

ملخص المتتاليات العددية - 3 ثانوي علمي بكالوريا 2021 . الأستاذ بلجودي حمو

المتتالية الهندسية

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان : $v_{n+1} = v_n \times q$.
 q هو أساس المتتالية (v_n) .

عبارة الحد العام

حيث v_p هو حد من حدود المتتالية . $v_n = v_p \times q^{n-p}$

حيث v_0 هو الحد الأول لـ (v_n) . $v_n = v_0 \times q^n$

لوسط الهندسي

إذا كانت الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن $a \times b = c^2$.

المجموع

$$S = v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n$$

$$= \frac{v_p}{1-q} (1 - q^{n-p+1})$$

المتتالية الحسابية

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا كان : $u_{n+1} = u_n + r$.
 r هو أساس المتتالية .

عبارة الحد العام

حيث u_p هو حد من حدود المتتالية . $u_n = u_p + (n-p)r$

حالة خاصة : $u_n = u_0 + nr$.

الوسط الحسابي

إذا كانت الأعداد a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن $a + c = 2b$.

المجموع

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$$

$$= \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$$

الحد من الأعلى و الأسفل:

- إذا كان $u_n \leq A$ نقول أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد A .
- إذا كان $u_n \geq B$ نقول أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد B .

تقارب متتالية:

- إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ فإن (u_n) متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة

اتجاه تغير متتالية :

- إذا كان $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (u_n) متزايدة .
- إذا كان $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة .
- إذا كان $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة .

✓ اتجاه تغير متتالية حسابية انطلاقا من أساسها :

- إذا كان $r < 0$ فإن (u_n) متناقصة .
- إذا كان $r > 0$ فإن (u_n) متزايدة .
- إذا كان $r = 0$ فإن (u_n) ثابتة .

✓ اتجاه تغير متتالية هندسية انطلاقا من أساسها :

- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن (u_n) متناقصة .
- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن (u_n) متزايدة .
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة .
- إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن

الاستدلال بالتراجع:

- $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي .
 للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :
1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
 2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

التمرين-1-

(u_n) متتالية عددية معرفة على N حيث: $u_n = 3n - 2$

1. أحسب الحدود u_1, u_2, u_3, u_{10} .
2. برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
3. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4. هل المتتالية (u_n) متتالية متقاربة أو متباعدة.

5. بين أن 298 حد من حدود المتتالية محددا رتبته.

7. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

8. عين قيمة حتى يكون $S_n = 143$ ثم أحسب: $S_{10} = u_0 + u_2 + \dots + u_{10}$

التمرين-2-

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول هو $u_0 = -2$ وأساسها $r = 3$

1. أحسب الحدود $u_1, u_2, u_3, u_{10}, u_{20}$.
2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) . تحقق من جوابك الأول.

التمرين-3-

(v_n) متتالية عددية معرفة على N حيث: $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1. أحسب الحدود v_1, v_2, v_3 .
2. هل المتتالية (v_n) متتالية متقاربة أو متباعدة.
3. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
4. بين أن $\frac{3}{32}$ حد من حدود المتتالية محددا رتبته.
5. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

التمرين-4-

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول هو $u_0 = 3$ وأساسها $q = 2$.

1. أحسب الحدود $u_1, u_2, u_3, u_{10}, u_{20}$.
2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) ثم تحقق من جوابك الأول.

التمرين-5-

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 .

1. احسب حدها الثاني u_2 علما أن: $u_1 + u_3 = 12$.
2. احسب الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.
3. عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1 .
5. اكتب الحد العام u_n بدلالة n ثم عين n بحيث يكون: $u_n = 32$.

التمرين-6-

$I \bullet (u_n)$ متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد

طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1. أحسب u_1, u_2, u_3, u_4 ، ضع تخمينا حول اتجاه تغير
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.
3. أدرس اتجاه تغير (u_n) واستنتج تقاربها واستنتج نهايتها.

$II \bullet (v_n)$ متتالية معرفة على N بالعلاقة: $v_n = u_n + 2$.

1. بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
2. عبر بدلالة n عن كل من v_n و u_n تحقق من نهاية (u_n) .
3. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
4. أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين-7-

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = \alpha$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي

$$4u_{n+1} = u_n + 9 : n$$

1. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2. نضع: $\alpha = 4$ ، أحسب u_1, u_2 .

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$

ج. ادرس اتجاه تغير المتتالية، بين أنها متقاربة.

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n = u_n - 3$

أبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- احسب: $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad S_2 = v_0 + 4v_1 + \dots + 4^n v_n$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n ;$$

التمرين-8-

لنكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} = 3u_n - 4, n$$

1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4u_n + \alpha$

حيث α عدد حقيقي.

أ- عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية.

ب- باستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا، أكتب v_n بدلالة n ثم

عبر عن u_n بدلالة n .

التمرين-9-

المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) لنكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

أرسم (Δ) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى

معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$.

أرسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

أضع على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 .

تخمينا حول تقارب المتتالية.

3. أحسب العدد α فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (D) .

نضع $v_n = u_n - \alpha$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية.

أعين نهاية (u_n) وتحقق من تخمينك حول التقارب.