $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$ ، ماذا تعني النتيجة السابقة بالنسبة للدالة f ؟ فسر ذلك بيانيا.
- (3) بين ان (أ) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = 1$ ، (ب) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = -1$
- (4) بين أن المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ مقارب مائل للمنحنى C_f عند $+\infty$
- عين العدد الحقيقي a الموجب بحيث تكون $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + ax] = 0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f



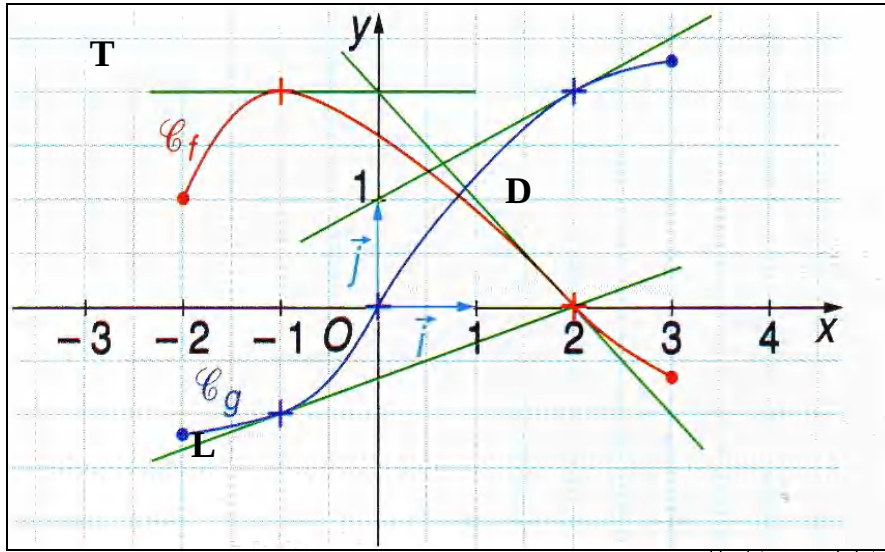
الجزء الثالث: الاشتقاقية وتطبيقاتها

التمرين 13

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة a ، ثم فسر النتيجة بيانياً
 $a = 2$ و $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (3، $a = 1$ و $f(x) = x^2|x-1|$ (2، $a = -1$ و $f(x) = x^2 - 3x$ (1

التمرين 14

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g)
 الممثلين لدالتين f و g معرفتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $[-2; 3]$ وبعض مماساتهما.



(1) أحسب الأعداد المشتقة التالية:

$$(g)'(2) * (f)'(2) * (g)'(-1) * (f)'(-1) *$$

(2) من أجل كل x من المجال $[0; 2]$ نضع: $h(x) = f(2x-1)$.

أ) باستعمال مشتق دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[-2; 3]$

ب) أحسب $h'(0)$ و $h'(\frac{3}{2})$. ثم أكتب معادلات كل من المستقيمات T و D و L

التمرين 15

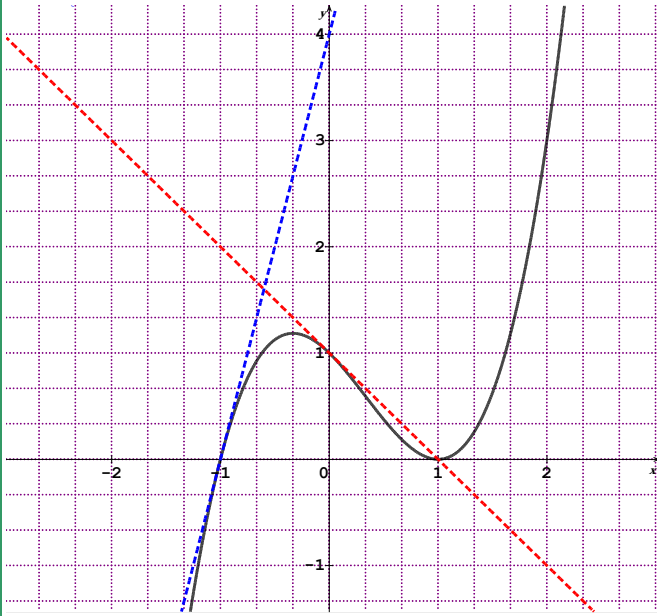
لتكن f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ واليكن (C_f) هو التمثيل البياني لها.

(1) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

(2) أدرس تغيرات الدالة f .

(3) باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" أنشئ (C_f) .

التمرين 16



(C_g) المنحنى المقابل هو التمثيل البياني لدالة عددية g معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $\mathbb{R}$:
 المماسان لـ (C_g) عند نقطتيه A و B فاصلتهما -1 و 0
 (1- I) بقراءة بيانية عين مايلي:
 $g(1)$ ، $g(0)$ ، $g(-1)$ و $g'(1)$ ، $g'(0)$ ، $g'(-1)$
 (2) أكتب معادلات المماسات عند النقط التي فواصلها -1 ، 0 ، 1 لـ (C_g).

(3) حل بيانيا في المجال $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$: المعادلتين

$g(x) = 0$ و $g'(x) = -1$ و المتراجحة $g'(x) \geq 4$

II) نقبل أن : $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c باستعمال نتائج السؤال (1- I) تحقق من النتائج المحصل عليها سابقا.

التمرين 17

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - \alpha + 3}{x} : x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + 2x - \alpha : x > 2 \end{cases}$$
 واليكن (C_f) هو تمثيلها البياني

(1) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون f قابلة للإشتقاق عند 2.

(2) نفرض في هذا الجزء أن: $\alpha = 19$.

(أ) ادرس تغيرات الدالة f على مجالي تعريفها.

(ب) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $(-\infty)$ يطلب تعيين معادلة له.

(ج) اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة ذات الفاصلة 2

(د) هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) توازي حامل محور الفواصل؟ برر اجابتك

التمرين 18

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} : x > 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 3} : x \leq 1 \end{cases}$$
 واليكن (C_f) هو تمثيلها البياني.

(1) تحقق أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1، ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

(2) أكتب معادلتين نصف المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1

(3) ادرس تغيرات الدالة f على مجالي تعريفها

التمرين 19

لتكن f الدالة المعرفة على $D = \mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f ثم عين إشارة كلا من $f'(x)$ و $f(x)$ على D .

(2) لتكن الدوال التالية: $g(x) = f(x^2)$ ، $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $k(x) = f(-2x + 1)$ معرفة بـ: k ، h ، g باستعمال مشتقة دالة مركبة استنتج اتجاه تغير كلا من k ، h ، g .

(3) V ، E ، R دوال عددية معرفة بـ: $R(x) = [f(x)]^2$ ، $E(x) = [f(x)]^3$ ، $V(x) = \frac{1}{f(x)}$

(أ) عبر عن كلا من $R'(x)$ و $E'(x)$ و $V'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$
(ب) شكل جدول تغيرات كلا من الدوال V ، E ، R .

التمرين 20

f دالة معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على كلا من $]-\infty; 2[$ و $]2; +\infty[$ جدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
f(x)	4		$+\infty$	$+\infty$	-2
		1		0	

واليمكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1-أ) فسر بيانيا، كل نهاية لـ f ، عين نهاية $f\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$.

(ب) بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حدا وحيدا على $]0; 2[$.

(2-أ) g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بالشكل: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ؛ $x \neq 2$ و $g(2) = 0$

عين نهايات الدالة g عند $+\infty$ ، $-\infty$ و 3. ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

التمرين 21

اليك جدول تغيرات الدالة العددية f والمعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني

x	$-\infty$	α	1	2	5	$+\infty$
f'(x)		-		-	0	+
f(x)	2020			$+\infty$	0	-2
		0			-3	
			$-\infty$			

من خلال قراءتك لجدول التغيرات اجب عن مايلي:

- 1) احسب نهايات الدالة f على أطراف مجال التعريف، ثم اكتب معادلات المستقيمات المقاربة لـ C_f
- 2) حدد اتجاه تغير الدالة f
- 3) عيّن حلول المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على مجالي تعريفها.
- 4) g دالة معرفة بـ: $g(x) = [f(x)]^2$.
أ) احسب نهايات الدالة g على أطراف مجال التعريف
ب) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن: $g'(x) = 2f(x).f'(x)$.
ج) حدد اتجاه تغير الدالة g ، ثم ارسم جدول تغيراتها.

التمرين 22

- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 4cm.
- f دالة معرفة على $[-1;1]$ بـ: $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني.
- 1- بين ان الدالة f فردية
 - 2- احسب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ فسر النتيجةين هندسيا.
 - 3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها
 - 4- أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند مبدأ الاحداثيات.
ب) ادرس وضعية المماس (T) والمنحنى (C_f) ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
 - 5- ارسم كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f) .

التمرين 23

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوى منسوب الى المعلم

المتعامد المتجانس (الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية :

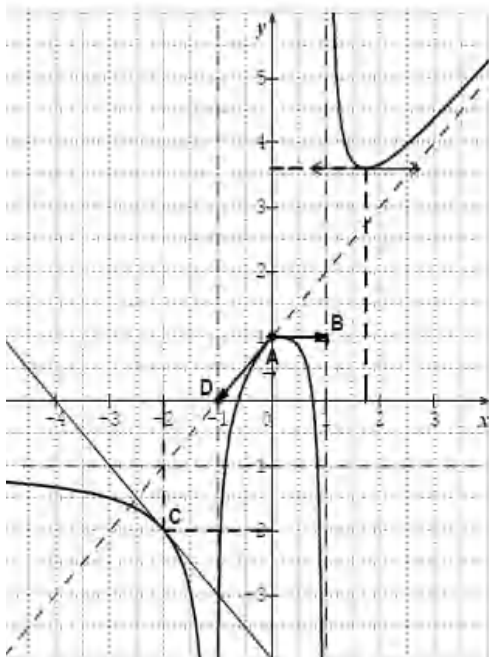
أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- شكل جدول تغيرات f

2- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1$ ثم فسر بيانيا هذه النهاية.

3- عين $f(0)$ ، $f'(-2)$ ، $f'(0)$ و $f'_-(0)$.

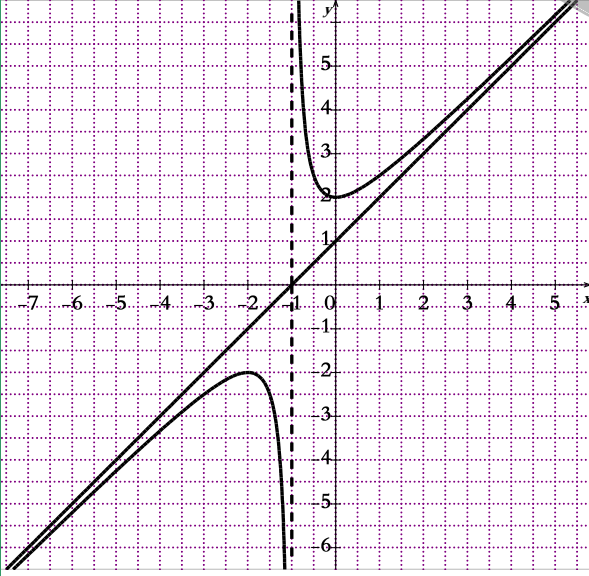
هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0؟ برر اجابتك.



4- حل بيانيا المعادلات والمتراجحات التالية: $f(x) = 0$ و $f'(x) \geq 0$

5- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) - x = m$

التمرين 24



في الشكل المقابل (C_f) هو منحنى لدالة f .

(1) بقراءة بيانية، عيّن :

(أ) مجموعة التعريف الدالة f . ثم نهايات f عند أطراف D

(ب) المستقيمت المقاربة لـ (C_f) ومعادلتهما.

(ج) الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل

(د) إشارة كلا من $f(x)$ و $f'(x)$

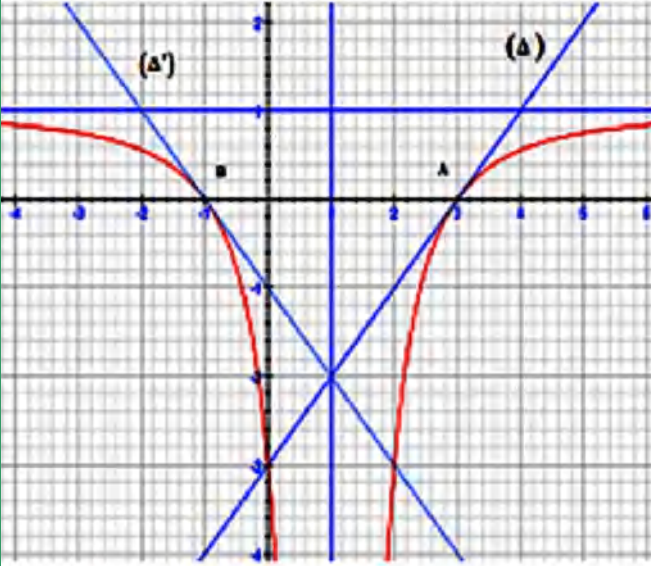
(2) دالة معرفة بـ: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و (C_g) تمثيلها البياني

(أ) بين أن مجموعة تعريف g هي: $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

(ب) أوجد نهايات g عند -1 وعند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا.

(ج) ادرس اتجاه تغير g ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

التمرين 25



المنحنى C_f الموالي هو التمثيل البياني

لدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ و (Δ) ، (Δ') المماسين

لـ C_f في النقطتين $A(3; 0)$ و $B(-1; 0)$

(1) بقراءة بيانية:

أ- جد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب- حدّد إشارة $f(x)$ ، ثم إشارة $f'(x)$.

ج- شكل جدول تغيرات f .

د- جد $f'(3)$ و $f'(-1)$. ثم جد معادلة (Δ) و (Δ')

(2) نقبل أن: $f(x) = \frac{x^2 - ax + b}{(x-1)^2}$

استقد من الإجابة عن السؤال (1) ج- لتعيين العددين الحقيقيين a و b .

(3) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب- شكل جدول تغيرات h .

التمرين 26

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + 2}$ واليكن (C_f) هوثمثيلها البياني.

(1) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(1; -3)$ مماسا ميله $\frac{2}{3}$

(2) نفرض أن $\alpha = -3$ و $\beta = -7$

(أ) هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم الذي معادلته: $y = x - 1$ ؟ برر جوابك

(ب) بين المنحنى (C_f) يقبل مماسين عموديين على المستقيم الذي معادلته: $4y - x = 0$.

(ج) بيّن المنحنى (C_f) يقبل مماسين يوازيان حامل محور الفواصل.

التمرين 27

I- f دالة كثيرة حدود معرفة بـ: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

(1) برر استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

(2) ادرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا α في $[2; 1]$ ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1}

(4) استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$

II- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x$

(1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات g .

(2) بيّن أن $g(\alpha) = -\frac{1}{4}(\alpha^2 + 3)\alpha$ ثم جد حصرا للعدد $g(\alpha)$ واستنتج عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$

التمرين 28

المنحنى C_f المقابل هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \text{ على } D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

(1) بقراءة بيانية:

- احسب النهايات على الأطراف المفتوحة من (D) ،

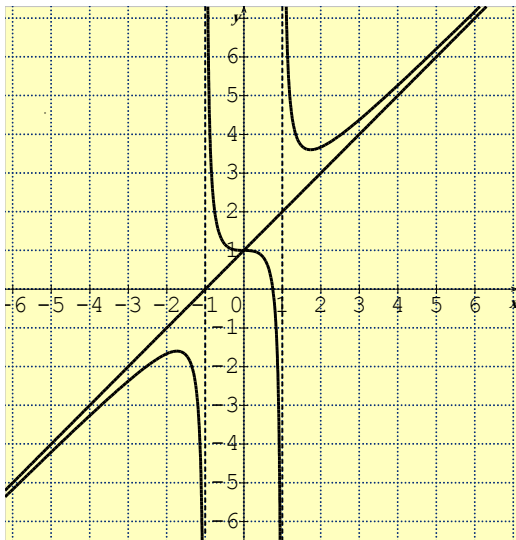
- عين المستقيمات المقاربة.

(2) تحقق حسابيا من نتائج السؤال السابق.

(3) من أجل كل عدد حقيقي x من (D) ، احسب $f'(x)$

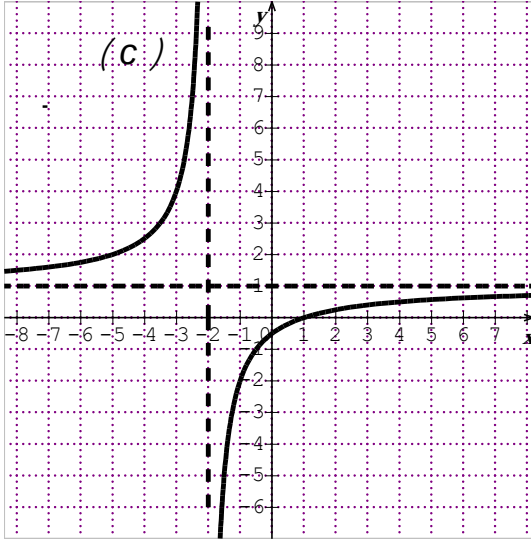
ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) من أجل كل عدد حقيقي x من (D) احسب $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيًا.



التمرين 29

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ ، التمثيل البياني في مستوى منسوب الى المعلم المتعامد



المتجانس (الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية :

أ. شكل جدول تغيرات g

ب. عين قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$

ج. حدد إشارة g(x) حسب قيم x

2. f دالة المعرفة على $[-1; 1[\cup]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب. جد عبارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ج. شكل جدول تغيراتها ، ثم ارسم المنحنى (c_f) الممثل للدالة f

التمرين 30

f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ب: $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ب: $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

أ) أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1; -0.5[$

2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا.

ب) استنتج أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما x، $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$. ثم شكل جدول تغيرات f

3) أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$.

ب) عين معادلة المماس (d) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها -1.

4) احسب $f(\alpha)$. ثم أرسم (Δ) ، (d) و (C).



الجزء الثالث: تمارين البكالوريا

العلوم التجريبية

التمرين 31 دورة 2014

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$).

(4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

(5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

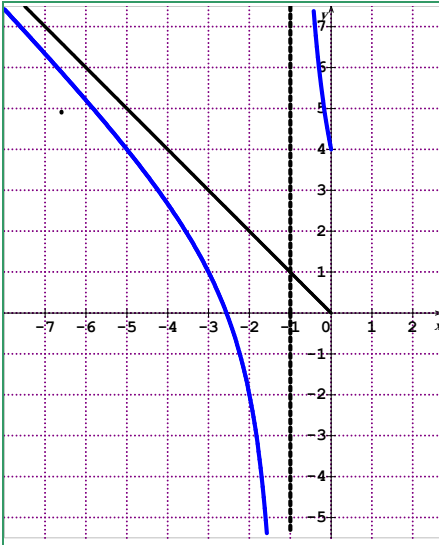
6- لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب) أستنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h) .

التمرين 32 دورة 2009

I) f دالة معرفة على المجال $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ ب: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$



و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) كما هو مبين في الشكل المقابل

(1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه f شكل جدول تغيراتها.

(2) g دالة معرفة على $[0; +\infty[$ ب: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$

يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس تغيرات g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) أ) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج، ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتين نصفين المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

التمرين 33 دورة 2008

(3) أرسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g

المعرفة على $I =]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1- أ) بقراءة بيانية :

شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ وإشارة $g(0,5)$

ب) علل وجود عدد حقيقي $\alpha \in]0; 0,5[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I

(2) f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$ و (Γ) تمثيلها

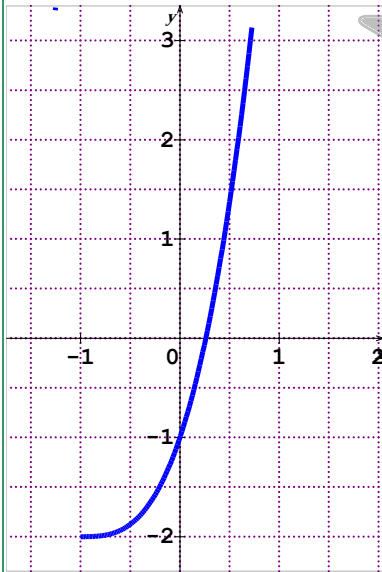
أ) تحقق أنه من أجل كل $x \in I$ $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بيانياً.

ج) جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ فسر النتيجة بيانياً.

د) شكل جدول تغيرات f

3) نأخذ: $\alpha = 0,26$. أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} . ب) أرسم المنحنى (Γ) .



تقني رياضي

التمرين 34 دورة 2017

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1- أدرس إتجاه تغير الدالة g .

2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α حيث $[-1, 47; -1, 48]$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 2)^2}$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2- أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3- بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

4- ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

التمرين 35 دورة 2009

f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$: ب: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ- بين أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما (D) : $y = x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D) .

3- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1,3 < x_0 < 1,4$.

ب- أكتب معادلة (Δ) مماساً للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب.

ج- أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4) g دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$: ب: $g(x) = |f(x)|$ واليكن (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم

أ- بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه.

ب- ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m^2$

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) بيّن أن f دالة فردية.

(2) اثبت أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

(3) ادرس تغيرات الدالة f.

(4) اكتب معادلة للماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

(5) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

(6) بيّن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$

ثم استنتج معادلة (D') المستقيم المقارب الآخر

(7) أرسم (D) و (D') و (C_f) في المعلم السابق.

(8) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$

أبيّن أن الدالة g زوجية.

ب) إنطلاقاً من (C_f) أرسم (C_g) في نفس المعلم السابق.



الجزء الرابع: تمارين مقترحة

التمرين 37



I- المنحنى (C_g) الموالي هو التمثيل البياني للدالة g

المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 + ax + b$.

1. بقراءة بيانية:

(أ) عيّن $g(-1)$ ؛ $g(1)$ ، $g'(0)$ و $g''(0)$

(ب) شكل جدول تغيرات g .

2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α

في المجال $]-2, 2[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

3. أحسب $g'(x)$ ، ثم بيّن أن: $a = -3$ و $b = 3$

II- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x^4 - 6x^2 + 12x)$

1. (أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 4g(x)$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أن $f(\alpha) = -3\alpha(\alpha - 3)$ ، ثم احصر $f(\alpha)$.

III- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x) = f(-|x|)$. وليكن (C_k) تمثيلها البياني

1. تحقق أن k زوجية.

2. دون دراسة تغيرات k ، استنتج جدول تغيراتها.

3. هل k قابلة للإشتقاق عند 0؟ علّل إجابتك.

التمرين 38

دالة عددية جدول تغيراتها التالي

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

نفرض أن $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية.

(1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c

(2) اعتماداً على جدول التغيرات للدالة f :

أ) عين الأعداد الحقيقية a, b, c

ب) عين $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة ببيان.

ج) قارن بين صورتَي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا اجابتك.

3) نأخذ فيما يلي أن : $a = b = c = 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ) بين أن عندما يؤول x إلى $(-\infty)$ و $(+\infty)$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y = x + 1$.
ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج) أثبت أن النقطة $\omega(-1; 0)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

د) أرسم المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) ثم أرسم المنحنى (C_f) .

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = m + 2$.

التمرين 39

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ : $g(x) = ax + b - \frac{1}{x-3}$

حيث a و b عددين حقيقيين و ليكن (C) تمثيلها البياني .

1) عين كل من a و b علما أن :

(C) يمر بالنقطة $A(2; 1)$ ويقبل في هذه النقطة مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

2) بين أن النقطة $I(3; 3a + b)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ : $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 7}{x-3}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{3\}$ ، $f(x) = g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) احسب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x + 2)]$ ماذا تستنتج ؟

4) أدرس الوضع النسبي (C_f) والمستقيم المقارب المائل (Δ)

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 3 يطلب تعيين معادلتيهما

6) أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

7) باستعمال المنحنى (C_f) حدد حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $f(x) = 3x + m$.

التمرين 40

- f دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = |x| + \sqrt{x^2 - 1}$
- واليك (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- أدرس شفعية الدالة f ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$
 - بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
 - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 من اليمين وفسر النتيجة بيانيا.
 - أدرس إتجاه تغير f على $[1; +\infty[$ ثم استنتج إتجاه تغيراتها على $]-\infty; -1]$ وشكل جدول تغيراتها
 - بين أن (C) يقطع المستقيم ذي المعادلة: $2y = 5$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1 < \alpha < 2$
 - أرسم المستقيمت المقاربة والمنحنى (C).

التمرين 41: بكالوريا 1980

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$
- يرمز $\mathcal{C}$ إلى المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- أدرس تغيرات الدالة f . استنتج معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحنى $\mathcal{C}$.
 - أكتب معادلة لمماس المنحنى $\mathcal{C}$ عند نقطته ذات الفاصلة 5.
 - أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى $\mathcal{C}$. أرسم المنحنى $\mathcal{C}$.
 - نعتبر الدالة f_m المعرفة ب: $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$ حيث m وسيط حقيقي.
- أ- أدرس تغيرات الدالة f_m واستنتج المستقيمين المقاربين لمنحنى $\mathcal{C}_m$.
- ب- بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات $\mathcal{C}_m$.
- ج- ما هو المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين (4;1) ؟

التمرين 42: بكالوريا 1997

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$ ب: $f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2}$
- نسمي $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس.
- 1 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c ، بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

$$f(x) = a + \frac{b}{2x-1} + \frac{b}{x-2}$$

- 3) أدرس تغيرات الدالة f ثم أكتب معادلة لكل من المستقيمت المقاربة للمنحنى $\mathcal{C}_f$.

- (4) أكتب معادلة لمماس المنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
 (5) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f وحامل محور الفواصل .
 (6) أرسم المنحني .

التمرين 43: بكالوريا 1997

(1) لتكن الدالة العددية f والمعرفة $\mathbb{R} - \{-1\}$ كمايلي: $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$

نسمي (C) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- بين أن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ، $f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$

2- أدرس تغيرات الدالة f .

3- أكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني (C)

4- بين أن (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $[-0,37; -0,25]$ $x_0 \in$

5- أكتب معادلة مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

6- أرسم المنحني (C)

7- لتكن المعادلة: $2x^3 + (7-m)x^2 + 2(4-m)x + 2-m = 0 \dots (e)$ حيث m وسيط حقيقي و x هو المجهول

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن (e) تكافئ المعادلة $f(x) = m$.

ب- أستعمل المنحني (C) لدراسة حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (e)

التمرين 44: بكالوريا 1997

لتكن الدالة العددية f والمعرفة $\mathbb{R} - \{-1\}$ كمايلي: $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) عيّن الأعداد الحقيقية α, β, γ بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{(x+1)} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) عيّن المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) .

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل .

أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل

4) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1.

5) أنشئ المماس والمنحني (C_f)

التمرين 45

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x + \frac{x-2}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $f'(x) = \frac{-x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$.

(3) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المستقيم $(D): y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

(5) عين معادلة المماس لـ (C_f) عن النقطة التي فاصلتها -1، ثم استنتج قيمة تقريبية لـ $f(-1.25)$.
(6) أرسم (D) و (C_f) .

(7) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ و (C_g) تمثيلها البياني. إذا علمت أن (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ عين عبارة $g(x)$ ثم أرسم (C_g) .

التمرين 46

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-2}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

I عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته: $y = x - 3$ ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

II نفرض في كل مايلي: أن $a = 1$ و $b = -5$ و $c = 7$
(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ، يطلب إعطاء معادلتَي المماسين (D_1) و (D_2) .

(3) أرسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحنى (C_f) .

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) + 3x - m = 0$.

(5) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ $g(x) = f(|x|)$.

(أ) بين أن الدالة زوجية.

(ب) أدرس قابلية اشتقاق g عند 0.

(ج) بين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحنى g انطلاقاً من (C_f) ، ثم أرسم (C_g) في نفس المعلم السابق.

التمرين 48

I - g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 - 3x - 3$ يرمز (C_g) إلى منحنىها البياني
(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α من المجال $]2,1; 2,2[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
(3) عدد حقيقي كفي من $\mathbb{R}$ ؛ احسب $g(-x) + g(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً .

II - f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$ بـ : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$ يرمز (C_f) إلى منحنىها البياني

(1) بيّن - من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$: $f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

(2) ادرس تغيرات الدالة f .

(3) أثبت أن $f(\alpha) = 3\alpha$ ، و استنتج حصر α لـ $f(\alpha)$.

(4) برهن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f)

- ادرس وضعيّة (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(5) بيّن أنه يوجد مماسان لـ (C_f) يوازيان (Δ) . (يطلب إعطاء فاصلتي نقطتي التماس فقط).

(6) أنشئ المنحني (C_f) .

(7) ناقش بيانياً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$2x^3 - mx^2 + m + 3 = 0$$

III - h دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$ بـ : $h(x) = \frac{2|x|^3 + 3}{x^2 - 1}$

(1) أثبت أن h دالة زوجية .

(2) بيّن أنه يمكن استنتاج (C_h) من (C_f) ، ثم أنشئه في نفس المعلم .

التمرين 49

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. ا. احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف .

ب. اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2. ا. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارته .

ب. شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3. ا. بيّن أن المستقيمين $(\Delta): y = x + 1$ و $(\Delta'): y = -x - 1$ مقاربان للمنحني (C_f) .

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

(ج) بيّن أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين إحداهما فاصلتها α في المجال $]0,5;1[$ ، و الثانية فاصلتها β في المجال $]-2;-1,5[$.

(د) أنشئ المنحني (C_f) .

4. يُعطى المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = mx + 1$ ، حيث m وسيط حقيقي.

(أ) بيّن أنه عندما يتغير m في $\mathbb{R}$ ، فإن (D_m) يدور حول نقطة يطلب تعيينها.

(ب) ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $|x+1| + \frac{x}{x^2-1} - mx = 1$.

التمرين 50

دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ و (C_f) منحنىها في $M^3(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2. (أ) بيّن أنه، مهما كان x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

(ب) برهن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$.

3. شكل جدول تغيرات f .

بيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

4. عيّن إحداثيّ نقطة تقاطع (C_f) مع محور الترتيب، ثم أنشئ المنحني (C_f) .

التمرين 51

I (أ) الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = ax^3 - 3x + b$ و (C_g) هو تمثيلها البياني

1) عين العددين الحقيقيين a, b علماً أن (C_g) يقبل مماساً معادلة $y = -6$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيرات g

3) بين أن المعادلة: $x^3 - 3x - 4 = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha \in]2; 2,25[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II (أ) دالة معرفة على $]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب نهايات f عند حدود مجال التعريف

2-أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ ، ثم احسب $f'(x)$

(ب) تحقق أن $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2-1)^2}$ و استنتج إشارته، ثم ارسم جدول تغيرات f

3) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 10\alpha + 8}{2\alpha + 4}$ ، ثم عيّن حصاراً لـ $f(\alpha)$

5) احسب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x + 2))$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له

6) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

7) أنشئ المنحنى (Δ) والمستقيم (C_f) .

التمرين 52

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{(x+a)^2}{x^2+b}$ ، حيث: a و b عدنان حقيقيان غير معدومين.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- عين العددين a و b إذا علمت أن معادلة المماس (Δ) عند النقطة فاصلتها 0 هي: $y = 2x + 1$

2- أثبت أن المستقيم معادلته: $y = 1$ مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f .

3- بوضع: $a = b = 1$

أ- أثبت من أجل كل عدد حقيقي x أن: $f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

ب- عين اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- حدد الوضعية النسبية لمنحنى الدالة f و المماس (Δ) ، ماذا يمكن القول عن النقطة $A(0,1)$ ؟

د- بين أن النقطة $A(0,1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

هـ- ارسم المنحنى (C_f) و المماس (Δ) .

4- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

استنتج جدول تغيرات الدالة g انطلاقاً من جدول تغيرات الدالة f

مجلة الرائد في الرياضيات

الحلول

الجزء الاول
العلوم التجريبية

الجزء الثاني
تقني رياضي

BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook



الجزء الثالث: تمارين البكالوريا

العلوم التجريبية

التمرين 31 دورة 2014

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

لدينا: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ وتشكيل جدول تغيراتها.

* اتجاه التغير الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

$g'(x) > 0$ لأن $g'(x)$ يميز العبارة $6x^2 - 8x + 7$ سالبة ومعامل x^2 موجب ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

* جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2-أ) تبين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

من الجواب السابق الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما

على المجال $]0,7; 0,8[$ و $g(0,7) \times g(0,8) < 0$ لأن:

$g(0,7) = -0,37$ و $g(0,8) = 0,06$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

وحيد $\alpha \in]0,7; 0,8[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

ب) استنتاج اشارة $g(x)$ وذلك حسب قيم x

من جدول تغيرات الدالة g ومن الجواب 2-أ) نستنتج أن:

$x \in]-\infty; \alpha[$ معناه $g(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$

و $x \in]\alpha; +\infty[$ معناه $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$

1-II) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$

2-أ) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[(x+1) + \frac{1-3x}{2x^2-2x+1} \right] = \frac{1}{2} \frac{(x+1)(2x^2-2x+1) + 1-3x}{(2x^2-2x+1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{(x+1)(2x^2-2x+1) + 1-3x}{(2x^2-2x+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{2(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)} = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) وتعيين معادلة له .

من العبارة: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-3x}{2x^2-2x+1} = 0$ لدينا $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$

وعليه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته: $y = \frac{1}{2}(x+1)$.

(ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \frac{1-3x}{2x^2-2x+1}$ وهي إشارة $(1-3x)$ لأن المقام موجب تماما و من الجدول المقابل نستنتج مايلي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$1-3x$	+	0	-

* إذا كان $x \in]-\infty; \frac{1}{3}[$ فإن (C_f) يكون فوق (Δ)

وإذا كان $x \in]\frac{1}{3}; +\infty[$ فإن (C_f) يكون تحت (Δ)

* إذا كان $x = \frac{1}{3}$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

3-أ) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1) - (4x-2)(x^2-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{(2x^4-4x^3+7x^2-4x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2} \text{ ومنه:}$$

(ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f .

* إشارة $f'(x)$: إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة البسط $x.g(x)$ لأن المقام دوما موجب. إشارة البسط $x.g(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
إشارة x	-	0	+	+
إشارة g(x)	-	-	0	+
إشارة f'(x)	+	0	-	+

* جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)	$-\infty$	1	f(α)	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ وحل المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

لدينا: $f(1) = 0$.

$f(x) = 0$ معناه $x^3 - 2x + 1 = 0$ معناه $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$ لأن $f(1) = 0$

معناه $(x-1) = 0$ أو $(x^2 + x - 1) = 0$ أي $x = 1$ أو $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ أو $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

ملاحظة: حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) وحامل محور الفواصل.

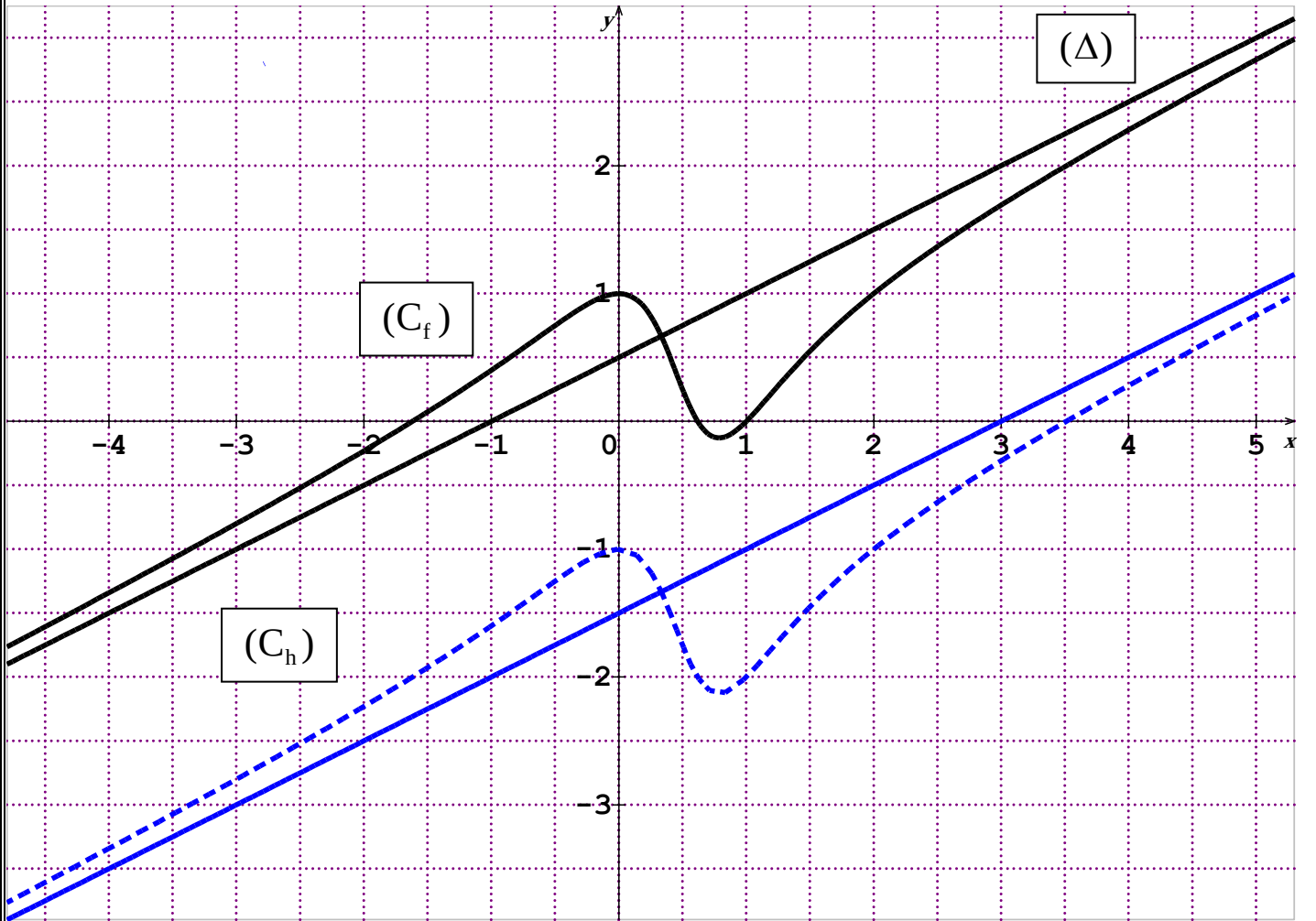
5) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (يوجد في آخر الحل رفقة المنحنى (C_f))

6- أ) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

لدينا: $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^3 - 2x + 1) - 2(2x^2 + 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1} = f(x) - 2$

ب) استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط وتعيينه، ثم رسم (C_h)

من العبارة $h(x) = f(x) - 2$ نستنتج أن: هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



التمرين 32 دورة 2009

I-1 أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{4}{x+1} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{4}{x+1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب) تشكيل جدول التغيرات بقراءة بيانية

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$	-		-
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 4

2- أ) حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

ب) التحقق من أن (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) = 0 \quad \text{لأن } y = x \text{ ذو المعادلة } (\Delta)$$

ج) دراسة تغيرات الدالة g

أتجاه التغير لدينا: g قابلة للإشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ حيث:

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$ معناه $(x-1)(x+3) = 0$ معناه: $x=1$ أو $x=-3$ مرفوض
إشارة المشتق هي حسب إشارة $x-1$ وعليه جدول تغيرات هو كالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	+	
$g(x)$	4 ↘ 3		↗ $+\infty$

II-1 أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ والاستنتاج

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-h - 5}{h+1} = -5$$

نستنتج أن k ليست قابلة للإشتقاق عند 0 لأن العدد (-3) لا يساوي (-5) .

(ب) اعطاء تفسيراً هندسياً للنتيجة

k قابلة للإشتقاق من اليمين وقابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفين مماسين عند النقطة التي فاصلتها 0. النقطة التي احداثياتها $(0; 4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k

(2) كتابة معادلتين المماسين (Δ_1) و (Δ_2)

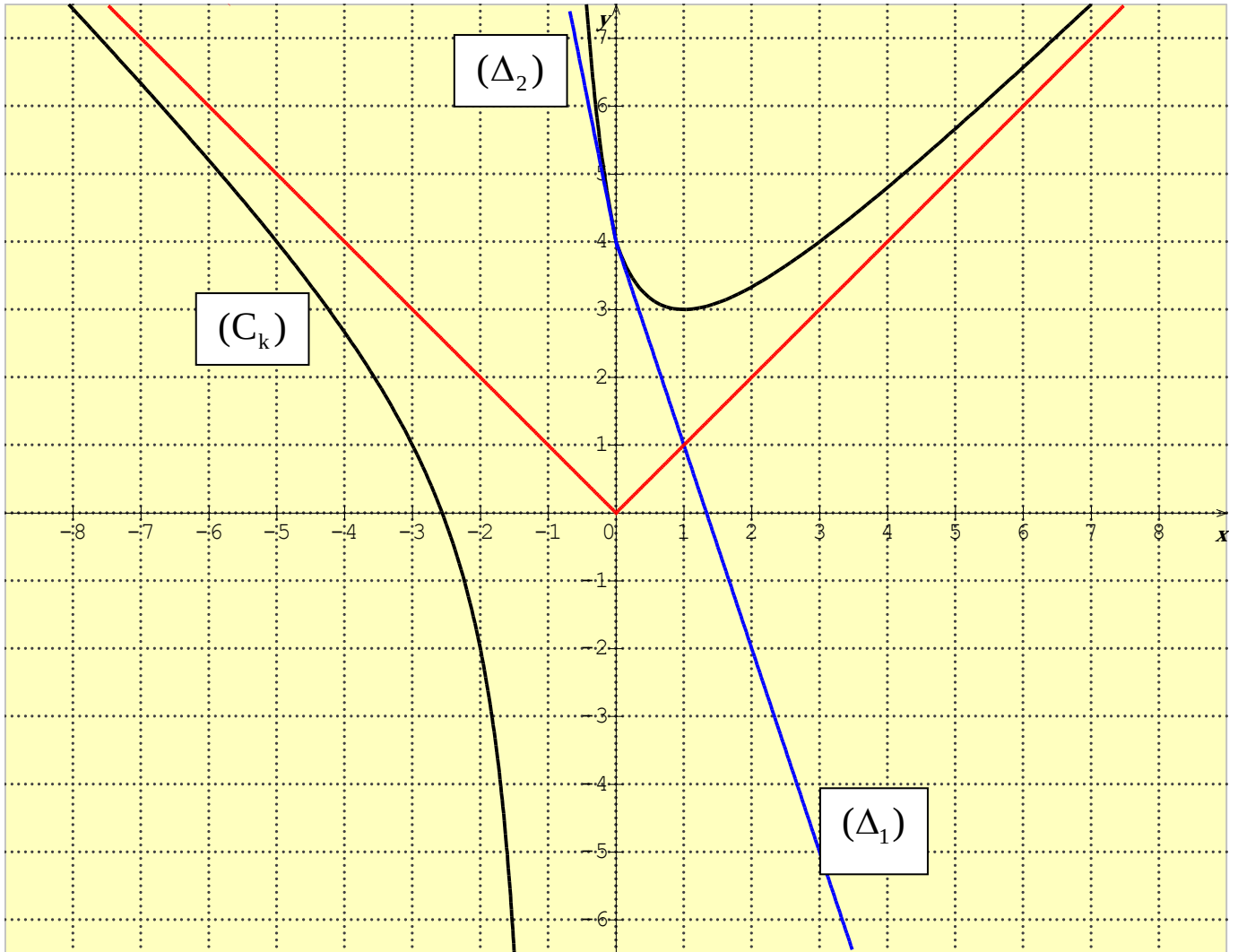
* (Δ_1) هو نصف المماس عند $x_0 = 0$ حيث $x_0 \geq 0$ لدينا: $y = k'(0)(x - 0) + k(0)$ أي $y = -3x + 4$

* (Δ_2) هو نصف المماس عند $x_0 = 0$ حيث $x_0 \leq 0$ لدينا: $y = k'(0)(x - 0) + k(0)$ أي $y = -5x + 4$

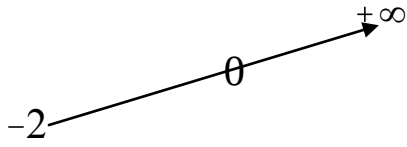
(3) رسم كلا من (Δ_1) و (Δ_2) والمنحنى (C_k)

لرسم المنحنى (C_k) نلاحظ: إذا كانت $x \leq 0$ فإن: $k(x) = f(x)$ ومنه: $(C_f) = (C_k)$

إذا كانت $x \geq 0$ فإن: $k(x) = g(x)$ ومنه: $(C_g) = (C_k)$



x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$			



1-أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g بقراءة بيانية

من البيان يمكن استنتاج الجدول المقابل

تحديد $g(0)$ وإشارة $g(0.5)$

من البيان لدينا $g(0) = -1$ وإشارة $g(0.5) > 0$

ب) تعليل وجود عدد حقيقي $\alpha \in]0; \frac{1}{2}]$ يحقق $g(\alpha) = 0$

g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0; \frac{1}{2}]$ و $g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]0; \frac{1}{2}]$ يحقق $g(\alpha) = 0$

ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

إذا كانت $x \in]-1; \alpha[$ فإن $g(x) \in]-2; 0[$ ومعناه $g(x) < 0$

و إذا كانت $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) \in]0; +\infty[$ ومعناه $g(x) > 0$

2-أ) التحق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3} \text{ ومنه}$$

ب) تعيين $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ دون حساب

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = 0 \text{ لدينا}$$

من النتيجة السابقة نستنتج أن للمنحنى (Γ) مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(\alpha)$

ج) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$. التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى (Γ) مقارب يوازي

حامل محور الترتيب معادلته: $x = -1$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$ التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى (Γ) مقارب

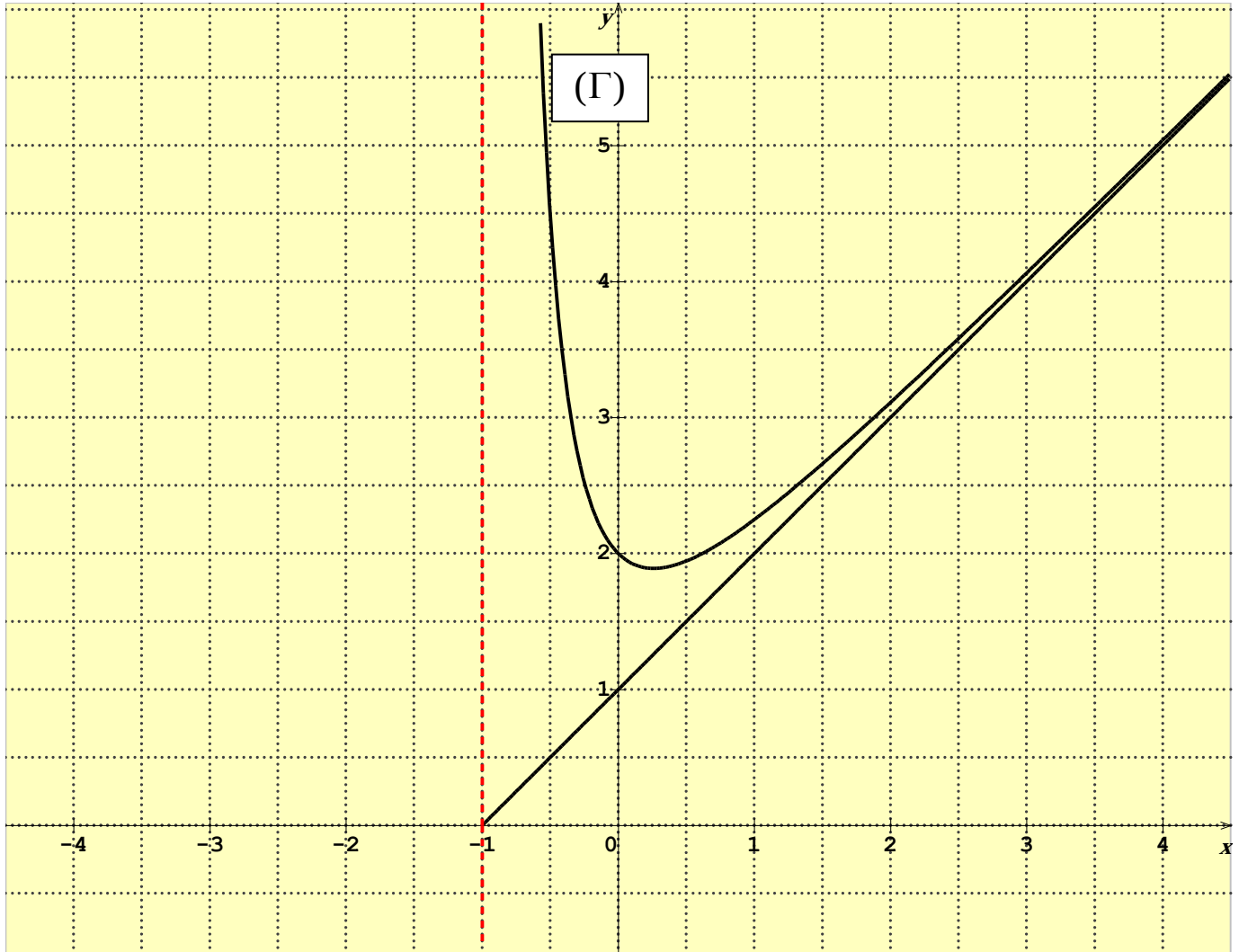
مائل معادلته: $y = x + 1$ في جوار $+\infty$

3-أ) تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}

لدينا: $f(0,26) = 1,89$ ومنه مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} هو 1,89
 إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب) رسم المنحنى (Γ)



I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 3x^2 + 6$

لدينا: $g'(x) > 0$ وعليه تكون الدالة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1,48; -1,47[$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ و $g(-1,48) < 0$ و $g(-1,47) > 0$ وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $-1,48 < \alpha < -1,47$ وذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب 1 و 2 السابقين نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 2) - 2x(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x[3x(x^2 + 2) - 2(x^3 - 6)]}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x[3x^3 + 6x - 2x^3 + 12]}{(x^2 + 2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$ فنستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$ وحسب الجدول

x	-	α	+	0	+
$g(x)$	-	0	+		+
x	-	0	-	0	+
$xg(x)$	+	0	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					

2-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) إذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) إذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$

لدينا: $f(x) - y = 0$ من أجل $x = -3$ ويكون (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثياتها $(-3; -3)$

$f(x) - y > 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; -3[$ ويكون (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

$f(x) - y < 0$ من أجل كل $x \in]-3; +\infty[$ ويكون (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

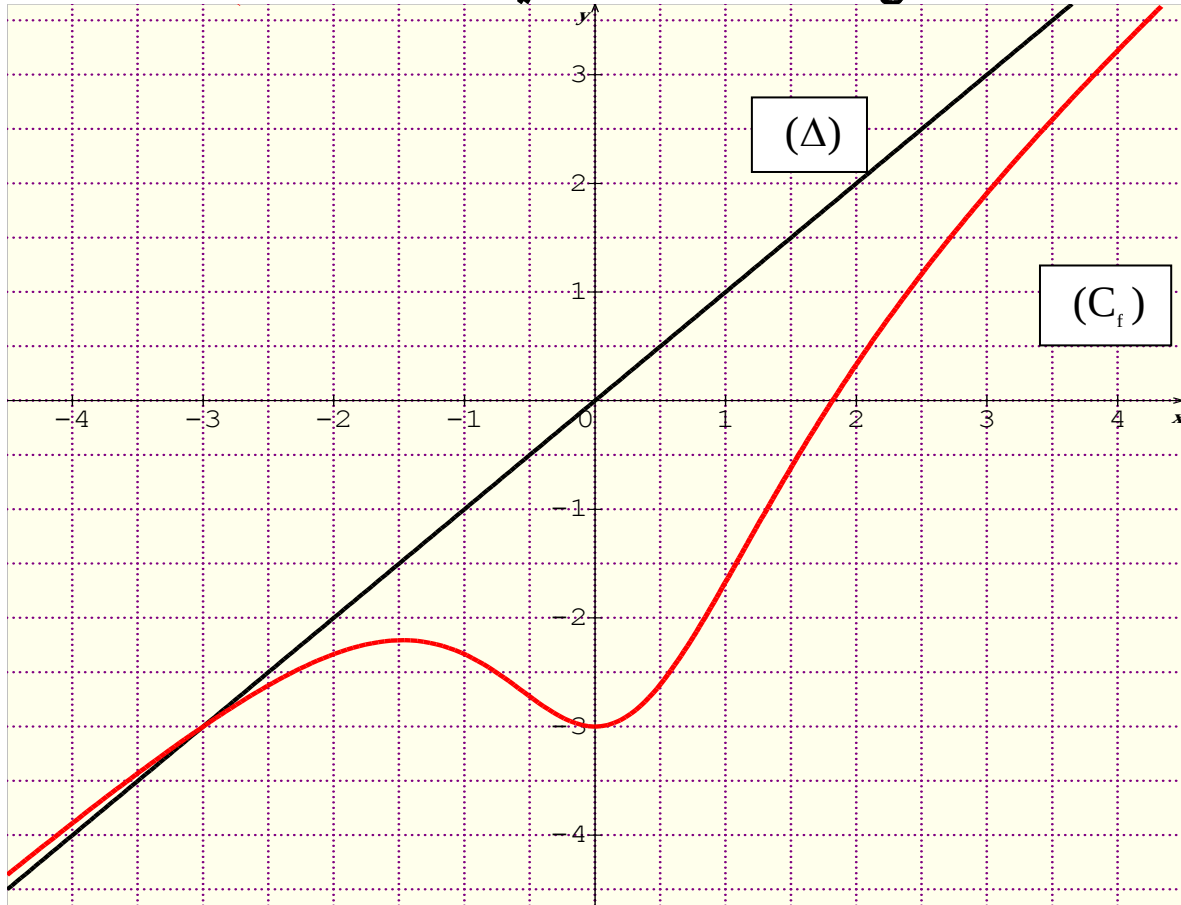
3) تبيان أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2}$ والمطلوب هو $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ وعليه نبين أن $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3\alpha}{2} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha - 12}{2(\alpha^2 + 2)} = \frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2 + 2)} = 0$ لأن $g(\alpha) = 0$ من الجواب 2-I

4) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

ملاحظة: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها $x_0 = \sqrt[3]{6} \approx 1,81$



1) دراسة تغيرات الدالة f .

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \text{ على }]-1; +\infty[\text{ ب:}$$

* النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0^+ \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$$

* اتجاه التغير

$$f'(x) = 1 + \frac{2(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2} \text{ حيث: }]-1; +\infty[\text{ المجال}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(\sqrt{x+1})(x+1)} \text{ وعليه } (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})} \text{ لاحظ أن:}$$

$$\text{لدينا } f'(x) = 1 + \frac{1}{(\sqrt{x+1})(x+1)} > 0 \text{ نستنتج أن الدالة } f \text{ متزايدة تماما على }]-1; +\infty[$$

وعليه جدول تغيراتها هو:

x	-1	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		$+\infty$

2-أ) تبيان أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما (D) : y = x .

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ ومنه المنحنى (C}_f\text{) مقارب يوازي حامل محور الترتيب معادلته: } x = -1$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0 \text{ المنحنى (C}_f\text{) مقارب مائل معادلته: } y = x \text{ في جوار } +\infty$$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D).

$$\text{لدراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C}_f\text{) و (D) ندرس إشارة الفرق: } [f(x) - x] = -\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{نلاحظ أن: } -\frac{2}{\sqrt{x+1}} < 0 \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال }]-1; +\infty[\text{ وعليه (C}_f\text{) يكون تحت (D).}$$

3-أ) تبيان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x₀ حيث 1,3 < x₀ < 1,4

من الجواب 1) الدالة f مستمرة ومنتزعة تماما على المجال [1,3; 1,4].

و $f(1,3) \times f(1,4) < 0$ لأن: $f(1,3) = -0,01$ و $f(0,8) = 0,01$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $x_0 \in]1,3; 1,4[$ يحقق: $f(x_0) = 0$ والتفسير الهندسي هو ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1,3 < x_0 < 1,4$.

ب) كتابة معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب.

نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب فاصلتها معدومة وعليه نكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ومنه: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = 2x - 2$ لأن: $f'(0) = 2$ و $f(0) = -2$.

ج) رسم (Δ) و (C_f) في الجواب القادم

4- أ) تبين كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه.

لدينا: g دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$: $g(x) = |f(x)|$:

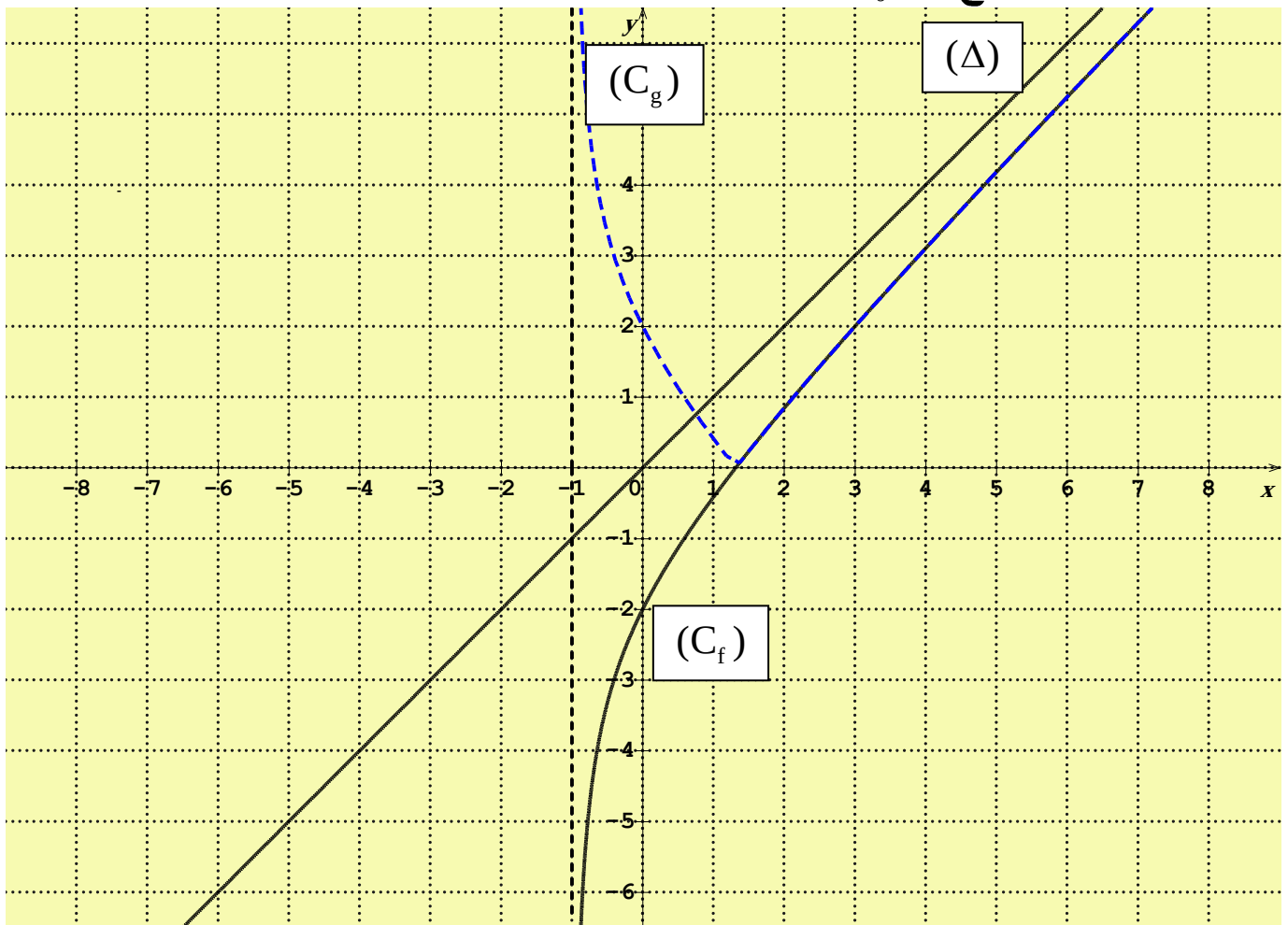
من الجواب 3- أ) نستنتج أن إشارة $f(x)$ هي: $f(x) < 0$ معناه $]-1; x_0[$ و $f(x) \geq 0$ معناه $]x_0; +\infty[$

$$g(x) = \begin{cases} -f(x); x \in]-1; x_0[& \text{.....(1)} \\ f(x); x \in]x_0; +\infty[& \text{.....(2)} \end{cases}$$

وعليه يمكن كتابة عبارة $g(x)$ كمايلي:

من العبارة (1) نستنتج أن (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $]-1; x_0[$

من العبارة (2) نستنتج أن (C_g) ينطبق على (C_f) على المجال $]x_0; +\infty[$.



ب) المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x) = m^2$

لدينا: المعادلة التالية $g(x) = m^2$ تكافئ الجملة $\begin{cases} y = m^2 \\ y = g(x) \end{cases}$

من الجملة السابقة نستنتج أن حلول المعادلة $g(x) = m^2$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_g) والمستقيم ذو المعادلة $y = m^2$ (يوازي حامل محور الفواصل) من البيان (المنحنى (C_g)) نميز الحالات التالية :

(1) $m = 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجب تماما.

(2) $0 < m^2 < 2$ أي $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ المعادلة تقبل حلا ن موجان تماما.

(3) $m^2 = 2$ أي $m = -\sqrt{2}$ أو $m = \sqrt{2}$ المعادلة تقبل حلا معدوما وحل آخر موجب تماما.

(4) $m^2 > 2$ أي $m < -\sqrt{2}$ أو $m > \sqrt{2}$ المعادلة تقبل حلا ن مختلفان في الإشارة.

التمرين 36 دورة 2010

1) تبين أن f دالة فردية.

f دالة فردية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$: $f(-x) + f(x) = 0$.
لدينا: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$:

$$\text{ومنه: } f(-x) + f(x) = -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0$$

2) اثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = 1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)'$

$$\text{لكن: } \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = -\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = -\frac{2x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(\frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \right) = 1 + \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

3) دراسة تغيرات الدالة f .

* النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -\infty$$

* اتجاه التغير

لدينا: f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

لدينا $f'(x) > 0$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

وعليه جدول تغيراتها هو:

X	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) كتابة معادلة للمماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

لدينا: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = 2x$ لأن: $f'(0) = 2$ و $f(0) = 0$

5) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ حيث $y = 2x$

$$\text{لدينا: } f(x) - y = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - 2x = -x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $-x$ لأن: $1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ لاحظ أن $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 1$

وعليه: من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ يكون $f(x) - y > 0$ أي (C_f) يكون فوق (T)

من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ يكون $f(x) - y < 0$ أي (C_f) يكون تحت (T)

من أجل كل $x = 0$ يكون $f(x) - y = 0$ أي (C_f) يقطع (T) في نقطة المبدأ.

من الدراسة السابقة نستنتج أن (C_f) يخترق (T) في نقطة المبدأ

ومنه المبدأ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

7) تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

ومنه المنحنى (C_f) مقارب مائل معادلته: $y = x + 1$ في جوار $+\infty$

استنتاج معادلة (D') المستقيم المقارب الآخر

(D') المستقيم المقارب الآخر هو نظير المستقيم (D) بالنسبة للمبدأ لأن f فردية

$$M(x, y) \rightarrow M'(x', y') : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \text{ بالتحويل التقطي}$$

وعليه معادلة (D') هي $-y' = -x' + 1$ أي $y' = x' - 1$

ومنه المنحنى يقبل مقارب مائل آخر (D') له معادلة من الشكل: $y = x - 1$ في جوار $-\infty$.

7) رسم (D) و (D') و (C_f) في آخر الحل.

8-أ) تبين أن الدالة g زوجية.

الدالة g زوجية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$: $g(-x) - g(x) = 0$.

ومنه: $|-x| = |x|$ لأن: $g(-x) - g(x) = |-x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0$

ب) رسم (C_g) انطلاقاً من (C_f) في نفس المعلم السابق.

لدينا: $g(x) = f(x)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+$ وعليه (C_g) ينطبق على (C_f) على $\mathbb{R}_+$
 $g(x) = f(-x)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}_-$ وعليه (C_g) نظير (C_f) على $\mathbb{R}_-$ لأن g زوجية

