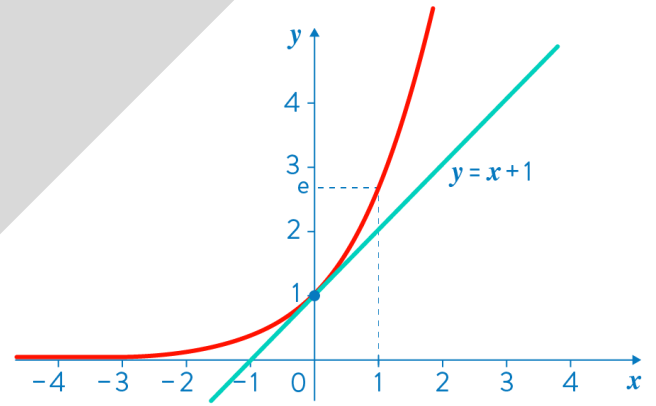


مجلة الدالة الأسية

الأستاذ سوايسية هشام



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$(\exp)'(x)$	+	1	+	e	+
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$	

© SCHOOLMOV

17 تمرين شامل في الدالة الأسية مرفقة بالحل
شعبة علوم تجريبية + تقني + رياضيات

تمرين 01

(I) $g(x) = -x + 2 + e^x$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$

1 ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2 استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

(II) $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3 بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$.

4 ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

5 تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3 < \alpha < 0.5$

6 أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة A .

7 أنشئ (C_f) و (Δ) .

تمرين 02

$f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2 أ) بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y = x$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

3 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$

4 أ) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

5 احسب $f(3)$ ، $f(0)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) ثم (C_f)

⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

تمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$

② نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$

(أ) احسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(ج) اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

③ أرسم (T) و (C_f) .

④ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

تمرين 04

نعتبر في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 2e^{-x} \dots (E)$

① عين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = a \times e^{-x}$ حل للمعادلة (E)

② نعتبر المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0 \dots (E')$

☆ حل المعادلة (E')

③ بين أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $f - g$ حلاً للمعادلة (E')

④ استنتج حلول المعادلة (E) .

⑤ عين حلاً خاصاً f للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4.

★ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

0	1	$+\infty$	إذا كان $\lim_{x \rightarrow 1} v(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(e^{-3x} + 1)$ تساوي:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $e^{-x} \leq h(x) \leq 2e^{-x}$ دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = xe^x h(x)$ فإن:
$+\infty$	$-f'(2)$	$f'(2)$	إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-2h)}{2h}$ تساوي:
$f(x) = -e^{-2x} + 1$	$f(x) = -e^{-2x} - 1$	$f(x) = e^{-2x} - 1$	حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y - 2 = 0$ والذي يحقق $f(0) = 0$ هو f حيث:
$\mathbb{R}$	$[1; +\infty[$	$] -\infty; 0]$	مجموعة حلول المتراجحة $e^x - e^{-x}$ هي:

★ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

0	$-\infty$	$+\infty$	إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\frac{1}{e^x})$ تساوي:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $x \leq f(x) \leq x^2$ و g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ فإن:
$+\infty$	$-f'(1)$	$f'(1)$	إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1+2h)}{2h}$ تساوي:
$u(x) = e^{-2x} + 1$	$u(x) = -e^{-2x} + 1$	$u(x) = -e^{-2x} - 1$	حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y - 2$ والذي يحقق $u(0) = 0$ هو u حيث:
$\mathbb{R}$	$[\frac{2}{3}; +\infty[$	$] -\infty; \frac{2}{3}]$	مجموعة حلول المتراجحة $e^{-3x+2} \leq 1$ هي:

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$

① ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7; -0.6]$ $0.3 < \alpha < 0.5$

③ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① أ) احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

② أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2 < x_1 < -1.1$ و $1.1 < x_2 < 1.2$

③ عين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

④ أنشئ (C_f) و (Δ) (يعطى $f(\alpha) = 2.9$).

نمبر 08

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 1 - x + e^x$

① ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② أ) بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

③ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)e^{-x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$

④ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (T)

⑤ أنشئ (T)، (Δ) و (C_f).

⑥ عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلين متميزين.

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (x+1)e^x - e$

① ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$

③ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = xe^x - ex + e - 2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

③ أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -ex + e - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) .

ج) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين معادلته.

④ أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.2$.

⑤ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+2-e)e^{-x} = x$.

(III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = e[(x+1)e^x - x]$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = f(x+a) + b$

② اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

(I) k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $k(x) = (-x+1)e^x - 1$

جدول تغيراتها موضح في الشكل المقابل:

① شكل جدول تغيرات الدالة k .

② استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $k(x) \leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$		$\circ$	
$k(x)$	-1	0	$-\infty$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (-x+2)(e^x + 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

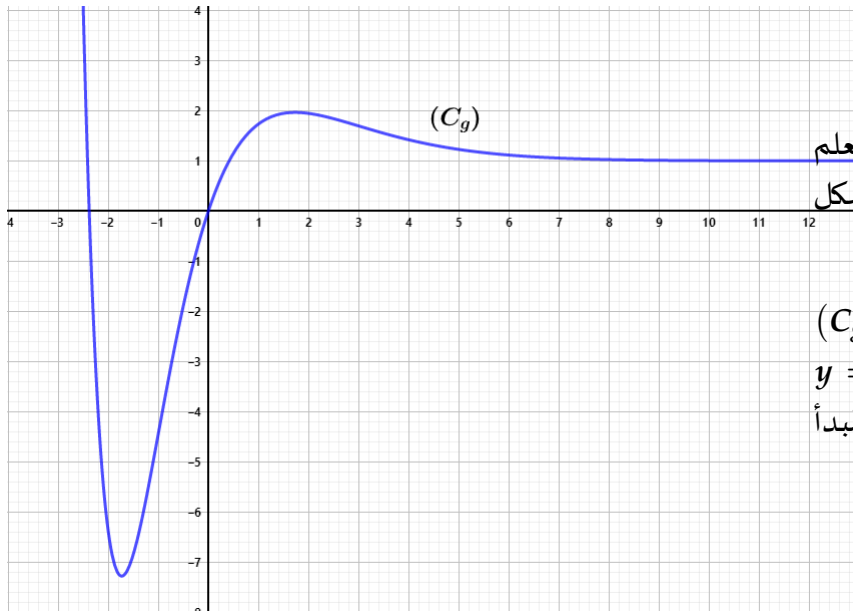
① احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = k(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

- ③ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (-x + 2) = (-x + 2)e^x$
- ب) بين أن المستقيم (Δ) ذي $y = -x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ (يعطى $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$).
- ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) .
- ④ أ) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه -1
- ب) اكتب معادلة للمماسين (T) و (T') للمنحنى (C_f) عند النقطتين ذاتي الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب.
- ⑥ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.
- ⑥ ارسـم (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) يعطى.
- ⑤ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x) = -x + m$.

تمرين 11

إ) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = a + (x^2 + 2x - b)e^{-x}$



(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الشكل المقابل):

- ① عين كلا من a و b إذا علمت أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ ويقبل مماسا عند المبدأ معامل توجيهه 3 .

② فيما يلي نضع: $a = b = 1$

- أ) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-2.5 < \alpha < -2$.
- ب) استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dots$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- ① احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بين ان منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيينها.

④ (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

(ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) .

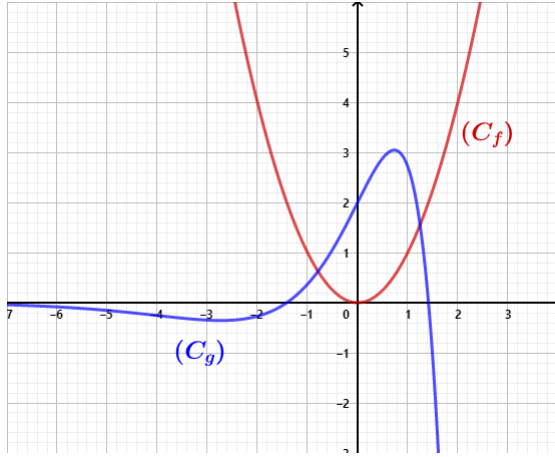
⑥ ارسم (Δ) و (C_f)

تمرين 12

(I) g و h دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} g(x) = (2 - x^2) e^x \\ h(x) = x^2 \end{cases}$$

(C_g) و (C_h) تمثيلهما البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الشكل المقابل).



نقبل أن المعادلة $g(x) = h(x)$ تقبل حلين متمايزين α ،
بحيث: $-0.8 < \alpha < -0.7$ ، $1.2 < \beta < 1.3$ ،
اعتمادا على الشكل المقابل:

① ادرس الوضع النسبي لـ (C_g) و (C_h) .

② استنتج إشارة $g(x) - h(x)$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x + x^2 + x}{e^x - x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

② بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x) - h(x)}{(e^x - x)^2}$

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

④ أنشئ (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.23$ ، $f(\beta) \approx 2.81$.

⑤ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x) = -x + m$.

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (2x+1)e^x - 1$

① ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② احسب $g(0) = 0$ ثم استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x(e^x - 1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) المار بمبدأ المعلم.

③ أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) .

④ أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

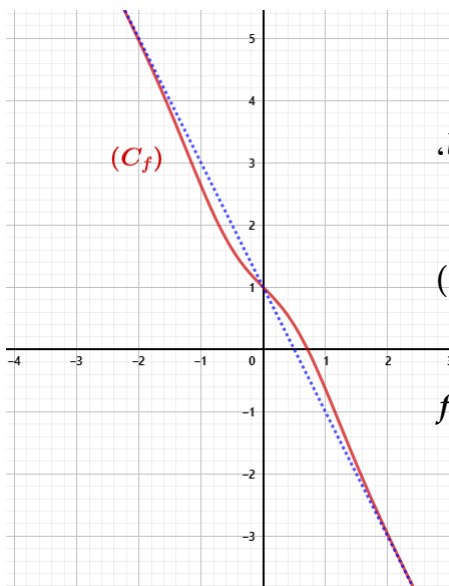
⑤ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx$.

(III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

① دون حساب عبارة $h(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

(I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = xe^{-x^2} + ax + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان مع $a \neq 0$ و (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) (الشكل المقابل).



① اكتب معادلة للمستقيم (Δ) ثم استنتج أن $a = -2$ و $b = 1$.

إذا علمت أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0$

② اثبت أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

③ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = m - 2x$ حلين سالبين.

(II) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

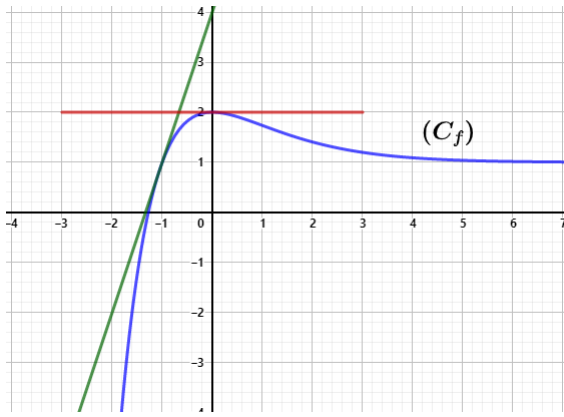
① احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها.

② احسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

تمرين 15

(I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عدنان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) (الشكل المقابل).

① بقراءة بيانية



(أ) عين كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر هذه الأخيرة بيانياً.

(ب) عين كلا من $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-1)$

(ج) اعتماداً على ما سبق جد قيمة كلا من a و b ثم استنتج عبارة $f(x)$

② (أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1.4 < \alpha < -1.2$.

(ب) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

③ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(|x| + 1)e^{-x} + 1$

(أ) احسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم فسر النتيجة بيانياً، (نقبل أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$)

(II) نضع فيما يلي: $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$ (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$)

① (أ) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

(ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$

② (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = f(x)$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

③ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1 .

④ بين أن $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتج إشارة $g(\alpha)$.

④ (أ) احسب $g(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ)، (C_f) والمنحنى (C_g).

(ب) m وسيط حقيقي، ناقش حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ حيث g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$

2 دراسة إشارة $g(x)$

أ احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ج بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تأكد أن: $0.20 < \alpha < 0.21$

د عين إشارة $g(x) = 0$ على $\mathbb{R}$.

3 احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4 ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5 بين أن: $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

6 نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0; 1]$ بـ $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$

أ احسب $h'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0; 1]$

ب استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

7 عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.

I g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (x+a)e^x + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان، (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 عين قيمتي كلا من a و b علما أن (C_g) يقبل مماسيا في النقطة التي فاصلتها 1 موازيا لحامل محور الفواصل ويشمل $A(0; -1)$

2 نضع فيما يلي: $g(x) = (x-2)e^x + 1$

أ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1.3 < \alpha < -1.2$ و $1.8 < \beta < 1.9$

ب استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$.

II f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ $f(x) = \frac{x-1}{1-e^x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

① احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

③ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

③ أ) بين أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x - 1$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

⑤ بين أن $f(\alpha) = \alpha - 2$ ، $f(\beta) = \beta - 2$ ثم عين حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

⑥ احسب $f(1)$ أنشئ (C_f) و (Δ).



(I) $g(x) = -x + 2 + e^x$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$

① دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$g'(x) = -1 + e^x$ ومنه $g'(x) < 0$ تعني أن $-1 + e^x < 0$ ومنه $e^x < 1$ ومنه $x < 0$.

إذن g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 2 + e^x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 + e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x} \right) = +\infty \end{aligned}$$

② استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات $g(x) > 0$

(II) ① حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

② إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

ومنه:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + (e^{-x}(x - 1))$$

ومنه $f'(x) = 1(-x + 2)e^{-x}$ نضرب ونقسم على e^x

$$f'(x) = \frac{e^x - x + 2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x} = e^{-x}g(x) > 0$$

☆ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

③ لإثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

④ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	يقع (C_f) تحت (Δ)	يقطع (C_f) (Δ)	يقع (C_f) فوق (Δ)

إشارة $f(x) - y = (x - 1)e^{-x}$ من إشارة

$(x - 1)$ ومنه:

☆ (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 1[$

☆ (C_f) يقطع (Δ) لما $x = 1$

☆ (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]1; +\infty[$

⑤ التحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3 < \alpha < 0.5$:

☆ الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0.3; 0.5[$ و $f(0.3) = -0.22$ ، $f(0.5) = 0.2$ ، ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.5$

⑥ أ) إثبات أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها:

$f'(x) = e^{-x}(e^x - x + 2)$ ومنه:

$$f''(x) = -e^{-x}(-x + 2 + e^x) + (-1 + e^x)e^{-x} = e^{-x}(x - 2 - e^x - 1 + e^x) = (x - 3)e^{-x}$$

إشارته من إشارة $(x - 3)$ ومنه:

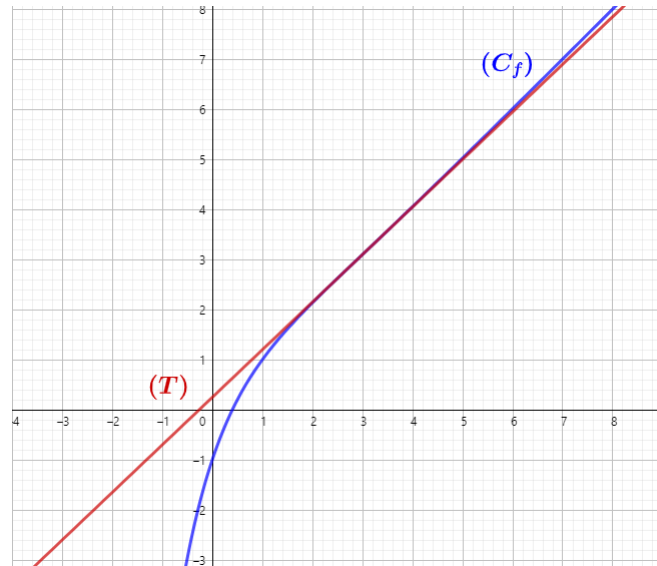
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

إذن نقطة الانعطاف إحداثياتها: $A(3; 3 + 2e^{-3})$

ب) كتابة معادلة المماس (T) ل (C_f) عند النقطة A :

$$(T) : y = f'(3)(x - 3) + f(3) = (1 - e^{-3})(x - 3) + 3 + 2e^{-3} = (1 - e^{-3})x + 5e^{-3}$$

⑦ إنشاء (C_f) و (Δ) .



تمرين 02

① أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم إثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \quad \text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{x^2}{e^x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^1 = +\infty \text{ لدينا:}$$

(ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x-1)e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 - 2e^{-x+1} + (x^2 + 1)e^{-x+1} = 1 + (x^2 - 2x + 1)e^{-x+1} = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

(ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

★ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

من أجل كل x لدينا:

$$e^{-x+1} > 0 \text{ و } (x-1)^2 \geq 0 \text{ وبالتالي } f'(x) > 0 \text{ أي}$$

أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

② (أ) إثبات أن المنحنى (C_f) يبقل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y = x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{e^x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^1 = 0$$

(ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

$$\text{لدينا: } f(x) - x = -(x^2 + 1)e^{-x+1} < 0 \text{ لأن } e^{-x+1} > 0 \text{ و } (x^2 + 1) \geq 0 \text{ وبالتالي } (C_f) \text{ يقع تحت}$$

المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$

③ إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبما أن $f(1.8) \approx -0.11$ و $f(1.9) \approx 0.03$ أي أن $f(1.8) \times f(1.9) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$

④ (أ) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$(T); y = x - 2 \text{ ومنه: } (T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

(ب) تبين أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$-x + 3$	+	+	0	-
$f''(x)$	-	0	+	0

من أجل كل عدد حقيقي x الدالة f تقبل الإشتقاق ولدينا:

$$f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} - (x-1)^2 e^{-x+1} = (x-1)e^{-x+1}(-x+3)$$

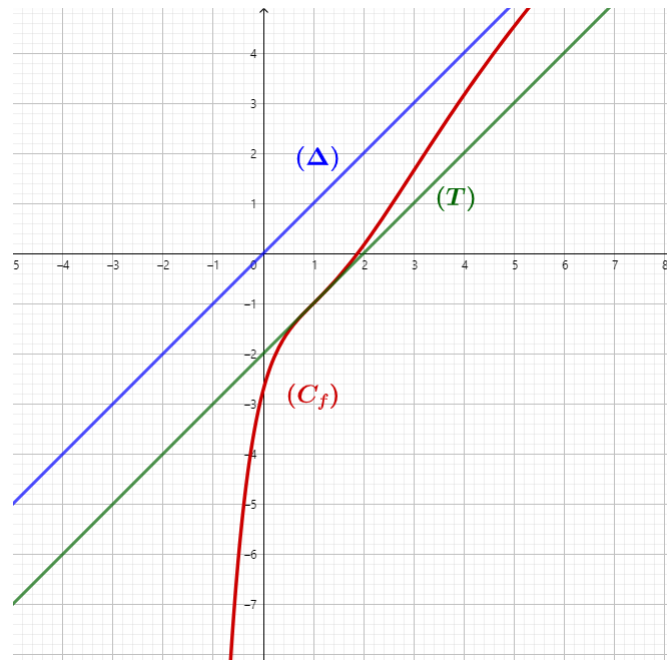
حسب جدول الإشارة المقابل لنقطتي الإنعطاف هما:

$$(3; 3 - 10e^{-2}), (1; -1)$$

⑤ حساب $f(0)$ ، $f(3)$:

$$f(0) = e, f(3) = 3 - 8e^{-2}$$

التمثيل البياني:



⑥ المناقشة بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$ الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y = x + m$.

عدد وإشارة الحلول	قيم m
حل سالب تماماً	$]-\infty; -e[$
حل معدوم	$-e$
حل موجب تماماً	$]-e; 0[$
لا توجد حلول	$[0; +\infty[$

تمرين 03

① تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماساً معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$:

$$\star f(0) = -3 \text{ وهذا معناه } c = -3$$

$$\star \text{ لدينا } f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} \text{ و } f'(0) = 3 \text{ ومنه } b - c = 3 \text{ أي } b = 0.$$

$$\star f(\sqrt{3}) = 0 \text{ معناه: } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ ومنه } a = 1$$

② نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$

(أ) حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها:

المشتقة $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1

ومنه f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ ومتزايدة على المجال $[-1; 3]$

جدول تغيراتها

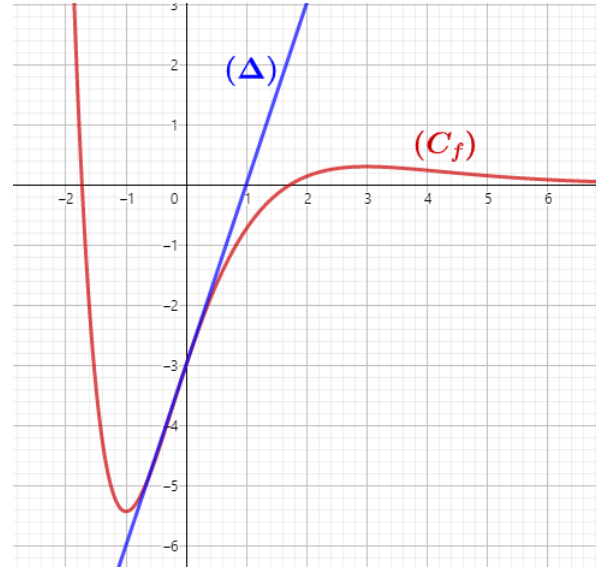
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

(ج) كتابة معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$(T) : y = 3x - 3$$

★ تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

$f(x) = 0$ معناه $x^2 - 3 = 0$ أي أن: $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أي نقط التقاطع هما: $A(\sqrt{3}; 0)$ ، $B(-\sqrt{3}; 0)$



③ رسم (T) و (C_f) .

④ المناقشة بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

$x^2 - 3 + me^x = 0$ المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = -(x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$.

★ المناقشة البيانية:

✳️ لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول.

✳️ لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب

✳️ لما $-3 > -m > -2e$ أي أن $2e > m > 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبتين ومنه للمعادلة حلين سالبين

✳️ لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة والأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين أحدهما معدوم والآخر سالب

✳️ لما $0 \geq -m > -3$ أي أن $3 \geq m \geq 0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتين في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة.

- ✱ لما $0 < -m < \frac{6}{e^3}$ أي أن $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاث نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتين ونقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة ثلاثة حلول حلين موجبين وحل سالب.
- ✱ لما $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتين في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة
- ✱ لما $-\frac{6}{e^3} > -m$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

تمرين 04

- ① تعيين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = a \times e^{-x}$ حل للمعادلة (E) :
 g حل للمعادلة (E) معناه $g'(x) - 3g(x) = 2e^{-x}$ أي $-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$ ومنه $2ae^{-x} = 2e^{-x}$ بالمطابقة نجد: $a = 1$
- ② ☆ حل المعادلة (E') :
 $y' + 3y = 0$ معناه $y' = -3y$ مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة الدوال من الشكل $y = Ce^{-3x}$ حيث $C \in \mathbb{R}$
- ③ إثبات أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $f - g$ حلا للمعادلة (E') :
الدالة f حل للمعادلة (E) معناه $f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}$ ومنه $f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$ لأن g حل للمعادلة (E) وبالتالي: $f'(x) + 3f(x) - g'(x) - 3g(x) = 0$ أي: $(f - g)'(x) + 3(f - g)(x) = 0$ ومنه الدالة $f - g$ حل للمعادلة (E')
- ☆ الدالة $f - g$ حل للمعادلة (E') معناه $(f - g)'(x) + 3(f - g)(x) = 0$ ومنه $f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$ وبالتالي $3g(x) + f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}$ لأن g حل للمعادلة (E) إذن f حل للمعادلة (E)
- ④ استنتاج حلول المعادلة (E) :
لدينا $f - g$ حل للمعادلة (E') معناه $f(x) - g(x) = Ce^{-3x}$ ومنه $f(x) = Ce^{-3x} + g(x)$ مع $C \in \mathbb{R}$
- ⑤ تعيين حلا خاصا f للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4:
☆ (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه يساوي -4 معناه: $f'(0) = -4$
☆ لدينا: $f'(x) = -3Ce^{-3x} - e^{-x}$
 $f'(0) = -4$ معناه: $-3Ce^0 - e^0 = -4$ أي $-3C = -3$ ومنه $C = 1$ أي: $f(x) = e^{-3x} + e^{-x}$

★ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow 1} v(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(e^{-3x} + 1)$ تساوي:	0	نهاية مركب دالتين) لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$
إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $e^{-x} \leq h(x) \leq 2e^{-x}$ دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = xe^x h(x)$ فإن:	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	النهاية بالحصص) لأن $e^{-x} \leq h(x) \leq 2e^{-x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$
إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-2h)}{2h}$ تساوي:	$-f'(2)$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+2h)}{2h} =$ $-\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(2+k) - f(2)}{k} = -f'(2)$
حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y - 2 = 0$ والذي يحقق $f(0) = 0$ هو f حيث:	$f(x) = -e^{-2x} + 1$	لأن $f(0)$ و $f'(x) + 2f(x) - 2 = 0$
مجموعة حلول المتراجحة $e^x - e^{-x}$ هي:	$] -\infty; 0]$	لأن $e^x - e^{-x} \leq 0$ تكافئ أن $x \leq 0$ تكافئ $e^{2x} - 1 \leq 0$

★ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{e^x}\right)$ تساوي:	0	نهاية مركب دالتين لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$
إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $x \leq f(x) \leq x^2$ و g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ فإن:	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	النهاية بالحصص لأن $x \leq f(x) \leq x^2$ ومنه $\frac{x}{e^x} \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{x^2}{e^x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1+2h)}{2h}$ تساوي:	$-f'(1)$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1+2h)}{2h} = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = -f'(1)$
حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y - 2$ والذي يحقق $u(0) = 0$ هو u حيث:	$u(x) = -e^{2x} + 1$	لأن حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y - 2$ هي الدوال $f_C(x) = Ce^{2x} + 1$ و $f(0) = 0$ معناه $C = -1$.
مجموعة حلول المتراجحة $e^{-3x+2} \leq 1$ هي:	$[\frac{2}{3}; +\infty[$	لأن $e^{-3x+2} \leq e^0$ تكافئ $-3x+2 \leq 0$ ومنه $x \geq \frac{2}{3}$ إذن

(I) 1 دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

☆ النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 + e^{2x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 + e^{2x}) = +\infty$$

☆ الدالة المشتقة: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 2 + 2e^{2x} = 2(1 + e^{2x})$

☆ اتجاه التغير: لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(II) 2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7; -0.6[$: $0.3 < \alpha < 0.5$

☆ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.7; 0.6[$ ولدينا $f(-0.7) \times f(-0.6) < 0$

لأن $f(-0.7) \approx -0.15$ و $f(-0.6) \approx 0.1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7; 0.6[$.

(III) 3 استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) 1 أ) حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x + (1 + x)e^{-2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \left(\frac{1}{e^{-2x}} - \frac{x}{e^{-2x}} + (1 + x) \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + (1 + x)e^{-2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + e^{-2x} - \frac{1}{2}(-2xe^{-2x}) \right) = -\infty$$

ب) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته: لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)e^{-2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2}(-2xe^{-2x}) + e^{-2x} \right] = 0$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x + 1$

ج) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - y_{\Delta} = 0$ نضع $(x + 1)e^{-2x} = 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x + 1$ لأن $e^{-2x} > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	$\circ$	$+$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

نستنتج الوضع النسبي:

★ من أجل $x < -1$: (C_f) تحت (Δ) .

★ من أجل $x > -1$: (C_f) فوق (Δ) .

★ من أجل $x = -1$: (C_f) يقطع (Δ) .

② أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$

$$f'(x) = -1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1) \text{ أي } f'(x) = -1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x} \text{ وعليه } f'(x) = -g(x)e^{-2x}$$

$$f'(x) = -g(x)e^{-2x} \text{ نجد } f'(x) = -e^{-2x}(e^{2x} + 1 + 2x) \text{ ومنه } -(1 + e^{-2x} + 2xe^{-2x})$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

ج) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2 < x_1 < -1.1$ و $1.1 < x_2 < 1.2$:

★ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال

$$]-\infty; \alpha[\text{ ومنه مستمرة ومتزايدة تماما على المجال }]-1.2; -1.1[\text{ ولدينا: } f(-1.2) \times f(-1.1) < 0$$

$$\text{لأن } f(-1.2) \approx 1.197 \text{ و } f(-1.1) \approx -4.64 \times 10^{-3} \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة}$$

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } x_1 \text{ في المجال }]-1.2; -1.1[.$$

★ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال

$$[\alpha; +\infty[\text{ ومنه مستمرة ومتناقصة تماما على المجال }]1.1; 1.2[\text{ ولدينا: } f(1.1) \times f(1.2) < 0$$

$$\text{لأن } f(1.2) \approx 0.13 \text{ و } f(1.1) \approx -4.2 \times 10^{-4} \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 0$$

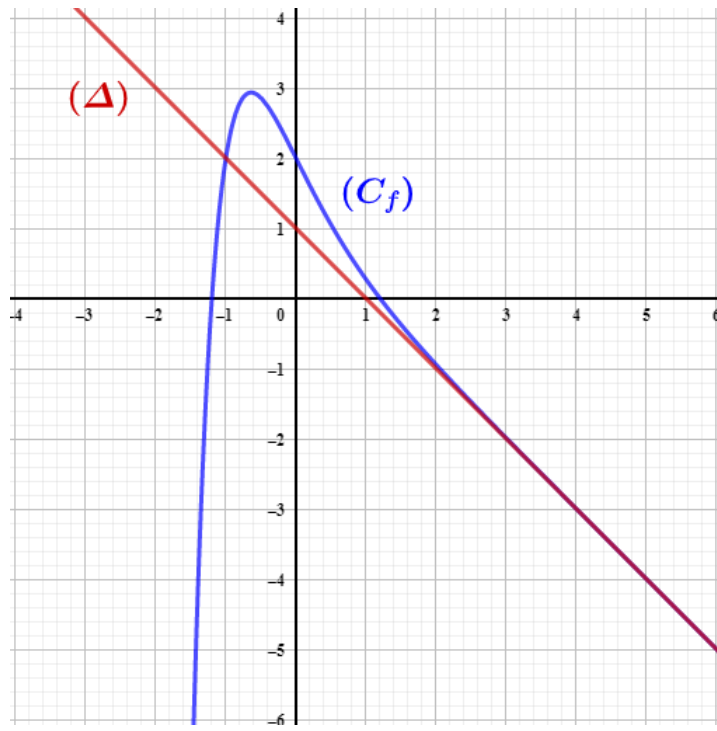
$$\text{تقبل حلا وحيدا } x_2 \text{ في المجال }]1.1; 1.2[.$$

③ تعيين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, ثم تفسير النتيجة بيانيا:

$$\text{حسب تعريف العدد المشتق: } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \text{ ونعلم مما سبق أن } f'(\alpha) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0.$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته $y = f(\alpha)$ عند النقطة $(\alpha; f(\alpha))$

④ إنشاء (C_f) و (Δ) (يعطى $f(\alpha) = 2.9$).



تمرين 08

(I) 1 دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\star \text{ النهايات: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x + e^x = -\infty$$

$\star$ اتجاه التغير: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $g'(x) = -1 + e^x$ ومنه $g'(x) = 0$ أي $-1 + e^x = 0$ وبالتالي $x = 0$ ولدينا $g'(x) > 0$ يكافئ $x > 0$ ،
ولدينا $g'(x) < 0$ يكافئ $x < 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $] -\infty; 0]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(0) = 2$	$+\infty$

2 استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

لدينا من أجدول التغيرات من أجل كل عدد حقيقي $g(x) > 0$

(II) 1 حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + xe^{-x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + xe^{-x} = -\infty$$

2 أ إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$.

(ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - x - 1 = xe^{-x} = 0$ ومنه: $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
xe^{-x}	-	0	+
الوضع النسبي	يقع (C_f) تحت (Δ)	يقطع (C_f) (Δ)	يقع (C_f) فوق (Δ)

(أ) 3 إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)e^{-x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(e^x + 1 - x) = e^{-x}g(x)$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا e^{-x} ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي: $f'(x) > 0$ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(ج) تبين أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.5; -0.4[$ ولدينا $f(-0.5) \times f(-0.4) < 0$ ولأن $f(-0.5) = -0.32$ و $f(-0.4) = 0.003$ ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة، فاصلتها α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$

4 ☆ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

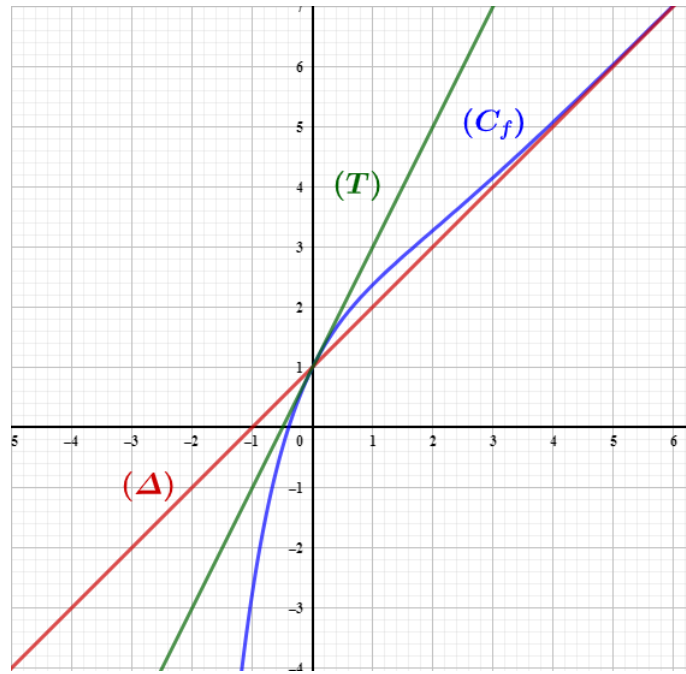
☆ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) : $y = f'(0)x + f(0)$ ومنه $y = 2x + 1$

$$f(x) - 2x - 1 = xe^{-x} - x = x(e^{-x} - 1)$$

$$x(e^{-x} - 1) = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^{-x} - 1$	+	0	-
$x(e^{-x} - 1)$	-	0	-
الوضع النسبي	يقع (C_f) تحت (Δ)	يقطع (C_f) (Δ)	يقع (C_f) تحت (Δ)

5 إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f) .



⑥ تعيين حسب قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلين متمايزين.
الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حزمة المستقيمات ذوات المعادلات $y = mx + 1$ التي تشمل نقطة ثابتة $(0; 1)$

عدد الحلول	قيم m
حل وحيد	$]-\infty; 1]$
حلان	$]1; 2[$
حل وحيد	$m = 2$
حلان	$]2; +\infty[$

تمرين 09

(I) ① دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

☆ النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x - e = -e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^x - e = +\infty$$

☆ اتجاه التغير: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

$g'(x) = 0$ يكافئ $(x+2)e^x = 0$ يكافئ $x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	$\circ$	$+$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$

الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[-2; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -2]$
جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$g(x)$	$-e$	$g(-2)$	$\circ$	$+\infty$

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-2; +\infty[$

ولدينا $0 \in [g(-2); +\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ولدينا:

$$g(0.5) \times g(0.6) < 0 \text{ وبالتالي } 0.5 < \alpha < 0.6$$

③ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$

(II) ① حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - ex + e - 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x - ex + e - 2 = +\infty$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = e^x + xe^x - e = e^x(1+x) - e = g(x) \text{ ودالتها المشتقة}$$

استنتاج اتجاه التغير: إشارة $f(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ أ) تبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -ex + e - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex + e - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex + e - 2)] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -ex + e - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

(ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $f(x) - (-ex + e - 2) = xe^x = 0$ معناه $x = 0$ و $e^x > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
xe^x	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

(ج) تبين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين معادلته:

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = -e$ أي $g(x) = -e$ ومنه $(x+1)e^x - e = -e$ أي $(x+1)e^x = 0$

وعليه بالتالي يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = -1$ ومنه:

$$(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \quad \text{إذن: } (T) : y = -ex + e - 2 - e^{-1}$$

④ إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.2$.

⑤ المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

وإشارة حلول المعادلة $(m+2-e)e^{-x} = x$:

لدينا: $(m+2-e)e^{-x} = x$ تكافئ $xe^x = m+2-e$

ومنه $m = xe^x + e - 2$ وعليه:

$f(x) = -ex + m$ إذن هي مناقشة مائلة، الحلول هي

فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -ex + m$

ومنه: $-ex + m$

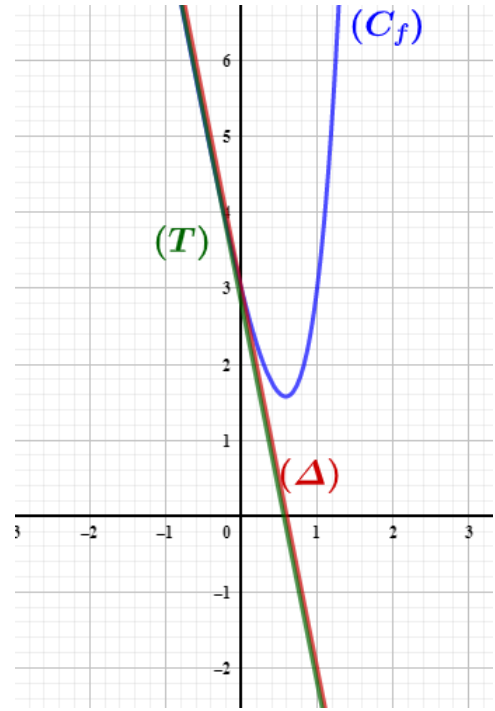
✳ $m \in]-\infty; e - 2 - e^{-1}]$ لا توجد حلول.

✳ $m = e - 2 - e^{-1}$ يوجد حل وحيد سالب.

✳ $m \in]e - 2 - e^{-1}; e - 2]$ يوجد حلان سالبان.

✳ $m = e - 2$ يوجد حل وحيد معدوم

✳ $m > e - 2$ يوجد حل وحيد موجب



① نعين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x ، $h(x) = f(x+a) + b$ (III)

لدينا: $h(x) = e[(x+1)e^x - x] = (x+1)e^{x+1} - ex$

ومنه $f(x+a) + b = (x+a)e^{x+a} - e(x+a) + e - 2 + b = (x+a)e^{x+a} - ex - ea + e - 2 + b$

بالمطابقة نجد: $a = 1$ و $-ea + e - 2 + b = 0$ ومنه $b = 2$ وبالتالي: $h(x) = f(x+1) + 2$

② شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم رسمه في نفس المعلم السابق:

(C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

أ) 3 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - (-x + 2) = (-x + 2)e^x$:

$$f(x) - (-x + 2) = (-x + 2)(e^x + 1) - (-x + 2) = (-x + 2)(e^x + 1 - 1) = (-x + 2)e^x = (-x + 2)e^x$$

ب) تبين أن المستقيم (Δ) ذي $y = -x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ (يعطى $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x + 2e^x) = 0$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x + 2e^x) = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذي $y = -x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x + 2)$

لدينا $f(x) - (-x + 2) = (-x + 2)e^x = 0$ ومنه $-x + 2 = 0$ أي $x = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x + 2$	+	0	-
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي	يقع (C_f) تحت (Δ)	يقطع (C_f) (Δ)	يقع (C_f) تحت (Δ)

أ) 4 إثبات أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه -1 :

معناه $f'(x) = -1$ أي $f'(x) = -1$ ومنه $(-x + 1)e^x = 0$ وبالتالي: $x = 1$

إذن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي -1 في النقطة $A(1; f(1))$

ب) كتابة معادلة للمماسين (T) و (T') للمنحنى (C_f) عند النقطتين ذاتي الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب:

★ لدينا $(T) : y = f'(0)x + f(0)$ ومنه $(T) : y = 4$.

★ لدينا $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه $(T) : y = -x + e + 2$

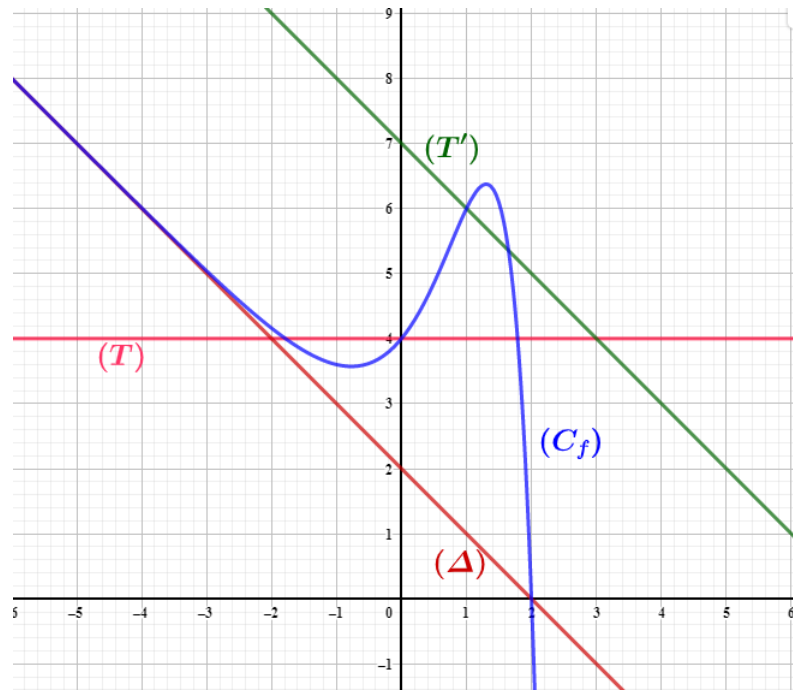
6 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتاج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

لدينا: $f(x) = 0$ معناه $(-x + 2)(e^x + 1) = 0$ إما $x = 2$ لأن $e^x + 1 > 0$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي $S = \{2\}$

★ إحداثي نقط تقاطع (C_f) مع xx' هي $B(2; 0)$

6 رسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f)



⑤ المناقشة بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x) = -x + m$:

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -x + m$

✳ إذا كان $m \in]-\infty; 2]$ فإن المعادلة تقبل حلاً وحيداً موجباً.

✳ إذا كان $m \in]2; 4]$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب تماماً والآخر موجب تماماً.

✳ إذا كان $m = 4$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر موجب تماماً.

✳ إذا كان $m \in]4; 2 + e]$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.

✳ إذا كان $m = e + 2$ فإن المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً $x = 1$.

✳ إذا كان $m \in]e + 2; +\infty[$ فإن المعادلة ليس لها حل

تمرين 11

(I) ① تعيين كلا a و b

☆ (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ معناه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ أي أن $a = 1$.

☆ (C_g) يقبل مماساً عند المبدأ معامل توجيهه 3 معناه $g'(0) = 3$ أي أن $g'(0) = 2e^0 + be^0 = 3$ إذن $b = 1$

② أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-2.5 < \alpha < -2$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-2.5; -2[$ ولدينا: $g(-2.5) \times g(-2) < 0$ ومن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-2.5; -2[$

ولدينا من البيان $g(0) = 0$

ب) استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

(II) 1 حساب النهايات:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- 2 أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$:
 الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = \dots$
 ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $]0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; 0]$
 ★ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$f(0)$	$+\infty$

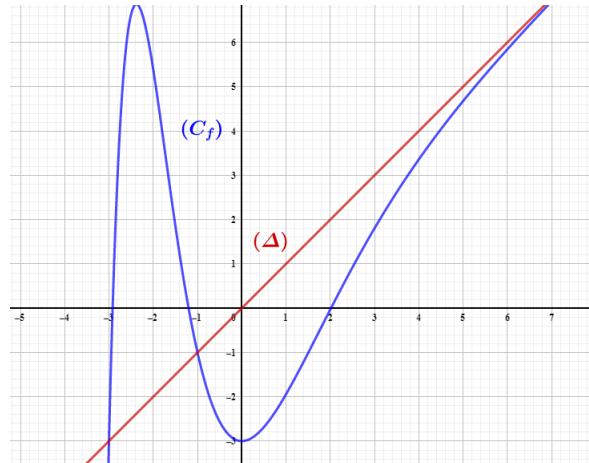
- 3 تبيان أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيينها:

- 4 أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
 لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

- ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) .

x	$-\infty$	-5	-3	$+\infty$
$f(x) - y$		-	+	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

- 6 رسم (Δ) و (C_f) :



(I) ① دراسة الوضع النسبي لـ (C_h) و (C_g) .

☆ (C_g) فوق (C_h) على المجال $]\alpha; \beta[$ وتحت (C_h) على كل من المجالين $]-\infty; \beta[$ و $]\beta; +\infty[$

② استنتاج إشارة $g(x) - h(x)$:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$g(x) - h(x)$	$-$	$\ominus$	$+$	$\ominus$	$-$

(II) ① احسب النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

تفسير النتائج بيانيا: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 1$

② إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)-h(x)}{(e^x-x)^2}$

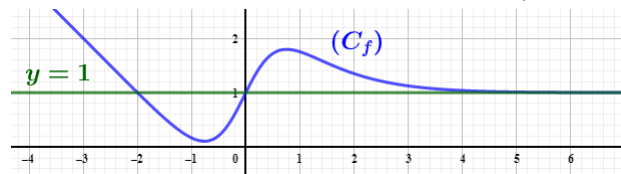
③ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; \beta]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين: $]-\infty; \alpha]$ و $]\beta; +\infty[$

☆ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$\ominus$	$+$	$\ominus$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1	

④ إنشاء (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.23$, $f(\beta) \approx 2.81$.



(I) $g(x) = (2x+1)e^x - 1$

① دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

☆ النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)e^x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)e^x - 1 = +\infty$$

☆ اتجاه التغير:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x + 3 = 0$ أي $x = -\frac{3}{2}$ معناه

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$

إذن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $] -\infty; -\frac{3}{2}]$ ☆ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	-1	$g(-\frac{3}{2})$	$+\infty$

② حساب $g(0) = 0$ واستنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $g(0) = 0$ وبالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$

① حساب النهايات: (II)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^x - 1)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^x - 1)^2 = -\infty$$

أ) ② تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = (e^x - 1)g(x) \text{ وبالتالي: } f'(x) = (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1) = (e^x - 1)(e^x - 1 + 2xe^x)$$

$1)g(x)$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

☆ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و $(e^x - 1)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$e^x - 1$	$-$	$\circ$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$+$

الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) المار بمبدأ المعلم:

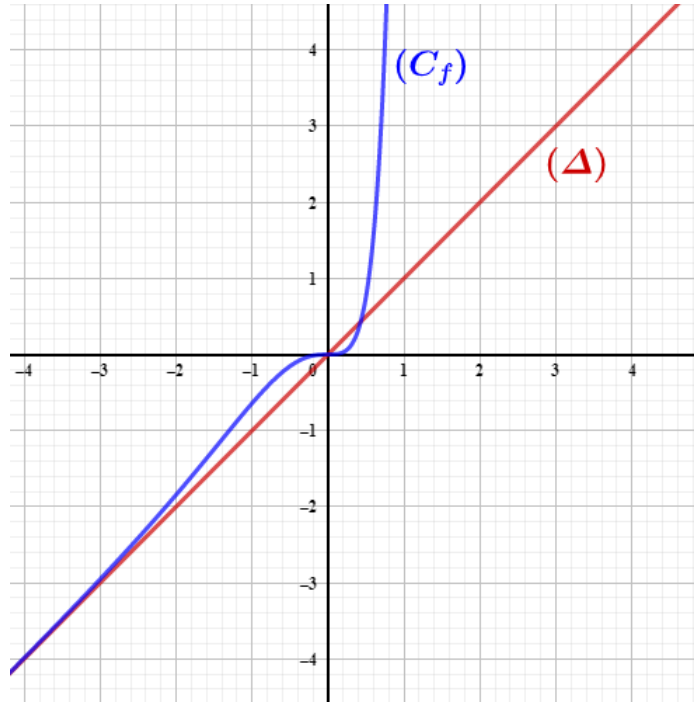
لدينا: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: (T) علما أن المماس يمر من المبدأ معناه: $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$ ومنه $f(x_0) = 0$ وبالتالي: $-2x_0^2(e^{x_0} - 1)e^{x_0} = 0$ ومنه: $x_0 = 0$ إذن معادلة المماس هي: $(T) : y = 0$

٣ (أ) تبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - 1)^2 - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{2x} + x - 2xe^x - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{2x} - 2xe^x] = 0$ إذن:

٣ (ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) :
 $f(x) - x = xe^x(e^x - 2) = 0$ تكافئ $xe^x = 0$ أو $e^x = 2$ وبالتالي: $x = 0$ أو $x = \ln 2$.

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
xe^x	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)

٤ إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f) .



٥ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx$.

حلول المعادلة $f(x) = mx$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = mx$ إذن:

✱ لما $m \in]-\infty; 0]$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

✱ لما $m \in]0; 1[$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول

✱ لما $m \in]1; +\infty[$ المعادلة تقبل حلان

١ (III) تحديد اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها دون حساب عبارة $h(x)$:

المشتقة: k قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها ودالتها المشتقة:

$$k'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \text{ إشارة } k'(x)$$

لدينا: $\frac{-1}{x^2} < 0$ ولدينا $f'(x) = 0$ لما $x = 0$ و $f'(x) > 0$ لما $x > 0$ أو $x < 0$

وعليه $f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ لما $\frac{1}{x} = 0$ وهذا مستحيل و $f'\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ لما $\frac{1}{x} > 0$ أو $\frac{1}{x} < 0$ أي لما $x > 0$ أو $x < 0$
إذن الدالة k متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$

تمرين 14

(I) 1 كتابة معادلة للمماس (T) :

معادلة المماس (T) من الشكل $y = a'x + b'$ ونلاحظ أن (T) يشمل النقطة $A(0; 1)$ ومنه $b' = 1$ ويشمل أيضا النقطة $B(-1; 3)$ ومنه $-a' + 1 = 3$ أي $a' = -2$ إذن $y = -2x + 1$

☆ لدينا: $f(x) = xe^{-x^2} + ax + b$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0$ وبالتالي المستقيم ذي المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) وبالمطابقة مع المستقيم (T) نجد $a = -2$ و $b = 1$

2 إثبات أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة لكل منهما:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 2 = e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 2$

إذن $f'(x) = -2$ تكافئ $e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 2 = -2$ ومنه $e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 2 = -2$ ومنه $e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$ أي $1 - 2x^2 = 0$ لأن $e^{-x^2} \neq 0$ وبالتالي $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه يوجد مماسين موازيين لـ (T) أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{\sqrt{2}}$ والآخر عند النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

☆ كتابة معادلة للمماسين (T') و (T'') :

$$\begin{cases} (T') : y = -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2x + \frac{e^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ (T'') : y = -2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2x - \frac{e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

3 المناقشة بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$

$$\left[-\frac{e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; 1 \right]$$

(II) 1 حساب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$$

2 حساب $h'(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

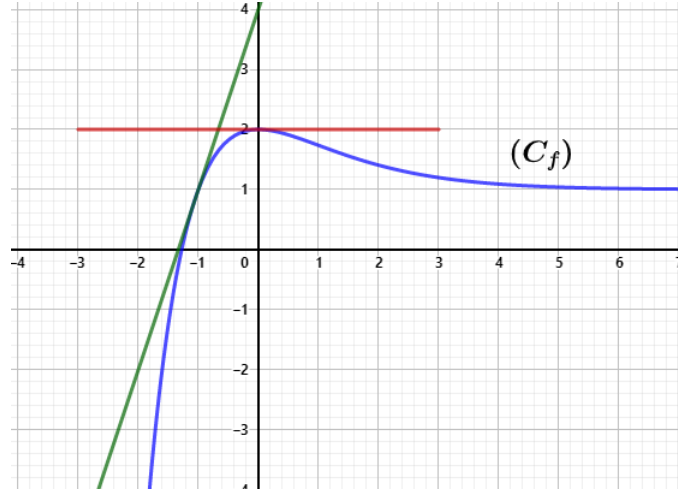
الدالة h قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها و $h'(x) = \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

من خلال التمثيل البياني للدالة f نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ ومنه $\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ أي $h'(x) > 0$ وبالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$+$
$h(x)$	1	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$

تمرين 15

(I) 1 بقراءة بيانية:



أ) تعيين كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر هذه الأخيرة بيانياً:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(C_f) يقبل مستقيماً مقارباً موازياً لمحور الفواصل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

ب) تعيين كلا من $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$:

$$f(-1) = 1, f(0) = 2$$

★ $f'(0) = 0$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 والموازي لمحور الفواصل وعليه $f'(0) = 0$

★ $f'(-1)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 وبما أن (0; 4) و (-2; 2) هما إحداثي

$$f'(-1) = \frac{4 - (-2)}{0 - (-2)} = 3$$

ج) اعتماداً على ما سبق إيجاد قيمة كلا من a و b :

$$\begin{cases} b + 1 = 2 \\ (-a + b)e + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} a(0) + be^0 + 1 = 2 \\ a(-1) + be^1 + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} b = 1 \\ (-a + 1)e = 0 \end{cases}$$

★ استنتاج عبارة $f(x)$:

$$f(x) = (x + 1)e^{-x} + 1$$

2 أ) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1.4 < \alpha < -1.2$:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[-1.4; -1.2]$ ولدينا $f(-1.4) \times f(-1.2) < 0$ إذن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :

$$\text{حيث: } -1.4 < \alpha < -1.2$$

(ب) استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	ϕ	$+$

③ أ) حساب كلاً من: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم تفسير النتيجة بياناً، (نقبل أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$) لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}-1}{x} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-xe^{-x}+e^{-x}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}-1}{x} \right] = -2 \end{aligned}$$

التفسير البياني: الدالة h غير قابلة للاشتقاق في النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل نصف مماس على يمين الصفر معامل توجيهه 0 ونصف مماس على يسار الصفر معامل توجيهه -2

(II) ① أ) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{x+2}{e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[1 - \frac{1+\frac{2}{x}}{e^x} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{x+2}{e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x} \right] = +\infty \end{aligned}$$

ب) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{x+2}{e^x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x} \right] = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$.

② أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = f(x)$:

☆ الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 1 - (e^{-x} - (x+2)e^{-x}) = 1 - ((1-x-2)e^{-x}) = 1 + (x+1)e^{-x} = f(x)$ ومنه: $1 - (-x-1)e^{-x}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$

☆ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

③ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1 :

لدينا $(T) : y = x - e$ ومنه: $(T) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$

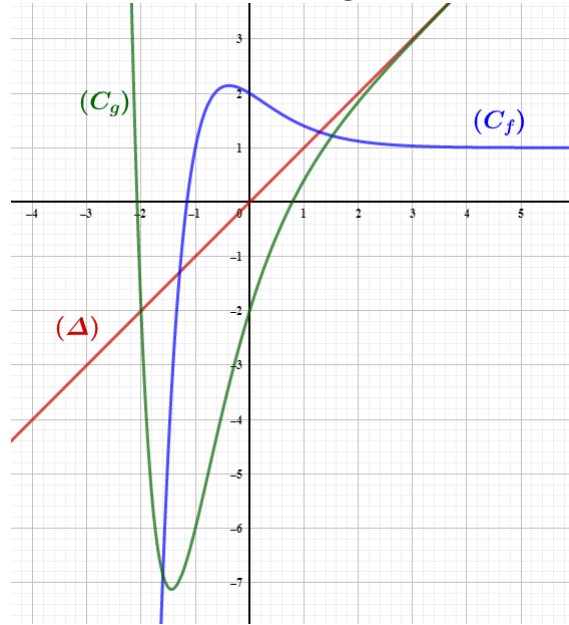
④ تبيان أن $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتاج إشارة $g(\alpha)$:

لدينا: $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ومن جهة أخرى لدينا: $f(\alpha) = 0$ تكافئ $(\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 = 0$ ومنه:

$$g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2)\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right) = \alpha + \frac{\alpha+2}{\alpha+1} = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$$

④ أ) حساب $g(0)$ ثم إنشاء كلا من (Δ) ، (C_f) والمنحنى (C_g) .

لدينا: $g(0) = -2$



ب) المناقشة بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$ ، حلول المعادلة هي فواصل نقط

تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + m$

☀ من أجل $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة ليس لها حلول.

☀ من أجل $m = -e$ المعادلة لها حل مضاعف سالب تماماً.

☀ من أجل $m \in]-e; -2[$ المعادلة لها حلان سالبان تماماً.

☀ من أجل $m = -2$ المعادلة لها حلان أحدهما سالب والآخر معدوم.

☀ من أجل $m \in]-2; 0[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة.

☀ من أجل $m \in [0; +\infty[$ المعادلة لها حل واحد سالب.

① حساب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم التعبير عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ حيث g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
 $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x((x+2)e^{x-1} - 1) = xg(x)$

② دراسة تغيرات الدالة g

(أ) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{x-1} + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{x-1} + 1 = +\infty$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = e^{x-1}(x+3)$ ومنه
 إشارة $g'(x)$ من إشارة $x+3$ ومنه: $x+3=0$ أي $x=-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	$-$	$\circ$	$+$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-3; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -3]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	0	$-e^{-4} - 1$	$+\infty$

(ج) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ والتأكد أن: $0.20 < \alpha < 0.21$

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-3; +\infty[$ ولدينا: $g(0.20) \times g(0.21) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.2 < \alpha < 0.21$

(د) تعيين إشارة $g(x) = 0$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$

③ حسابات النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[e^{x-1} - \frac{1}{2} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} \times \left[(x-1)e^{x-1} - \frac{x-1}{2} \right] = -\infty$$

④ دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	$\circ$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$

f متزايدة تماما على كل من المجالين $[\alpha; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; \alpha]$
جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

⑤ إثبات أن: $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه $e^{\alpha-1}(\alpha+2) - 1 = 0$ أي: $e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$
ولدينا من جهة أخرى: $f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

⑥ أ) حساب $h'(x)$ ثم تعيين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0; 1]$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على $[0; 1]$ ولدينا: $h'(x) = \frac{-6x^2(x+2)+2x^3}{(2(x+2))^2} = \frac{-x^3-6x^2}{2(x+2)^2} = \frac{-x^2(x+6)}{2(x+2)^2}$
وبما أنه من أجل كل $x \in [0; 1]$: $-x^2 < 0$ و $x+6 > 0$ و $2(x+2)^2 > 0$ فإن $h'(x) < 0$ أي أن h متناقصة تماما على المجال $[0; 1]$

ب) استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $0.2 < \alpha < 0.21$ وبما أن h متناقصة تماما على المجال $[0; 1]$ فإن: $h(0.21) < h(\alpha) < h(0.2)$
أي $-0.002 < \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)} < -0.0018$ وبالتالي: $-0.002 < f(\alpha) < -0.0018$

⑦ تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات، وهذا يعني أن $f(x) = 0$ ومنه: $x^2(e^{x-1} - \frac{1}{2}) = 0$ يكافئ $x^2 = 0$ أو $e^{x-1} - \frac{1}{2} = 0$ يكافئ $x = 0$ أو $x = 1 - \ln(2)$ ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين $(0; 0)$ ، $(1 - \ln 2; 0)$ ،

(I) 1 تعيين قيمتي كلا من a و b

☆ (C_g) يقبل مماسيا في النقطة التي فاصلتها 1 موازيا لحامل محور الفواصل ويشمل $A(0; -1)$ معناه:

$$\begin{cases} g'(1) = 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = (x + a + 1)e^x$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} (a + 2)e = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} g'(1) = 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

وعليه: $g(x) = (x - 2)e^x + 1$

2 أ) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)e^x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)e^x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - 2e^x + 1 = 1$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = (x - 1)e^x$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x - 1$

$$\star g'(x) = 0 \text{ تكافئ } x - 1 = 0 \text{ يكافئ } x = 1$$

$$\star g'(x) > 0 \text{ تكافئ } x - 1 > 0 \text{ يكافئ } x > 1$$

$$\star g'(x) < 0 \text{ تكافئ } x - 1 < 0 \text{ يكافئ } x < 1$$

☆ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

☆ الدالة g متناقصة تماما على المجال $] -\infty; 1[$

3 أ) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1.3 < \alpha < -1.2$ و $1.8 < \beta < 1.9$:

☆ على المجال $[-1.3; -1]$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-1.3; -1]$ ولدينا: $g(-1.3) \times g(-1) < 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال: $[-1.3; -1]$.

☆ على المجال $[1.8; 1.9]$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.8; 1.9]$ ولدينا: $g(1.8) \times g(1.9) < 0$ ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال: $[1.8; 1.9]$.

ب) استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$g(x)$	+	0	-	0	+

(II) 1 حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{1-e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x})} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{1-e^x} = -\infty$$

② حساب كلا من $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ وتفسير النتائج بيانياً:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{1-e^x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{1-e^x} = -\infty$$

ومنه (C_f) يقبل محور الترتيب مستقيماً مقارباً عمودياً.

③ أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$ والدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(1-e^x) - (x-1)(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{1+xe^x-2e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{1+(x-2)e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+

الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين: $]-\infty; \alpha[$ و $]\beta; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجالين $[\alpha; 0]$ و $[0; \beta]$

★ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	$f(\beta)$	$+\infty$

③ أ) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x - 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{1-e^x} - (x-1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x-1) - (x-1)e^x}{1-e^x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{xe^x - e^x}{1-e^x} \right] = 0 \end{aligned}$$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) .

لدينا $f(x) - (x-1) = \frac{(x-1)e^x}{1-e^x}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1 - e^x$	+	0	-	-
$(x - 1)$	-	-	0	+
$f(x) - (x - 1)$	-	+		-
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

5 تبيان أن $f(\alpha) = \alpha - 2$ و $f(\beta) = \beta - 2$ ثم تعيين حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

وعليه:
$$\begin{cases} f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{1-e^\alpha} \\ e^\alpha = \frac{-1}{(\alpha-2)} \end{cases} \quad \text{ومنه:} \quad \begin{cases} f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{1-e^\alpha} \\ (\alpha-2)e^\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{1-\frac{-1}{\alpha-2}} = \frac{\alpha-1}{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}} = \alpha-2$ وبالتالي: $f(\alpha) = \alpha - 2$ و بنفس الطريقة نجد: $f(\beta) = \beta - 2$

6 حساب $f(1)$ وإنشاء (C_f) و (Δ)

لدينا: $f(1) = 0$

