

تمارين الدوال الأسية في البكالوريا

شعبة : علوم تجريبية

التمرين [1] [باك 2008] [1م]

- (I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$.
 تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .
 عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.
 (II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.
 تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانيا . (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)

(2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

(3) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها .

(4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

(5) أرسم (C_g) .

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي : $k(x) = g(x^2)$.

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

التمرين [2] [باك 2010] [2م]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أـ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x + 1$ و $y = x$.

بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

(4) أثبت أن النقطة $\omega \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

بـ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

دـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m - 1)e^{-x} = m$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ ، تقبل في المجال $[1.75; 1.76]$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$.

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$ ،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

(4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

(5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

(6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون: $h'(x) = xe^x$.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

(2) أحسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

(4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ : $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ- تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

ب- استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج- تحقق من أن : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

I g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن : $0.36 < \alpha < 0.37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أدين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$ ،

ب- استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\alpha[$ و متزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$.

(2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ ، (نأخذ $1, 0 \approx f(-\alpha)$).

(6) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.
ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = -g(x)$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.38$)

د- عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty]$.

هـ- ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty]$.

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

(1) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' . (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب- بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

ج- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-1.37 < \alpha < -1.38$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$.

ج- أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

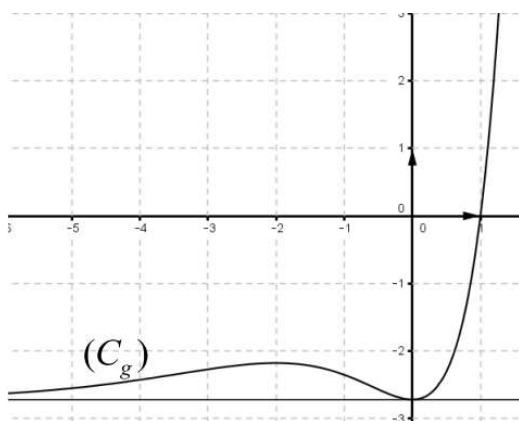
(2) أ- بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

ج- أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0.29$)

- (I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً للنتيجة، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) أـ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$.
بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
- (II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.
- (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .
- (2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.
- (3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.
- (4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.
تحقق أن: $F'(x) = f(x)$.

التمرين [10] [إياك 2017] [الدورة الإستثنائية] [1م]



- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 e^x - e$.
- (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل)
- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.
- حسب قيم العدد الحقيقي x .
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$.

- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (2) بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y = e^{-x} - 2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .

- (3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

- (4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty[$ متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

- (5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقاً من منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث : $y = 2x + 1$: (Δ) .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(4) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$) .

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.
(C_g) و (C_f) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) أـ أدرس اتجاه تغير الدالة g .

بـ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

(3) أحسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

(5) أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$) .

(6) أحسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

(7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أـ بين أن الدالة h زوجية .

بـ من أجل $x \in [0; 2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في الشكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto e^x$ بقراءة بيانية:

(1) بزر أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$.

(2) حدد تبعاً لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علماً أن: $g(0) = 0$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسّر نتيجتي النهايتين هندسياً.

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$

بـ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

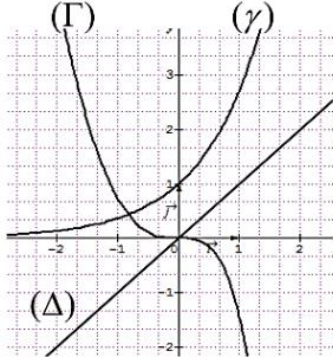
(3) أـ أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.

بـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$

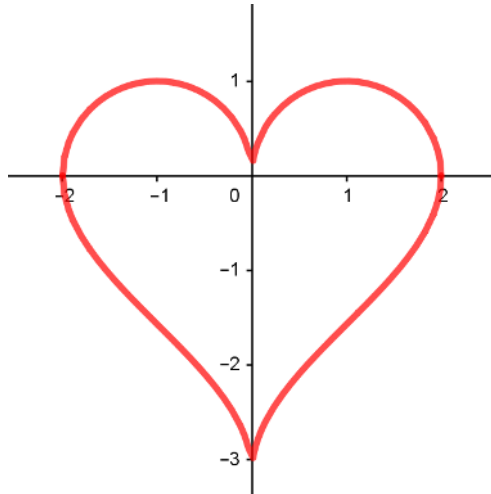
جـ استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) ، ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ؟

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-\infty; 1]$ ، ثم تحقق أن: $-0.6 < \alpha < -0.5$.

(5) أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .



“The only way to learn mathematics is to do mathematics”



كتابة: خالد بخاخشة

نشر يوم 2020/12/04