

نهاية بعض الدوال

نهاية دالة كثير حدود هي نهاية الحد الاكبر درجة بجوار $\pm \infty$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

نهاية دالة ناطقة هي نهاية أكبر حد في البسط على أكبر حد في المقام بجوار $\pm \infty$.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^3} \right) = 2$$

نهاية مركب دالتين

$f(x) = goh(x)$ دالة مركبة من الدالتين g و h . $a; b; c$ أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

مثال

$$\text{حساب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right)$$

نضع $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}$ لاحظ أن: $f(x) = goh(x)$ مع $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $h(x) = \frac{x-1}{x}$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 \text{ ومنه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) = 2$$

هناك حالات لا يمكن حساب فيها النهاية مباشرة تسمى هذه الحالات بحالة عدم التعيين وهي اربع:

$$+\infty - \infty; 0 \times \infty; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$$

$$\text{الحالات : } \frac{0}{\infty} = 0; \frac{\infty}{0} = \infty; (+\infty) \times (-\infty) = -\infty \text{ ليست حالات عدم التعيين}$$

ولازالة حالات عدم التعيين نتبع احدى الطرق التالية: التحليل والاختزال او الضرب في المرافق أو الحصر العدد المشتق او العامل مشترك نتطرق لكل حالة في التمارين

النهايات والمستقيمات المقاربة

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ فإن المستقيم ذو المعادلة: $y = b$ مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل

المستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة: $x = a$ مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب

المستقيم المقارب المائل

المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ يكون المستقيم (Δ) مستقيم مقارب

للمنحني (C_f) عند $\pm\infty$ إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

إذا كانت f دالة بحيث: $f(x) = ax + b + g(x)$ و كانت: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $\pm\infty$.

الوضع النسبي

لدراسة وضعية المنحني (C_g) الممثل لدالة g بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta): y = ax + b$

نقوم بدراسة إشارة الفرق $g(x) - (ax + b)$

إذا كانت: $g(x) - (ax + b) > 0$ فإن (C_g) يقع فوق (Δ)

إذا كانت: $g(x) - (ax + b) < 0$ فإن (C_g) يقع اسفل (Δ)

النهاية بالمقارنة

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ و f, g, h دوال و l عدد حقيقي.

وكانت: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

التمرين 03

باستعمال الاختزال أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 4x - 5} \right) ; \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

باستعمال المرافق أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - 1}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1} \right)$$

باستعمال الحصر أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 + \sin x} \right) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x^2} \right)$$

التمرين 04

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} - \{-1\} :$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

$$(2) \text{ عين الاعداد الحقيقية } a; b; c; d \text{ بحيث من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

(4) بين أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مانلا Δ يطلب تعيين معادلة له

(5) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى Δ .

التمرين 01

أحسب النهايات التالية ثم فسر النتائج هندسيا (بيانيا):

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + x + 1) \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + x + 1) \quad (3) \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 3x^2 + x + 1)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 3x^2 + x) \quad (5) \lim_{x \rightarrow -1} (-2x^3 - 3x^2 + x + 1) \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 3x^2 + x)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x - 1} \quad (8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \quad (9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \quad (10) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x^2 - x + 2} \quad (12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - x - 2} \quad (13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} \quad (14) \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x^2 - x + 2}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}} \quad (16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x + 3}} \quad (17) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x^2)(1 - x)$$

التمرين 02

أحسب نهايات الدالة عند حدود مجموعة التعريف في كل حالة مما يلي:

$$(1) \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad f(x) = \frac{-3x + 2}{-x + 1}$$

$$(2) \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3\} \quad f(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 4}{x + 3}$$

$$(3) \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = \frac{2x + 7}{(x - 2)^4}$$

$$(4) \quad D_f = \mathbb{R} - \{-3; 1\} \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

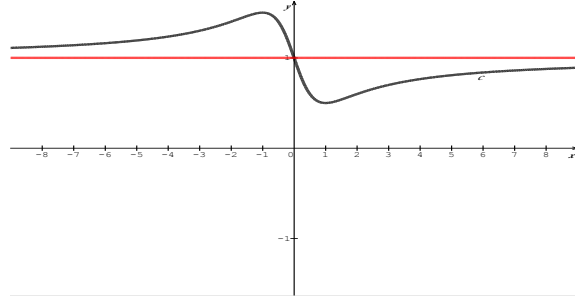
$$(5) \quad D_f = \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(1) \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad f(x) = 4x + 2 - \frac{3}{x}$$

التمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. مستقيم معادلته: $y = 1$.



بقراءة بيانية:

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f . (2) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) عين اشارة الدالة f . (4) اثبت ان النقطة $A(0; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

التمرين 08

$\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بقراءة بيانية:

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

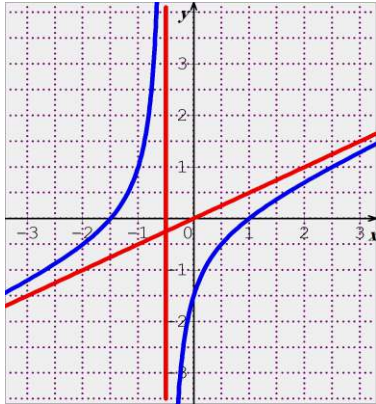
(2) عين اشارة الدالة f' .

(3) عين اشارة الدالة f .

(4) عين وضعية $\mathcal{C}_f$ بالنسبة للمستقيم القارب المائل.

(5) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(6) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.



التمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

(2) عين الاعداد الحقيقية $a; b; c$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 1}$

(3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)]$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ ثم فسر النتائج هندسيا.

(4) ادر وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى $y = x + 1$: (Δ) .

التمرين 06

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

(2) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ماذا تستنتج.

(3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. خمن وجود مستقيم مقارب مائل.

(4) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

(5) بين أن $u(x) + 2x > 0$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = g(x)$ ماذا تستنتج.

التمرين 10

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$. جدول تغيراتها كما يلي :

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

نفرض أنه من أجل كل $x > 1$ ، $f(x) = ax + \frac{b}{x-c}$ ، a ، b و c أعداد حقيقية نريد تعيينها . نسمي (C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) عين نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف .

(2) أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب . ثم استنتج قيمة c .

(3) انطلاقا من عبارة $f(x)$ ، بين أن لدينا العلاقة $6a + b = 5$.

(4) انطلاقا من عبارة $f'(x)$ بين أن لدينا $4a - b = 0$

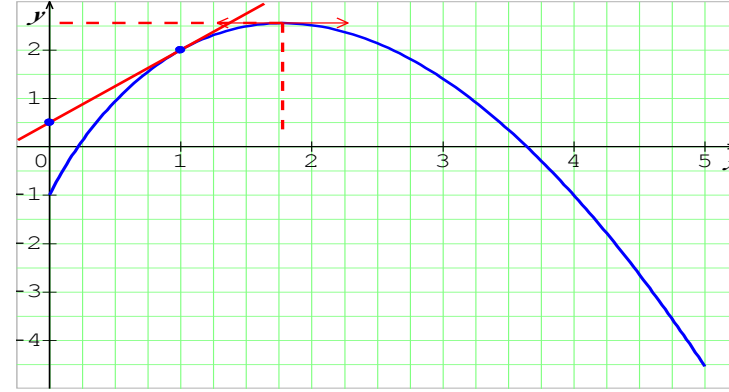
(5) استنتج عبارة $f(x)$ وبرهن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $x - 2y = 0$ مقارب للمنحنى (C_f) .

(6) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) .

(7) أرسم (C_f) ومستقيمه المقاربين .

التمرين 09

الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$



المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحنى عند النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و $\frac{16}{9}$.

(1) بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$ و $f(0)$.

(2) بقراءة بيانية عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) حل بيانيا في المجال $[0; +\infty[$ المتراجحات التالية (القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-1})

أ - $f(x) \geq 0$ ، ب - $f'(x) \leq 0$

(5) نعتبر من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = a + bx(2 - \sqrt{x})$ مع a و b عدنان حقيقيان.

أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

ب - باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال 1 عين a و b .