

◀ التمرين 01:

بيّن إن كانت الدالتان f و g متساويتان في كل حالة مما يلي:

$$① \quad g(x) = \sqrt{(x+2)^2} \quad \text{و} \quad f(x) = x + 2$$

$$② \quad g(x) = x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = (\sqrt{x-1})^2$$

◀ التمرين 02:

بين أن: $f = g$ ، حيث f و g دالتين معرفتين كما يلي:

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x+1} - 1$$

◀ التمرين 03:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-2; 3]$ بـ:

$$g(x) = -x - 2 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x + 1$$

وليكن (C_g) و (C_f) تمثيليهما البيانيين في مستوى منسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① عين اتجاه تغير كل من الدالتين f و g .

ثم أرسم (C_g) و (C_f)

② بقراءة بيانية عيّن نقط تقاطع المنحنيين (C_g) و (C_f) .

ثم تحقق من ذلك حسابيا.

③ نعتبر الدوال h_1, h_2, h_3, h_4 المعرفة على المجال

$[-2; 3]$ كمايلي:

$$h_1 = f + g$$

$$h_2 = f \times g$$

$$h_3 = -2f$$

$$h_4 = g + 1$$

أ/ عين بدلالة x عبارة كل من:

$$h_4(x), h_3(x), h_2(x), h_1(x)$$

ب/ أرسم كل من (C_{h_4}) و (C_{h_3}) التمثيلين البيانيين

للدالتين h_4 و h_3 في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

④ نعتبر الدالة k المعرفة كما يلي:

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

أ/ عيّن D_k مجموعة تعريف الدالة k .

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_k :

$$k(x) = 1 - \frac{3x+3}{x+2}$$

◀ التمرين 04:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-1; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{x+1} + 2$$

تمثيليهما البيانيين في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد

المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① انطلاقا من التمثيل البياني (C) للدالة "الجزر التربيعي"

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

② حدد طريقتين لرسم المنحنى (C_g) ثم ارسمه.

◀ التمرين 05:

عيّن كلا من $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ وذلك بعد تعيين:

$D_g, D_f, D_{g \circ f}$ و $D_{f \circ g}$ في كل حالة ممايلي:

$$① \quad f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{x-4}$$

$$② \quad f(x) = 2x^2 + 3 \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

◀ التمرين 06:

f, g, h و k دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x$$

$$h(x) = x + 1$$

$$g(x) = x^2$$

$$k(x) = x^2 + 1$$

• أثبت ما يلي:

$$① \quad k = h \circ g$$

$$② \quad f \circ k = 2k$$

$$③ \quad g \circ k = gk + k$$

$$④ \quad f + k = g \circ h$$

$$⑤ \quad k \circ h = g + 2h$$

$$⑥ \quad k \circ k = g^2 + 2k$$

◀ التمرين 07:

f دالة معرفة على المجال $]-\infty; 3]$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{3-x}$$

① فكك الدالة f إلى مركب دالتين مرجعيتين يطلب

تعيينهما.

② استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 3]$.

◀ حل التمرين 01:

$$① \quad f(x) = x + 2 \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{(x+2)^2}$$

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$ ، ولدينا: $D_g = \mathbb{R}$ لأن ما داخل الجذر دوما موجب ولدينا:

$$g(x) = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = \begin{cases} f(x) & ; x \geq -2 \\ -f(x) & ; x < -2 \end{cases}$$

بما أن $D_g = D_f$ و $f(x) \neq g(x)$ فإن $f \neq g$

$$② \quad f(x) = (\sqrt{x-1})^2 \quad \text{و} \quad g(x) = x - 1$$

لدينا: f معرفة لما $(x-1) \geq 0$ ومنه $x \geq 1$

إذن، $D_f = [1; +\infty[$

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$

$$\text{لدينا: } f(x) = (\sqrt{x-1})^2 = x - 1 = g(x)$$

بما أن $D_g \neq D_f$ و $f(x) = g(x)$ فإن $f \neq g$

◀ حل التمرين 02:

• تبين أن: $f = g$

لدينا: • f معرفة إذا كان $x + 1 \geq 0$ أي $x \geq -1$

إذن: $D_f = [-1; +\infty[$

• g معرفة إذا كان $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} + 1 \neq 0 \end{cases}$ ومنه:

$$D_g = [-1; +\infty[\quad \text{إذن: } \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} \neq -1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1} \times \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} \\ &= \frac{x(\sqrt{x+1} - 1)}{x+1 - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} - 1} \\ &= \frac{x(\sqrt{x+1} - 1)}{x} = \sqrt{x+1} - 1 = f(x) \end{aligned}$$

بما أن $D_g = D_f$ و $f(x) = g(x)$ فإن $f = g$

◀ حل التمرين 03:

① تعيين اتجاه تغير كل من الدالتين f و g :

- تعيين اتجاه تغير الدالة f :

نفرض x_1 و x_2 من المجال $[-2; 3]$ حيث: $x_1 > x_2$

ومنه: $2x_1 > 2x_2$ أي $2x_1 + 1 > 2x_2 + 1$

ومنه: $f(x_1) > f(x_2)$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2; 3]$

- تعيين اتجاه تغير الدالة g :

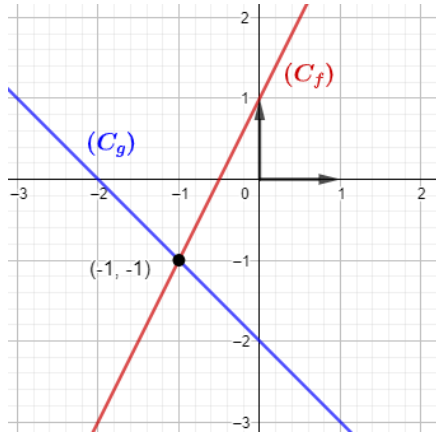
نفرض x_1 و x_2 من المجال $[-2; 3]$ حيث: $x_1 > x_2$ ومنه:

$-x_1 < -x_2$ أي $-x_1 - 2 < -x_2 - 2$

ومنه: $g(x_1) < g(x_2)$

إذن: الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-2; 3]$

- رسم (C_f) و (C_g) :



② بقراءة بيانية تعيين نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) :

من البيان نجد أن نقطة تقاطع (C_f) و (C_g) هي النقطة ذات

الاحداثيات $(-1; -1)$

- التحقق من ذلك حسابيا:

لدينا: $f(x) = g(x)$ ومنه: $-x - 2 = 2x + 1$

أي: $3 - 3x = 3$ أي: $x = -1$ ومنه $x = -1$

نعوض قيمة x في معادلة f نجد: $y = 2(-1) + 1$

إذن: $y = -1$

③

أ/ تعيين عبارة كل من $h_1(x)$ ، $h_2(x)$ ، $h_3(x)$ و $h_4(x)$:

$$h_1(x) = f + g = 2x + 1 - x - 2 = \boxed{x - 1}$$

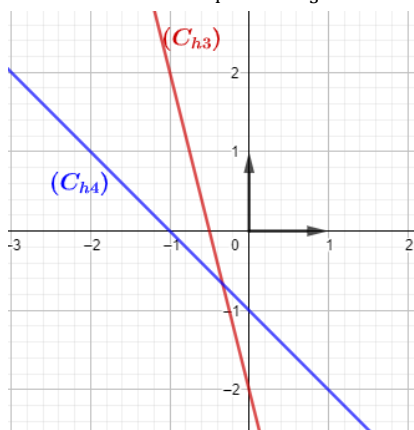
$$h_2(x) = f(x)g(x) = (2x + 1)(-x - 2)$$

$$= -2x^2 - 4x - x - 2 = \boxed{-2x^2 - 5x - 2}$$

$$h_3(x) = -2f(x) = -2(2x + 1) = \boxed{-4x - 2}$$

$$h_4(x) = g(x) + 1 = -x - 2 + 1 = \boxed{-x - 1}$$

ب/ رسم كل من (C_{h_3}) و (C_{h_4}) :



④

أ/ تعيين D_k مجموعة تعريف الدالة k :

k معرفة إذا كان $g(x) \neq 0$ أي $-x - 2 \neq 0$ أي: $-x \neq 2$

أي $x \neq -2$ ، إذن $D_k = \mathbb{R} - \{-2\}$

ب/ التحقق:

$$k(x) = 1 - \frac{3x + 3}{x + 2} = \frac{1(x + 2) - (3x + 3)}{x + 2}$$

$$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ و } f(x) = 2x^2 + 3 \quad ②$$

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$ ، ولدينا: g معرفة لما $x \geq 0$ إذن: $D_g = \mathbb{R}_+$

- تعريف $f \circ g$:

$$D_{f \circ g} = \{x; x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\} = \{x; x \in \mathbb{R}_+ \text{ و } \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R}_+ \text{ و } x \in \mathbb{R}_+\} = \mathbb{R}_+$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x})^2 + 3$$

$$= 2|x| + 3 = \boxed{2x + 3}$$

- تعريف $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x; x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ و } (2x^2 + 3) \in \mathbb{R}_+\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ و } (2x^2 + 3) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x^2 + 3) = \sqrt{2x^2 + 3}$$

◀ حل التمرين 06:

①

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = x^2 + 1 = k(x)$$

②

$$(g \circ h)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$= 2x + x^2 + 1 = (f + k)(x)$$

③

$$(f \circ k)(x) = 2(x^2 + 1) = 2k(x)$$

④

$$(k \circ h)(x) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1$$

$$= x^2 + 2(x + 1) = (g + 2h)(x)$$

⑤

$$(g \circ k)(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 1 + 2x^2$$

$$= x^2(x^2 + 1) + x^2 + 1$$

$$= (gk)(x) + k(x)$$

⑥

$$g^2(x) + 2k(x) = x^4 + 2x^2 + 2$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1$$

$$= (k \circ k)(x)$$

◀ حل التمرين 07:

① تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين:

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 3 - x \end{cases} \text{ حيث: } f(x) = (u \circ v)(x)$$

② استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $] -\infty; 3[$:

لدينا الدالة u متزايدة تماما على مجال تعريفها

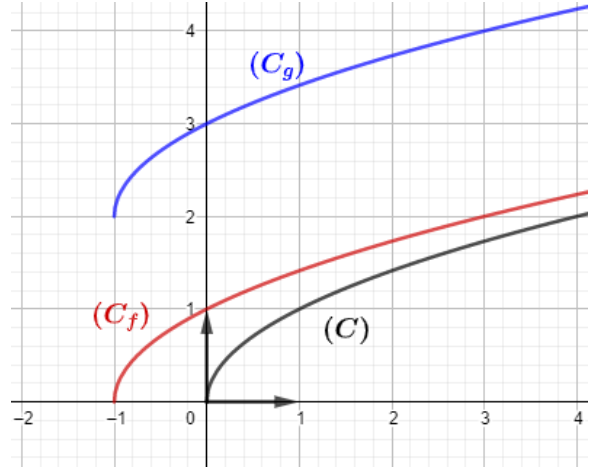
ولدينا الدالة v متناقصة تماما على $] -\infty; 0[$

$$= \frac{x + 2 - 3x - 3}{x + 2} = \frac{-2x - 1}{x + 2} = \frac{2x + 1}{-x - 2} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

◀ حل التمرين 04:

① رسم (C_f) :

نلاحظ أن (C_f) هو انسحاب لـ (C) بشعاع $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$



① تحديد طريقتين لرسم المنحنى (C_g) ورسمه:

ط1: نلاحظ أن (C_g) هو انسحاب لـ (C) بشعاع $\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix}$

ط2: نلاحظ أن (C_g) هو انسحاب لـ (C_f) بشعاع $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

◀ حل التمرين 05:

$$① f(x) = x^2 \text{ و } g(x) = \frac{1}{x-4}$$

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$ ، ولدينا: g معرفة لما $x - 4 \neq 0$ أي $x \neq 4$

إذن: $D_g = \mathbb{R} - \{4\}$

- تعريف $f \circ g$:

$$D_{f \circ g} = \{x; x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{x; (x \in \mathbb{R} - \{4\}) \text{ و } \left(\frac{1}{x-4}\right) \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{x; (x \in \mathbb{R} - \{4\}) \text{ و } (x - 4 \neq 0)\right\}$$

$$= \{x; (x \in \mathbb{R} - \{4\}) \text{ و } (x \in \mathbb{R} - \{4\})\} = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x-4}\right) = \left(\frac{1}{x-4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(x-4)^2}$$

- تعريف $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x; x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 \in \mathbb{R} - \{4\}\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ و } (x^2 > 4 \text{ أو } x^2 < 4)\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ و } (|x| > 2 \text{ أو } |x| < 2)\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ و } ((x > 2 \text{ أو } x < -2) \text{ و } (-2 < x < 2))\}$$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ و } (x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\text{ أو } x \in]-2; 2[)\}$$