

MATHS BAC

3 A.S

علوم تجريبية

رياضيات

تقني رياضي

- عروض نظرية للدروس
- جميع الأفكار الواردة في البكالوريات السابقة مدمجة في الدروس
- تجميعية لجميع تمارين البكالوريا موزعة حسب الوحدات

تأليف : عادل نعيجي
الجزء الأول
- التحليل -

مقدمة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ و الصلاة و السلام على أشرف الخلق سيد المرسلين نبينا محمد صلى الله عليه و سلم نور العالمين أما بعد فإنه قبل حوالي ثلاث سنوات و بعد تفوقي في شهادة البكالوريا دورة 2015 و احتلالي للمرتبة الأولى وطنيا في شعبة الرياضيات بمعدل 18.86 كنت قد وعدت كل من صادفته أنني سأنشر وثائقي على شكل كتيبات لكن الأشغال لم تسنح لي بذلك و لكي لا يخلف الانسان وعده فإنه من دواعي السرور و الغبطة أن أضع بين أيديكم اليوم أول اصدار لسلسلة *SERIE ADEL NAIDJI* و التي تتوجه لطلاب البكالوريا بمجموعة من الكتيبات الالكترونية المجانية و التي نتمنى أن تكون لهم خير سند و معين، يشمل الجزء الأول من كتاب الرياضيات ما يضاوي حوالي 15 أسبوعا تعليميا من المنهج السنوي و يتناول جانب التحليل من البرنامج " الدوال "، و لقد عمدت لوضع مراجعة شاملة في بداية الكتاب لما يحتاجه طالب البكالوريا من معارف قبلية في السنتين السابقتين. إن هذا المؤلف ما هو إلا ثمرة جهد شخصي و عمل ذاتي بحت إذ تمت كتابته بخط اليد و لقد اعتمد على طريقة جديدة في القاء العروض النظرية إذ أن بناء الدروس استند إلى الأفكار المتداولة في تمارين الباك فهذه الدروس تشمل إلى حد بعيد جميع الأسئلة المطروحة في الأعوام السابقة إذ لا يخفى على أي طالب أن شهادة البكالوريا ما هي إلا رسكلة لأفكار مضمومة تعاد كل دورة، ثم يأتي في نهاية الكتاب تجميعية لكل المسائل الواردة في الشهادات السابقة إذ أنها أفضل معيار يمكننا أن نستند إليه من أجل التقييم الذاتي لقدرات المترشح، و في نهاية المطاف فما بوسعي إلا أن أتمنى لكل مقبل على شهادة البكالوريا النجاح و التفوق، و ما وفقت فيه فمن الله سبحانه و تعالى، و ما أخطئت فيه فمن نفسي و من الشيطان، و إنه لمن دواعي سروري أن أستقبل منكم كافة الاقتراحات و الآراء البناءة أو بعض الأخطاء التي يمكن أن تنبع من قلة التركيز أثناء الكتابة.

<https://www.facebook.com/adel.naidji.7>

عادل نعيجي

اهداء

نهدي هذا العمل المتواضع إلى:

- الوالدين الكريمين أطال الله في عمرهما و الاخوة الأعزاء

- الأسرة القريبة و البعيدة

- إلى كل من علمني حرفا من الأساتذة الكرام

- إلى كل الزملاء و الأساتذة و العمال ب ثانويتي الثانوية الوطنية للرياضيات بالقبة و كلية الطب بالجزائر العاصمة

- إلى كل الأصدقاء من العالم الحقيقي و الافتراضي الفيسبوك

- إلى كل طالب علم يعمل بتفان للرفي بالجزائر الحبيبة

الفهرس

مراجعة عامة 1

كثيرات الحدود 8

المعادلات 10

دراسة اشارة عبارة 21

المتراجحات 23

عموميات على الدوال 27

النهايات 45

السلوك التقاربي لمنحن دالة 55

الاستمرارية 60

مبرهنة القيم المتوسطة 63

الاشتقاقية 66

الدوال الأسية 79

الدوال اللوغاريتمية 85

أسئلة نظرية حول الدوال الأسية و اللوغاريتمية 93

الدوال الأصلية 98

المعادلات التفاضلية 102

الحساب التكاملي 105

تطبيقات التكامل 114

استنتاج منحنيات انطلاقا من منحنيات أخرى 120

تمارين حول الدوال العددية 126

تمارين حول الدوال الأسية 130

تمارين حول الدوال اللوغاريتمية 145

مراجعة عامة

مراجعة عامة

مثال:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \times \frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}$$

$$-1 = 1 ???$$

2/ الجداول الشهية:



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a-b)(a+b)^2 = a^2 - b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

استنتاجات:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$(-a+b)^2 = (b-a)^2$$

1/ خواص القوة الصريحة:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

أساس n مرة

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a,b) \in \mathbb{R}^{+*} \\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \times a^{-n} = 1$$

$$(+a)^n = +a^n$$

$$(-a)^n \begin{cases} \rightarrow +a^n & ; n=2k \\ \rightarrow -a^n & ; n=2k+1 \end{cases} \quad (a \geq 0)$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$0^n = 0$$

$$1^n = 1$$

لا يوجد 0^0

تعميم:

* الاستلزام: إذا كان ... فإن ...
($\Rightarrow$) (اتجاه واحد)

* التكافؤ: ... ينافي ...
... إذا وفقط إذا ...

$$\sqrt{A(x) \cdot B(x)} = \sqrt{A(x)} \cdot \sqrt{B(x)} \quad (*)$$

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \iff \begin{matrix} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{matrix}$$

ليس دوماً.

$$\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} = \frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}} \quad (+)$$

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \iff \begin{matrix} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \end{matrix}$$

$$\sqrt{A(x)^2} = |A(x)| \quad (*)$$

3/ الجذور التربيعية:

* لا يمكن كتابة $\sqrt{A}$ إلا إذا كان

$$(a, b) \in \mathbb{R}_+^2; \quad A \geq 0$$

$$* \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$* \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$* (\sqrt{a^n}) = (\sqrt{a})^n$$

$$* \sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b$$

$$* \sqrt{a^2} = a$$

$$* \sqrt{(a+b)^2} = (a+b)$$

$$* \sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$* \sqrt[3]{a} = a^{1/3}$$

$$* \sqrt{0} = 0$$

$$* \sqrt{1} = 1$$

أخطاء شائعة

$$* \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$* \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$$

4/ اتوحيد المقامات :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \neq \frac{a}{b+c}$$

5/ الاختزال والمساواة :

① الاختزال الأفقي :

$$A(x) + d = B(x) + d$$

$$A(x) \times d = B(x) \times d ; d \neq 0$$

② الاختزال العمودي :

$$\frac{A(x) \times d}{B(x) \times d} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

$$\frac{A(x) + d}{B(x) + d} \neq \frac{A(x)}{B(x)}$$

③ اختزال متغير :

← العمودي :

$$\frac{A(x) \times h(x)}{B(x) \times h(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

③

14 الكسور :

① ضرب الكسور :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$d \times \frac{a}{b} = \frac{da}{b} = \frac{d}{b} \times a$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

② قسمة الكسور :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{b}} = a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

يجب التمييز بين الكسور الفرعية والكسور الرئيسية.

③ الضرب والقسمة في و على عدد غير

معلوم d

$$\frac{a}{b} = \frac{da}{db}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div d}{b \div d}$$

6/ الاختزال والمحتمل اجابات:

1/ الاختزال الأفقي:

$$+ A(x) + \alpha > B(x) + \alpha$$

$$+ A(x) \times \alpha > B(x) \times \alpha$$

$$\rightarrow \alpha > 0 : A(x) > B(x)$$

$$\rightarrow \alpha < 0 : A(x) < B(x)$$

2/ اختزال متغير:

$$+ A(x) \times R(x) < B(x) \times R(x)$$

$$+ R(x) [A(x) - B(x)] < 0$$

* ثم ننشئ جدول الاشارة ونحل المتراجحة.

* سنتغل هذه الطريقة دوما.

← الأفقي:

$$+ A(x) \times R(x) = B(x) \times R(x)$$

* نتأكد هل $R(x) = 0$ لها حل

+ ليس لها حل ← نكتب

$$A(x) = B(x)$$

* لها حل ← نجعل المعادلة

صفرية ثم نحلها

$$R(x) [A(x) - B(x)] = 0$$

أمثلة:

$$* x^2 (x^2 + 3) = 4 (x^2 + 3)$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2$$

$$* x^2 (x + 3) = 4 (x + 3)$$

$$(x + 3) (x^2 - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$$

$$* x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$(x/x)(x+x) = x(x/x)$$

$$x + x = x$$

$$2x = 1x$$

$$1 = 2 \quad ???$$

7/ قواعد الحساب في IR:

1/ اضافة عدد حقيقي:

$$+ a = b \Leftrightarrow a + d = b + d$$

$$+ a > b \Leftrightarrow a + d > b + d$$

2/ الضرب في عدد حقيقي لا، $d \neq 0$

$$+ a = b \Leftrightarrow d a = d b$$

$$+ a > b \Leftrightarrow d a > d b ; d > 0$$

$$d a < d b ; d < 0$$

3/ الجمع طرفا لطرف:

$$+ \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a + b = c + d$$

$$+ \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

$$+ \begin{cases} a < b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

(< أولى من ≤)

14/ الضرب طرفا لطرف:

$$+ \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a c = b d$$

$$+ \begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a c > b d$$

ا، ب، c، d موجبة

$$+ \begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a c < b d$$

ا، ب، c، d سالبة.

5/ ضرب الطرفين والوسطين:

$$+ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a d = b c$$

تعميم:

$$+ \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Leftrightarrow A(x) \cdot \beta(x) = \alpha(x) \cdot B(x)$$

$B(x) \neq 0$
 $\beta(x) \neq 0$

حذرا:

$$+ \frac{A(x)}{B(x)} < \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \not\Leftrightarrow A(x) \cdot \beta(x) < \alpha(x) \cdot B(x)$$

بل نجعل المتراجحة صفرية.

- نوحيد المقامات

- ننشرو ونبسط.

- نحل المتراجحة باستعمال جدول
الاشارة.

6/ خاصية التعدي:

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

$$\begin{cases} a < b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a < c$$

(< أولى من ≤)

7/ قواعد المساواة:

$$A(x) = B(x) \text{ إذا كان}$$

$$A(x)^2 = B(x)^2 \text{ فإن}$$

+ العكس لا يصلح دائما للأعداد الموجبة

$$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow a = b$$

8/ قواعد الترتيب:

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \text{ موجبان}$$

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b \text{ موجبان}$$

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow a > b \text{ سالبان}$$

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ من نفس الإشارة}$$

$$a^3 > b^3 \Leftrightarrow a > b$$

9/ متى نقلب إشارة متراجحة؟

4 حالات

* تربيع عددين سالبين

* الضرب في عدد سالب

* المقلوب

* ضرب متراجحتين طرفي الطرفين

حيث a, b, c, d سالبة

8/ القيمة المطلقة:

1/ التذكير حول الحالات:

* أكبر من / أو تساوي $\Rightarrow$ مجال مغلق

* أصغر من / أو تساوي $\Rightarrow$ مجال مفتوح

* عند $-$ و $+$ $\Rightarrow$ مجال مفتوح

* الاتحاد $= \cup$

* التقاطع $= \cap$

* استعن بالمحور العددي

(6)

* يمكن التخلص من القيمة المطلقة بالتربيع. $(|A|^2 = A^2)$

$$|x+2| = |x-3|$$

$$(x+2)^2 = (x-3)^2$$

$$(x+2)^2 - (x-3)^2 = 0$$

$$(x+2 - x+3)(x+2 + x-3) = 0$$

$$(5)(2x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

* التخلص من رمز القيمة المطلقة
- ننشئ جدول الإشارة
- نطبق الخاصية

$$|A(x)| =$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ A(x) \quad -A(x) \\ , A(x) \geq 0 \quad , A(x) \leq 0 \end{array}$$

مثال: $f(x) = |-2x+3|$

اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
إشارة $-2x+3$	+	○	-
عبارة $f(x)$	$= A(x)$ $= -2x+3$	○ $= -A(x)$ $= 2x-3$	

$$f(x) = -2x+3: x \in]-\infty, \frac{3}{2}]$$

$$f(x) = 2x-3: x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$$

2/ القيمة المطلقة:

$$* |A(x)| = \begin{cases} +A(x), & A(x) \geq 0 \\ -A(x), & A(x) \leq 0 \end{cases}$$

⑤ خواص:

$$* |a \times b| = |a| \times |b|$$

$$* \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$* |-a| = |a|$$

$$* |a-b| = |b-a|$$

$$* |A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$$

$$* |a+b| \neq |a| + |b|$$

$$* \sqrt{A(x)^2} = |A(x)|$$

* متراجحات بالقيمة المطلقة

$$\alpha \geq 0; \quad |A(x)| < \alpha$$

$$-\alpha < A(x) < +\alpha$$

$$\alpha \geq 0; \quad |A(x)| > \alpha$$

$$\begin{cases} A(x) > \alpha \\ A(x) < -\alpha \end{cases} \quad \text{أو} \quad f(u)$$

⑦

كثيرات الحدود

كثيرات الحدود

1/ مفهوم كثير حدود:

بعد الاختزال والتبسيط، نجد الدالة:

← معرفة على $\mathbb{R}$

← من الشكل

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ تمثل معاملات

كثير الحدود $p(x)$

* $-2x^3 + 3x - 5; \mathbb{R} \checkmark$

* $-6x^2 + 7x + 2; \mathbb{R}^* \times$

* $\frac{-x^2 + 1}{x + 1}; \mathbb{R} - \{-1\} \times$

* $\frac{5x^3 + 10x}{x^2 + 2} \checkmark$

2/ درجة كثير الحدود:

هي أعلى أس.

* $p(x) = 2 \rightarrow$ الدرجة 0

* $p(x) = -3x + 1 \rightarrow$ الدرجة 1

* $p(x) = 5x^{100} + x^2 + 1 \rightarrow$ الدرجة 100

اوجد a, b, c, d حتى يكون

$$p(x) = g(x)$$

حيث:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 - x + d$$

$$g(x) = 2x^3 + cx + 3$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 3 \end{cases}$$

3/ تساوي كثيري حدود:

المعاملات متساوية

4/ كثير الحدود المزدوم (دوما):

جميع المعاملات معدومة

اوجد m, n, l حتى يكون
 $p(x) = 0$ دوماً من أجل
 أي قيمة لـ x : $p(x) = (-3m+n)x^2 + (m+2n+l)x + 1+3m = 0$

$$\begin{cases} -3m+n=0 \Rightarrow n=3m \\ m+2n+l=0 \Rightarrow l=-7m \\ 1+3m=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

5/ عمليات على كثيرات الحدود:

* مجموع كثيري حدود هو كثير حدود
 درجته أعلى درجة

* جداد كثيري حدود هو كثير حدود
 درجته $n+m$

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^2 + 2x + 3 \\ g(x) &= 3x^{40} + 5 + 6x^2 \\ p(x) + g(x) &= 3x^{40} + 8x^2 + 2x + 8 \end{aligned}$$

الدرجة 40

$$\begin{aligned} p(x) \cdot g(x) &= (2x^2 + 2x + 3) \cdot (3x^{40} + 5 + 6x^2) \\ &= 6x^{42} + 10x^2 + 12x^4 + 6x^{41} + 10x + 15 + 18x^{43} + 12x^{40} + 18x^2 \end{aligned}$$

الدرجة 42

6/ جذر كثير حدود: (هنا جذر حل جذر $\sqrt{\quad}$)

$$p(\alpha) = 0$$

ويمكن كتابة $p(x)$ كما يلي:

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$$

كثير حدود أقل من $p(x)$ بدرجة

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 14x + 16$$

تأكد أن 2 جذر $p(x)$

نحسب $p(2)$:

$$p(2) = 2(2)^3 - 2^2 - 14(2) + 16 = 16 - 4 - 28 + 16 = 0$$

اذن 2 جذر $p(x)$

$$p(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

كثير حدود من الدرجة 2.

المعادلات

المعادلات

* يمكن تحليل العبارة كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$\Delta = 0$: للمعادلة حل مضاعف

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

والعبارة تتحلل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

$\Delta < 0$:

* ليس للمعادلة حلول
* لا يمكن تحليل العبارة.

مثال:

$$5x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(5) = 16 > 0$$

للمعادلة حلان:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 4}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 4}{10} = -1$$

(10)

ملاحظة مهمة:

* قبل حل أي معادلة أو متراجعة،

يجب تعيين مجموعة تعريفها

$$\begin{array}{l} \sqrt{A(x)} ; A(x) \geq 0 \\ \frac{1}{A(x)} ; A(x) \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{تقاطع} \\ \text{مجموعة شروط} \\ (D) \end{array}$$

$$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$$

$$\frac{\text{عدد}}{0} \text{ لا يمكن}$$

1/ المعادلات من الدرجة 1

$$ax + b = 0 ; a \neq 0$$

للمعادلة حل وحيد $x = -\frac{b}{a}$

مثال:

$$-2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

2/ المعادلات من الدرجة 2

$$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$: للمعادلة حلان متمايزان

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

* حالات خاصة:

$$ax^2 + bx = 0 \quad : \underline{c=0}$$

$$x(ax+b)=0$$

للمعادلة حلان دوما:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

* مجموع وجداء x_1 و x_2 :

إذا قبلت معادلة من الدرجة ٢ حلين فإن:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

الاستعمال

التأكد من صحة الحل
ايجاد الحل الثاني
بمعلومية الأول

$$ax^2 + c = 0 \quad : \underline{b=0}$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 = d$$

$d < 0$: لا يوجد حلول

$d = 0$: حل مضاعف $x=0$

$d > 0$: حلين متمايزان

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{d} \\ x_2 = -\sqrt{d} \end{cases}$$

* تعيين إشارة الحلين دون حسابهما:

إذا قبلت معادلة من الدرجة ٢ حلين، يمكن معرفة إشارتهما دون حسابهما.

P

$P > 0$
حلين من نفس الإشارة

$P < 0$
حل سالب
حل موجب

S

$S < 0$

* الحلين سالبين

$S > 0$

* الحلين موجبين

أمثلة:

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$-x^2 + 5x = 0$$

$$x(-x+5)=0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$



* تعيين عددين علم مجموعهما
وجد اوعهما:

$$\begin{cases} S = a + b \\ P = a \times b \end{cases}$$



a و b هما حلا المعادلة:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال:

اوجد العددين a و b اللذان يحققان:

$$a + b = -2$$

$$ab = -3$$

a و b هما حلا المعادلة:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$b = 1$$

$$a = -3$$

أو

* معرفة هل المعادلة
 $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلا
دون حساب Δ

← إذا كان $a \cdot c < 0$: فإن للمعادلة
حتمًا حلول و Δ حتمًا موجب

← إذا كان $a \cdot c > 0$: لا يمكن
الحكم مسبقًا.

* الحل الظاهر:

في بعض الأحيان يمكن حل المعادلة
 $ax^2 + bx + c = 0$ دون حساب Δ و
ذلك كما يلي:

$$\leftarrow \underline{a + b + c = 0} \text{ (مجموع المعاملات)}$$

* فإن 1 حل ظاهر
* والحل الآخر هو $\frac{c}{a}$

$$\leftarrow \underline{a - b + c = 0}$$

* (-1) حل ظاهر
* والحل الآخر هو $-\frac{c}{a}$

3 / المعادلات من الدرجة 3

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$$

① طريقة التحليل صري

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) = 0$$

$$(2x - 3)(x^2 + 2) = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ x^2 + 2 = 0 \Rightarrow S = \phi = \{ \} \end{cases}$$

للمعادلة حل وحيد هو $x = \frac{3}{2}$

N.B. لا يوجد $\{ \phi \}$

② طريقة الحل الظاهر:

1. لحل المعادلة، يجب أن نعلم

أحد حلولها الظاهرة $x = \alpha$

(يعطى في التصرين أو
بلا مرط) (نجرب 1 ثم -1 ثم 2)

2. تحليل العبارة على الشكل التالي:

$$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

ثم نعين a, b, c باحدى الطرق

الثلاث:

← القيمة الاقليدية

← المصابقة

← خوارزمية هورنر

3. حل المعادلة.

مثال:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16 = 0$$

1/ الحل الظاهر:

تأكد أن 2 حل ظاهر.

نعوض ب 2

$$2(2)^3 - 2^2 - 14(2) + 16$$

$$= 16 - 4 - 28 + 16$$

$$= 0$$

اذن 2 حل للمعادلة.

(13)

2/ تحليل العبارة:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16$$

$$= (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

a/ القيمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 14x + 16 & x - 2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} & 2x^2 + 3x \\ & -8 \\ & \underline{3x^2 - 14x + 16} \\ & -3x^2 - 6x \\ & -8x + 16 \\ & \underline{-8x + 16} \\ & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 2)(2x^2 + 3x - 8)$$

b/ المطابقة:

$$(x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

اذن:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16$$

=

$$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

$$\begin{cases} a = 2 & \text{--- (1)} \\ b - 2a = -1 & \text{--- (3)} \\ c - 2b = -14 & \text{--- (4)} \\ -2c = 16 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 73 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{73}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{73}}{4}$$

اذن: للمعادلة المعطاة 3 حلول هي

$$\left\{ 2; \frac{-3 + \sqrt{73}}{4}; \frac{-3 - \sqrt{73}}{4} \right\}$$

4/ المعادلات من الدرجة ٤

① طريقة التحليل مرتين:

② طريقة الحل الظاهر:

③ طريقة تحويل المتغير:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$$

$$* \text{ نضع } y = x^2 - 3x$$

* نحل المعادلة ذات المجهول y

* نكتب نتج قيم x .

المعادلة تصبح:

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = 36$$

$$\text{من ①: } a = 2$$

$$\text{من ②: } c = -8$$

$$\text{من ③: } b = 2a - 1 = 3$$

نتأكد في ④:

$$c - 2b = -8 - 2(3) = -14$$

محققة

اذن:

$$p(x) = (x - 2)(2x^2 + 3x - 8)$$

١٤/ خوارزمية هورنر:

معاملات $p(x)$	2	-1	-14	16
اقل الظاهر (2)	+	4	6	-16
المعاملات a, b, c	2	3	-8	0
	a	b	c	

اذن:

$$p(x) = (x - 2)(2x^2 + 3x - 8)$$

13/ حل المعادلة:

$$2x^3 - x^2 - 14x + 16 = 0$$

معناه:

$$(x - 2)(2x^2 + 3x - 8) = 0$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2x^2 + 3x - 8 = 0 \end{cases}$$

(14)

نضع $y = x^2$ ، المعادلة تصبح

$$y^2 - 5y + 4 = 0 ; y \geq 0$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

حالة $y = 1$: $y = x^2$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

حالة $y = 4$: $y = x^2$

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

للمعادلة المعطاة 4 حلول:

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$

⑤ المعادلات التناظرية:

من الشكل:

$$\frac{a}{1}x^4 + \frac{b}{1}x^3 + \frac{c}{1}x^2 + \frac{b}{1}x + \frac{a}{1} = 0$$

$a \neq 0$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$$

• نقيم على الحد الأوسط (x^2)

$$3x^2 - 7x + 8 - 7\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad (x \neq 0)$$

• حالة $y = -2$:

$$y = x^2 - 3x$$

$$-2 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

• حالة $y = 4$:

$$y = x^2 - 3x$$

$$4 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

اذن للمعادلة المعطاة 4 حلول هي:

$$S = \{-1; 1; 2; 4\}$$

④ المعادلات مضاعفة الترتيب:

من الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$; $a \neq 0$

• نضع $y = x^2$

• نبحث عن قيم y

• نستنتج قيم x

مثال: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

15/ معادلات أخرى:

$$A(x) \cdot B(x) = 0$$

$$\begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases} \text{ أو } \text{معناه:}$$

مثال:

$$(2x+1)(x^2+3x-4)=0$$

$$\begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \text{ أو}$$

$$S = \left\{ -4; -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

← نعين D (ب $B(x) \neq 0$)

← نحل المعادلة $A(x) = 0$

← نتحقق هل الحلول تنتمي لـ D

مثال:

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1} = 0$$

$$D = \mathbb{R} - \{1\}, x \neq 1; x-1 \neq 0$$

+ المعادلة المعطاة تكافئ:

$$x^2+3x-4=0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \text{مرفوض} \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$S = \{-4\} \text{ إذن المعادلة حل وحيد}$$

* نضع الحدود التي لها نفس المعاملات جنباً إلى جنب

$$3x^2 + 3\left(\frac{1}{x^2}\right) - 7x - 7\left(\frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

* نظهر المتغير الجديد:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

المعادلة تصبح

$$3\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$$3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

+ نضع $y = x + \frac{1}{x}$ ثم نحل المعادلة

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad 3y^2 - 7y + 2 = 0$$

$$y = \frac{1}{3} \text{ لـ}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Delta < 0$$

لا يوجد حل

للمعادلة المعطاة حل مضاعف $x = 1$

$$y = 2 \text{ لـ}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

حل مضاعف 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$D =]-\infty, -2] \cup [2; +\infty[$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = x + 1$$

$$x^2 - 4 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 4 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x + 1 + 4 = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} \in D$$

$$S = \left\{-\frac{5}{2}\right\} \text{ اذن للمعادلة حل وحيد}$$

$$\underline{|A| = -|B|, |A| = |B|, |A(x)| = |B(x)|}$$

$$(A - B)(A + B) = 0 \Leftrightarrow A^2 = B^2$$

مثال:

$$2|x - 1| = 3|2x + 4|$$

$$|x - 1| = \frac{3}{2}|2x + 4|$$

$$|x - 1| = \left|\frac{3}{2} \times 2x + 4 \times \frac{3}{2}\right|$$

$$|x - 1| = |3x + 6|$$

$$(x - 1)^2 = (3x + 6)^2$$

$$(x - 1 - 3x - 6)(x - 1 + 3x + 6) = 0$$

$$(-2x - 7)(4x + 5) = 0$$

$$\begin{cases} -2x - 7 = 0 \\ 4x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{-\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}\right\}$$

(17)

$$\underline{\sqrt{A(x)} = 0}$$

$$A(x) \geq 0 \text{ نعيند}$$

$$A(x) = 0 \text{ نحل المعادلة}$$

$$\text{ننتحقق هل الحلول من}$$

مثال:

$$D = [1; +\infty[\quad \sqrt{x - 1} = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ المعادلة تكافئ}$$

$$x = 1 \in D$$

$$\text{اذن للمعادلة حل وحيد}$$

$$S = \{1\}$$

$$\underline{|A(x)| = 0 / A(x)^n = 0}$$

$$A(x) = 0 \text{ نحل المعادلة}$$

مثال:

$$|x^2 + 3x - 4| = 0 \quad (2x + 1)^3 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\sqrt{A(x)} = B(x)}$$

$$\text{نعيند } D$$

$$A(x) = B(x)^2 \text{ نحل المعادلة}$$

$$\text{نتأكد هل الحلول من}$$

مثال:

$$\sqrt{x^2 - 4} - x - 1 = 0$$

... $|A| + B = C \quad |A| + |B| = C$ *

يجب أن نتخلص من رمز القيمة المطلقة بالاستعانة بجدول الإشارة.

مثال ①:

$$|x+3| + |x-5| = 6$$

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$ x+3 $	$-x-3$	0	$x+3$	$x+3$
$ x-5 $	$-x+5$	$-x+5$	0	$x-5$
$ x+3 + x-5 $	$-2x-2$	8	8	$2x-2$

$|x+3| + |x-5| = 6$ تكافئ:

$-2x-2=6 \quad x \in]-\infty; -3]$

$x = -2$

مرفوض لأن $-2 \notin]-\infty; -3]$

$8=6 \quad x \in]-3; 5[$

مستحيل.

$2x-2=6 \quad x \in]5; +\infty[$

$x = 4$

مرفوض لأن $4 \notin]5; +\infty[$

$8=6 \quad x = -3 \text{ أو } x = 5$

مستحيل.

اذن المعادلة المعطاة ليس لها حلول

$S = \{ \}$

(18)

$A(x)^n = B(x)$ *

مثال: $x^3 = 8$

$x^3 - 8 = 0$

$x^3 - 2^3 = 0$

$(x-2)(x^2+4+2x) = 0$

$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+2x+4=0 \quad \Delta < 0 \end{cases}$

للمعادلة حل وحيد $S = \{2\}$

$\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$ *

$\sqrt{4x+7} = 2 + \sqrt{2x}$

$2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[= I$

$4x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{7}{4}; +\infty[= J$

$D = I \cap J = [0; +\infty[$

المعادلة تصبح:

$\sqrt{4x+7} - \sqrt{2x} = 2$

$(\sqrt{4x+7} - \sqrt{2x})^2 = 4$

$4x+7 + 2x - 2\sqrt{2x(4x+7)} = 4$

$6x+3 = 2\sqrt{2x(4x+7)}$

$(6x+3)^2 = 4[2x(4x+7)]$

$36x^2 + 9 + 36x = 32x^2 + 56x$

$4x^2 - 20x + 9 = 0$

$S = \{\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\} \in D$

استنتاج الحلول:

m	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$\Delta = 9m^2 - 24m$	+		-	-
عدد الحلول	حلان		حل	حلان
مميزان	$x = \frac{-m \pm \sqrt{9m^2 - 24m}}{4m}$	ϕ	$x = -\frac{1}{4}$	$x = \frac{-m \pm \sqrt{9m^2 - 24m}}{4m}$

إشارة الحلان:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{3-m}{2m}$$

$$G = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{2m} = -\frac{1}{2}$$

ندرس إشارة P و S:

m	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	3	$+\infty$
الحلول	حلان	ϕ	حلان		حلان
P	-		+		-
إشارة الحلان	مختلفان	ϕ	سالبان	$x = 0$ $x = -\frac{1}{2}$	مختلفان

(19)

المعادلات الوسيطة:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة التالية.

$$\underbrace{2m}_a x^2 + \underbrace{m}_b x + \underbrace{3-m}_c = 0$$

① $(m=0) a=0$

المعادلة تصبح $3=0$ (مستحيل)

$$S = \{ \}$$

② $(m \neq 0) a \neq 0$

المعادلة $2mx^2 + mx + 3-m = 0$ من الدرجة 2 :

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2m)(3-m)$$

$$\Delta = 9m^2 - 24m$$

دراسة إشارة Δ :

$$\Delta' = (24)^2 - 4(9)(0) = 24^2 > 0$$

للمعادلة حلان :

$$m=0$$

$$m = \frac{8}{3}$$

$m=0$ مرفوض (لأننا فرضنا أن $m \neq 0$)

m	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$
$\Delta = 9m^2 - 24m$	+		-

تذكير حول أساليب البرهان '6'

* الاستلزام

* التكافؤ

* الخلف: نفرض أن الخاصية

خاصة ثم نبسط حتى نصل

إلى تناقض، منه فرضيتنا

خاصة $\Rightarrow$ الخاصية صحيحة

* العكس النقيض للاستلزام:

$$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

* التراجع .

* فصل الحالات .

* حل البرعادلات التالية:

$$x^4 + 4|x^2 - 1| + 3|x + 2| + 1 = 0$$

$$x^4 + 4|x^2 - 1| + 3|x + 2| = -1$$

(+)

(-)

$$S = \emptyset \Leftarrow \text{مستحيل}$$

$$x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$x \in [0, +\infty[; x \geq 0$$

$$\text{نضع } y = \sqrt{x} ; y \geq 0$$

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ y = 6 \end{array} \right. \text{ مرفوض } y = -1$$

$$y = 6$$

$$\sqrt{x} = 6 \text{ أي } y = 6$$

$$x = 6^2 \text{ أي } x = 36$$

$$\boxed{x = 36}$$

$$x|x| = -3$$

ن فصل الحالات:

$$x \geq 0 : x^2 = -3 \text{ مستحيل}$$

$$x \leq 0 : -x^2 = -3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{array} \right. \text{ مرفوض } \rightarrow$$

$$S = \{-\sqrt{3}\}$$

دراسة اشارة عبارة

دراسة اشارة عبارة

* اشارة $ax+b$ $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	نفس اشارة a	عكس اشارة a	نفس اشارة a

* اشارة ax^2+bx+c $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$: حلان x_1 و x_2 $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a	عكس اشارة a	نفس اشارة a	نفس اشارة a

$\Delta = 0$: حل مضاعف x_1

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a	نفس اشارة a	نفس اشارة a

$\Delta < 0$: $S = \emptyset$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس اشارة a	نفس اشارة a

* اشارة $A(x) \cdot B(x)$

ننجز جدول الاشارة.

مثال: $\theta(x) = (2x+1)(x^2+4x-5)$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x+1$	-	-	0	+	+
x^2+4x-5	+	0	-	-	+
$\theta(x)$	-	0	+	0	+

* اشارة $\frac{A(x)}{B(x)}$

ننجز جدول الاشارة مع $B(x) \neq 0$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x+1$	-	-	0	+	+
x^2+4x-5	+	0	-	-	+
$\theta(x)$	-	+	0	-	+

$$\theta(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x-5}$$

* اشارة $A(x)^n$

$A(x)^n \geq 0$ دوماً $n = 2k$

اشارة $A(x)^n$ من اشارة $A(x)$ $n = 2k+1$

مثال: $\theta(x) = (x^2+4x-5)^{15}$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$\theta(x)$	+	0	-	+

(21)

* اشارة عبارة بدلالة اشارة عبارة اخرى

مثال: $f(x) = \frac{g(x) \times (x^2+3)}{x^4+5x^2}$

* اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$

مثال: $f(x) = \frac{g(x) + x^2 + 3}{x^4 + 5x^2}$

* اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x) + x^2 + 3$.
لا يمكن القول ان اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$.

← لا يصح تجاهل مقدار عند دراسة اشارة عبارة بالاضافة الى

- * مصنوب في (+)
- * مقسوم على (+)

اشارة عبارة ← الاشارة

← نقول بقيمة في مجال

لكن $(x^2+4x-5)^{10}$ درما موجب

* اشارة $\frac{1}{A(x)}$:

نفسها اشارة $A(x)$ مع $A(x) \neq 0$

مثال: $\theta(x) = \frac{1}{x^2+4x-5}$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
$\theta(x)$	+		-		+

↑ اقيمة ممنوعة.

* اشارة $S = C + B + A$

← A, B, C سالبة درما: $S \leq 0$

← A, B, C موجبة درما: $S \geq 0$

← A, B, C من اشارات مختلفة

، نحلل المجموع الى جداء

ننجز جدول الاشارة.

* ملاحظة:

$|a| / \sqrt{a} / a^{n=2k} / a^2$
أو مجموعها

موجب درما.

مثال: حل المتراجحة

$3x^{2008} + 11x^{1962} + 1964 > 0$
(+) (+) (+)

محقة درما

اذ $S = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

المتراجحات

حل متراجحات

$<$ $>$ $>$ $\leq$
 مجال مفتوح مجال مغلق

* نعين D مجموعة التعريف
 . نحل المتراجحة ونكتب الحل على شكل مجال I

حل المتراجحة هو $S = I \cap D$

← لحل متراجحة:

- ← نجعلها صفرية
- ← نحل العبارة
- ← ننجز جدول الأشارة
- ← نستنتج الحلول

$$: ax + b > 0$$

$$-2x + 4 > 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x + 4$	$+$	0	$-$

$$S =]-\infty, 2[$$

$$: ax^2 + bx + c > 0$$

$$x^2 + 4x - 5 \leq 0$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$x^2 + 4x - 5$	$+$	0	$-$	$+$

$$S = [-5, 1]$$

(23)

$$: x^2 + 4x - 5 > 0$$

$$S =]-\infty, -5[\cup]1, +\infty[$$

$$A(x) \cdot B(x) > 0$$

$$(2x + 1)(x^2 + 4x - 5) \geq 0$$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\theta(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$S = [-5; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$$

$$: \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$$

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 4x - 5} \leq 0$$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\theta(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$+$

$$S =]-\infty, -5[\cup [-\frac{1}{2}; 1[$$

$$A(x)^n > 0$$

$$* (x^2 + 4x - 5)^{10} < 0 \text{ ليس لها حل}$$

$$* (x^2 + 4x - 5)^{10} \geq 0 \text{ محققة دوما}$$

$$* (x^2 + 4x - 5)^{10} \leq 0 \text{ تنكافئ}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$S = \{-5; 1\}$$

$$S = \mathbb{R} - \{-5; 1\} \text{ } (x^2 + 4x - 5)^{10} > 0$$

$$|2x-3| < 5$$

مثال:

$$-5 < 2x-3 < 5$$

$$-5+3 < 2x < 5+3$$

$$-2 < 2x < 8$$

$$-1 < x < 4$$

$$S =]-1; 4[$$

$$|A(x)| > \alpha$$

$\alpha < 0$: محفظة دوما

$$S = \mathbb{R} \text{ معنا } |A(x)| \geq 0 : \alpha = 0$$

$$|A(x)| > 0$$

$$S = \mathbb{R} - \{ \text{القيمة التي تعدم} \}$$

$$\begin{cases} A(x) > \alpha \\ A(x) \leq -\alpha \end{cases} \text{ و } f(u) : \alpha > 0$$

$$|2x-3| > 5$$

مثال:

$$\begin{cases} 2x-3 > 5 \\ 2x-3 < -5 \end{cases} \text{ و } f$$

$$\begin{cases} 2x-8 > 0 \\ 2x+2 > 0 \end{cases} \text{ و } f$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases} \text{ و } f$$

$$S = [4; +\infty[\cup [-1; +\infty[$$

$$S = [-1; +\infty[$$

(24)

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$(x^2+4x-5)^{10}$		+	+	+

$$(x^2+4x-5)^{13} < 0$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$(x^2+4x-5)^{13}$		+	-	+

$$S =]-5; 1[$$

$$\frac{1}{A(x)} > \alpha$$

$$\frac{1}{(x^2+4x-5)} \geq 0$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$\frac{1}{x^2+4x-5}$		+	-	+

$$S =]-\infty; -5[\cup]1; +\infty[$$

$$|A(x)| \leq \alpha$$

$\alpha < 0$: لا يوجد حلول

$$A(x) = 0 \text{ معنا } |A(x)| \leq 0 : \alpha = 0$$

$$|A(x)| < 0 \text{ لا يوجد حلول}$$

$$-\alpha < A(x) \leq \alpha : \alpha > 0$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
x^2+3x-3	+	0	-	0	+

$$I =]x_1; x_2[$$

$$I =]\frac{-3-\sqrt{21}}{2}; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}[$$

$$S_3 =]-3; +\infty[\cap I$$

$$S_3 =]-3; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}[$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S = [-4; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}[$$

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x)$$

$$\sqrt{x-2} < 2x+6$$

$$D = [2; +\infty[\quad \text{تعيين } D$$

$$\text{اشارة } -2x+6 \text{ على } D$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$-2x+6$	///	+	0	-

$$\sqrt{x-2} < -2x+6 : x \in [2, 3[$$

$$(x-2) < (-2x+6)^2$$

$$4x^2 - x + 14 > 0$$

$$\Delta < 0 : \text{لا يوجد حل و}$$

$$4x^2 - x + 14 > 0 \text{ دوما}$$

(25)

حل متراجعات صماء:

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

* تعيين D:

$$D = [-4; +\infty[$$

اشارة $x+3$ على المجال D:

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
$x+3$	///	-	0	+

$$x \in [-4; 3[+$$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

(+)

(-)

محققة

$$S_1 = [-4; 3[$$

$$x = -3 +$$

$$\sqrt{3} > 0$$

$$S_2 = \{-3\}$$

محققة

$$x \in]-3; +\infty[+$$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

(+)

(+)

$$3x+12 > x^2+6x+9$$

$$x^2+3x-3 < 0$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \approx -3,79$$

$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \approx 0,79...$$

$$S_1 = [2, 3[$$

$$: \underline{x = 3}$$

$$1 < 0$$

مستحيل

$$S_2 = \emptyset$$

$$: x \in]3; +\infty[$$

$$\sqrt{x-2} < -2x+6$$

(+)

(-)

مستحيل

$$S_3 = \emptyset$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S = [2, 3[$$

عمومیات علی الدوال

الدوال العديدة

٢ / مجموعة تعريف دالة:

$$\frac{1}{A} ; A \neq 0$$

$$\sqrt{A} ; A \geq 0$$

تقاطع
عدة
شروط

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} ; B(x) \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt{B(x)} ; B(x) \geq 0$$

$$f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}} ; B(x) \geq 0$$

$$f(x) = \sqrt{|A(x)|} ; \text{لا يوجد شرط}$$

$$f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{|B(x)|}} ; B(x) \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} ; \begin{cases} A(x) \cdot B(x) \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{A(x) \cdot B(x)} ; A(x) \cdot B(x) \geq 0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

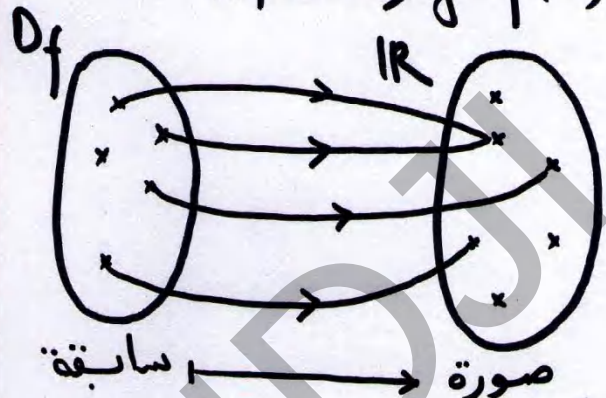
أمثلة:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x+1 & f(x) &= \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \\ f(x) &= \frac{3x+6}{x-1} & f(x) &= \sqrt{|-8x+2|} \\ f(x) &= \sqrt{6x+9} & f(x) &= \sqrt{(x+1)(x-3)} \end{aligned}$$

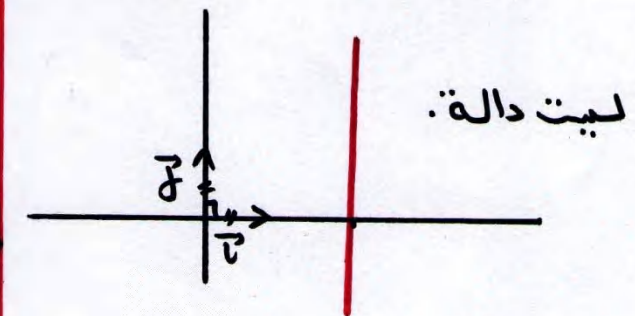
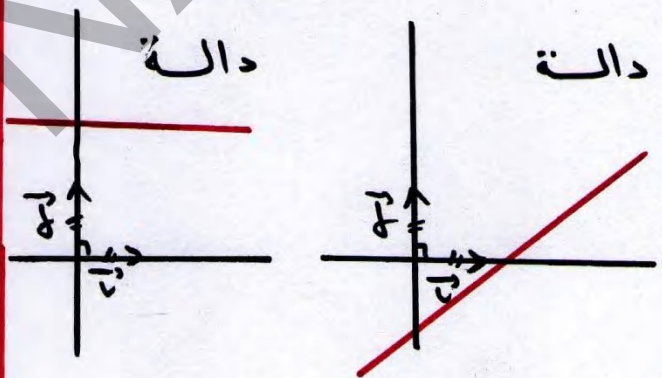
٨ / مفهوم دالة

$$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$



لكل x من D_f : صورة وحيدة.
كل عدد y يمكن أن يكون له سابقة،
اشتاناء، أو لا شيء.



كل دالة f معرفة ب:
مجموعة تعريفها D_f
دستور الدالة: $f(x) = \dots$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \text{مرفوض} \\ x=-5 \end{cases}$$

$$f(-5)=0 \quad \text{اذن}$$

4/ تساوي الدالتين:

$$\begin{cases} D_f = D_g \text{ معناه } f=g \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

أمثلة:

$$f(x)=x+2; D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{(x+2)^2}; D_g=\mathbb{R}, g(x)=|x+2|$$

$$f(x) \neq g(x) \quad \text{لأن } f \neq g$$

$$f=g \quad \text{على المجال } [-2, +\infty[$$

$$f(x)=x+2; D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}; D_g=]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$g(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$$

$$f \neq g \quad \text{على المجال } \mathbb{R}$$

$$f=g \quad \text{على المجال }]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$f(x)=\frac{x^3+8}{x^2+4x-5}$$

$$f(x)=\frac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x-5}}$$

$$f(x)=\frac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x-5}}$$

$$f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+2-\sqrt{x+3}}$$

3/ حساب صورة أو سوابق عدد:

حساب صورة عدد a:

$$a \in D_f \quad \text{تأكد أن}$$

$$f(a) \quad \text{نحسب}$$

$$f(a)=b$$

$$\text{مثال: } f(x)=2x+1; D_f=\mathbb{R}$$

$$f(0)=1$$

حساب سوابق عدد b:

$$f(x)=b \quad \text{نحل المعادلة}$$

$$\text{نحتفظ بالحلول التي تنتمي}$$

$$D_f$$

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x-1}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

مثال:

جد سوابق العدد 0.

① تسمى دالة كثير حدود

②، ③، ④ تسمى دوال ناطقة

كثير حدود

كثير حدود

الدالة $f(x) = \sqrt{x+1} - 5x^2 + 2$
تسمى دالة صماء (جزئية)

الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 5x - \sqrt{x}}{2x+1}$ تسمى
دالة كسرية.

15 عمليات على الدوال:

محذر مجموعة التعريف:

$$\begin{aligned} & * (f+k)(x) = f(x) + k; D_f \\ & * (f+g)(x) = f(x) + g(x); D_f \cap D_g \\ & * (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x); D_f \\ & * (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x); D_f \cap D_g \\ & * \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; D_f \cap D_g \cap \{g(x) \neq 0\} \\ & * (g \circ f)(x) = g[f(x)] \text{ تركيب دوال } (x \in D_f) \cap (f(x) \in D_g) \end{aligned}$$

مثال: $D_f = [0, +\infty[$, $f(x) = 2x^2 - 1$

$D_g = [-1, +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x+1}$

* عين الدوال التالية:

$f \cdot g, -2g, 2f \cdot 3g, f+g, f+1$
 $g \circ f, f \circ g, \frac{g}{f}$

* هل يمكن القول أني $f \circ g = g \circ f$ ؟

(29)

الاستعمال: ايجاد شكل آخر مبسط لدالة f .

$$f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$$

* مثال:

اثبت أنه من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = g(x)$$

$$g(x) = x + \frac{5}{x-1} - \frac{4}{x+1}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$D_f = D_g$$

بين الآن أن: $f(x) = g(x)$

← ننتقل من $f(x)$ إلى $g(x)$

← ننتقل من $g(x)$ إلى $f(x)$

← بين أن $f(x) - g(x) = 0$

شكل مهمة لدوال معروفة:

$$①. ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$②. \frac{ax+b}{cx+d} = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

$$③. \frac{ax^2+bx+c}{dx+e} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx+e}$$

$$④. \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+kx+l} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x + \delta}{ex^2+kx+l}$$

* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ نعين بالقيمة التقليدية
والمطابقة

6/ اتجاه تغير الدالة:

- ← نختار الشكل المناسب للدالة
- ← نعين مجالات الدراسة (قد تعطى)
- ← نختار الطريقة المناسبة.

4/ باستعمال قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

x_1, x_2 عدنان حقيقيان من مجال I
($I \in D_f$) من أجل كل x_1 و x_2 :

* f متزايدة تماما على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

* f متناقصة تماما على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

* f متزايدة على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

+ f متناقصة على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

+ f ثابتة على I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ دوماً.}$$

: N.B

f رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما)

f رتيبة (متزايدة أو متناقصة)

مثال:

* f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x^2 - 4x + 1$
* g معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $g(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

ادرس اتجاه تغير f و g ، ثم شكل جبرولي تغيراتهما.

الدالة f :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = -(x+2)^2 + 5$$

على المجال $]-\infty, -2]$ | على المجال $[-2, +\infty[$

بنفس الطريقة

نجد:

f متناقصة علما

على $[-2, +\infty[$

$$(x_1+2) < (x_2+2) \leq 0$$

$$(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2$$

$$-(x_1+2)^2 < -(x_2+2)^2$$

$$-(x_1+2)^2 + 1 < -(x_2+2)^2 + 1$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f متزايدة تماما

على $]-\infty, -2]$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	?	$f(-2) = 5$	?

* يمكن القول أن 5 قيمة حدية عرضي

لـ (f) تبدلها من أجل $x = -2$

$x = -2$: (A) محور تناظر لـ (f)

تمثل نهايات الدالة f : ? / ?

مثال:

• لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
 $f(x) = x^3$

• تحقق انه من أجل كل x_1, x_2 من $\mathbb{R}$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}$$

• استنتج اتجاه تغير الدالة مكعب.

الحل:

• باستعمال المتطابقة الشهيرة لتبسيط $a^3 - b^3$
 تبين العبارة

• $A > 0$ دوماً إذن الدالة مكعب متزايدة
 تماماً على $\mathbb{R}$.

ج/ قواعد عامة:

• اتجاه تغير $f + k$ نفسه اتجاه
 تغير الدالة f .

• اتجاه تغير $f \cdot k$

← $k > 0$: نفس اتجاه تغير f

← $k < 0$: عكس اتجاه تغير f .

• f و g متزايدتان معناه الدالة
 $f + g$ متزايدة.

• f و g متناقصتان معناه الدالة
 $f + g$ متناقصة.

• $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $f - g$, لا يمكن الحكم

الدالة g :

$$g(x) = \frac{3x-5}{x-2}; D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

باستعمال القيمة الاقليدية أو المطابقة

$$g(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

• على المجال $]2, +\infty[$ • على المجال $] -\infty, 2[$

$$x_1 < x_2 < 2$$

$$x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$$

$$\frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2}$$

$$\frac{1}{x_1 - 2} + 3 > \frac{1}{x_2 - 2} + 3$$

$$g(x_1) > g(x_2)$$

متناقصة تماماً على $] -\infty, 2[$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	?	?	?

• النقطة $(2; 3)$ مركز تناظر (ق)

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

من أجل كل x_1, x_2 من I :

• $A > 0 \Leftrightarrow f$ متزايدة تماماً على I

• $A < 0 \Leftrightarrow f$ متناقصة تماماً على I

• $A = 0$ من أجل كل x من $I \Leftrightarrow f$ ثابتة على I

(31)

● اتجاه تغير $f \circ g$

* g رتيبة تماما على المجال $I = [a, b]$

* f رتيبة تماما على المجال $g(I)$

g متزايدة تماما $\Rightarrow g(I) = [g(a); g(b)]$

g متناقصة تماما $\Rightarrow g(I) = [g(b); g(a)]$

* اتجاه تغير $f \circ g$

$\leftarrow f$ و g لهما نفس اتجاه التغير:

$f \circ g$ متزايدة تماما

$\leftarrow f$ و g مختلفان في اتجاه التغير:

$f \circ g$ متناقصة تماما.

أمثلة:

① ادرس اتجاه تغير الدالة f :

$$f(x) = -\frac{3}{x} + 2$$

② ادرس اتجاه تغير $f+g$:

$$f(x) = 3x+1 ; g(x) = +2x+3$$

③ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة

$$\text{على } [1,5; +\infty[\text{ بـ } g(x) = (-2x+3)^2$$

④ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة

$$\text{على }]-\infty, 3] \text{ بـ } g(x) = \sqrt{-x+3}$$

الحل:

$$\textcircled{1} f(x) = -\frac{3}{x} + 2 \quad D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\frac{1}{x} \text{ متناقصة تماما}$$

$$kif \quad kif$$

$$-\frac{3}{x} \text{ متزايدة تماما}$$

$$-\frac{3}{x} + 2 \text{ متزايدة تماما}$$

$$f \text{ متزايدة تماما} \quad f \text{ متزايدة تماما}$$

②

$$* f(x) = 3x+1$$

$$3 > 0 : \text{اذن } f \text{ متزايدة تماما}$$

$$* g(x) = 2x+3$$

$$2 > 0 \text{ اذن } g \text{ متزايدة تماما}$$

$$\text{منه } f+g \text{ دالة متزايدة تماما على } \mathbb{R}$$

$$g(x) = (-2x+3)^2$$

③:

$$D_g = [1,5; +\infty[$$

$$g = u \circ v \quad \begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = -2x+3 \end{cases}$$

$$* v \text{ متناقصة تماما على } [1,5; +\infty[$$

* اتجاه تغير u على المجال

$$v\left(\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]\right) = \left]v(+\infty); v\left(\frac{3}{2}\right)\right] =]-\infty, 0]$$

$$\text{على المجال }]-\infty, 0] : u \text{ متناقصة تماما}$$

$$* \text{اذن } g \text{ متزايدة تماما على } [1,5; +\infty[$$

32

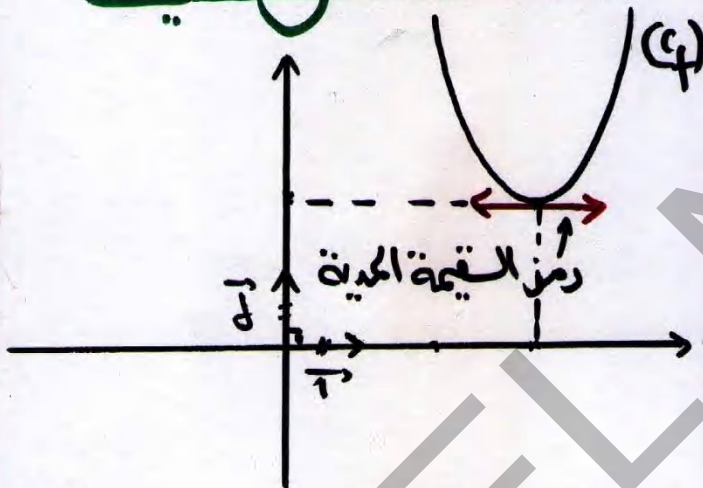
١٤ / ملاحظة جدول التغيرات

$$f(x) = x^2 + 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		2	

f تقلب قيمة حدية صغرى هي 2 تبلغها من أجل $x=0$

ب / باستعمال التمثيل البياني:



f تقلب قيمة حدية صغرى 2 تبلغها من أجل $x=3$

ج / باستعمال قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

وذلك بعد اختيار الشكل المناسب لـ f .

مثال: أثبت أن $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ تقلب قيمة حدية يطلب تعيينها.

$$f(x) = -x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = -(x+2)^2 + 5$$

$$g(x) = \sqrt{-x+3}; D_g =]-\infty, 3]$$

$$g = u \circ v \quad \begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = -x+3 \end{cases}$$

• v متناقصة تماما على $] -\infty; 3]$

• اتجاه تغير u على المجال

$$v(]-\infty, 3]) = [v(3); v(-\infty)] = [0; +\infty[$$

على المجال $[0; +\infty[$: u متزايدة تماما

• اذن g متناقصة تماما على $] -\infty; 3]$

د / بدراسة إشارة الدالة المشتقة:

(Voir Apres)

N.B: قبل دراسة اتجاه التغير، ندرس
7 / القيم الحدية لدالة:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

• إذا كان من أجل كل x من I :

$$f(x) \leq f(a)$$

قيمة حدية عظمى $f(a) = \dots$

تبلغها من أجل $x=a$

• إذا كان من أجل كل x من I :

$$f(x) \geq f(a)$$

قيمة حدية صغرى $f(a) = \dots$

تبلغها من أجل $x=a$

(33)

أمثلة:

- ① $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$
- ② $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$
- ③ $f(x) = |x| + 2$; $D_f = \mathbb{R}$
- ④ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
- ⑤ $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$; $D_f = [-2; 2]$
- ⑥ $f(x) = x^2$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

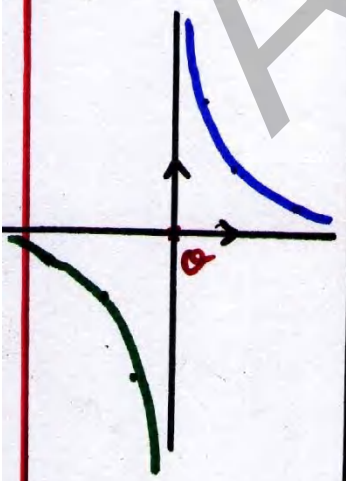
طبيعة الأسئلة:

- * ادرس شفعية f
- * بين ان f زوجية / فردية
- * بين ان $f(-x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ ← فردية.
- * بين ان $f(-x) - f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ ← زوجية

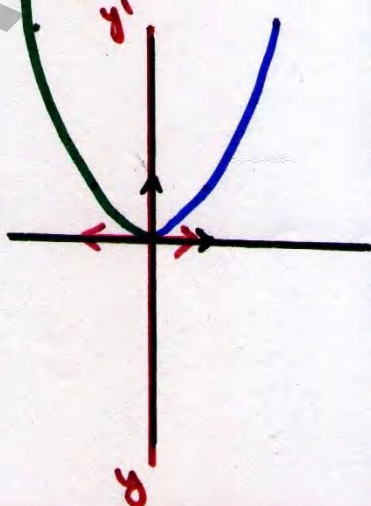
الحل

- | | |
|---------------|---------|
| ④ زوجية | ① زوجية |
| ⑤ زوجية | ② فردية |
| ⑥ / (لا توجد) | ③ زوجية |

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = x^2$$



من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+2)^2 \geq 0$$

$$-(x+2)^2 \leq 0$$

$$-(x+2)^2 + 5 \leq 5$$

$$f(x) \leq 5$$

اذ f تقبل قيمة حدية عظمى كتبلغها
من أجل $x = -2$

د/ باستعمال الدالة المشتقة

8/ دراسة شفعية دالة:

* f دالة معرفة على D_f

① D_f متناظر بالنسبة إلى الصفر
(لكل $x \in D_f$ ، يوجد $-x \in D_f$)

② نحسب $f(-x)$

$=$	
$-f(x)$	$f(x)$
* دالة فردية	* دالة زوجية
* (C_f) متناظر بالنسبة للمحور التوازي	* (C_f) متناظر بالنسبة لمحور التوازي
* نقط تمرير على المجال $[0, +\infty[$	* نقط تمرير على المجال $[0, +\infty[$
* ثمرناظر	* ثمرناظر

(34)

9 / الدالة الدورية:

* دالة معرفة على D_f

* لا ثبات إذا الدالة f دورية ودورها T يكفي اثبات أن:

← من أجل كل x من D_f فإن $x+T$ ينتمي إلى D_f

$$f(x+T) = f(x) \leftarrow$$

* T يسمى دور الدالة f : أصغر عدد موجب يحقق الشروط السابقة.

* الاستعمال: نقدر دراسة الدالة f

على مجال طول T ثم نشق (C_f)

وذلك بالقيام بانحناءات اشعثها $(\frac{0}{T})$ بينا وشمالا.

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$f(x) = \cos x$$

* اثبت أن f دالة دورية دورها 2π

* ادرس اتجاه تغير f على المجال $[-\pi; \pi]$

$[-\pi; \pi]$

* انشئ (C_f) مع التوضيح.

الحل

اثبات أن f دالة دورية:

$D_f = \mathbb{R}$, من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $x+2\pi$ ينتمي إلى D_f

$$* f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi)$$

$$= \cos x$$

$$= f(x)$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

اذ f دالة دورية دورها 2π .

يمكن دراسة f على مجال طول 2π

ولكن $[-\pi; \pi]$

دراسة تنغية f :

* D_f متناظر بالنسبة لـ 0

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

f دالة زوجية.

اذ يمكن اقتصار المجال $[-\pi, \pi]$

بالمجال $[0, \pi]$

دراسة اتجاه تغير f على المجال $[0, \pi]$

$$\cos x_1 > \cos x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$$

f متناقصة تماما على $[0, \pi]$

جدول تغيرات f :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$					

نتنتج من تنغية الدالة

(35)

طريقة 3 "دسايتر تغيير المعلم"

• تغيير المعلم من (x, y) إلى (X, Y)

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

• انصلا قاض عبارة $y = f(x)$

بتعويض x بقيمة y بقيمته

نجد عبارة Y بدلالة X

$$Y = g(X)$$

• نبين ان g حالة زوجية.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

اثبت ان (f) يقبل محور تناظر $x = -2$.

طريقة 1:

لكل x من D_f فان $(2a-x) \in D_f$

قبل اجراء الحسابات، نغير شكل $f(x)$

$$f(x) = (x+2)^2 - 1$$

$$f(2a-x) = f(-4-x)$$

$$= [-4-x+2]^2 - 1$$

$$= (-x-2)^2 - 1$$

$$= (x+2)^2 - 1 = f(x)$$

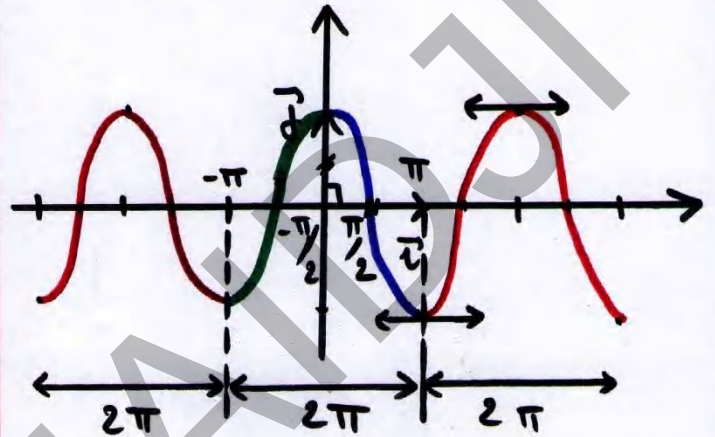
انشاء (C_f) :

• باستعمال جدول التغيرات، انشاء (C_f)

على المجال $[0, \pi]$

• نناظر بالنسبة لمحور الترتيب

• لنسحب (C_f) يمينا وشمالا بالشعاع $\sqrt{2\pi}$



10/ محور التناظر:

اثبت ان $x = a$: (f) محور تناظر

• $(C_f) \Leftarrow 3$ طرق .

طريقة 1:

• لكل x من D_f فان $(2a-x) \in D_f$

$$f(2a-x) = f(x)$$

طريقة 2:

• لكل $a-x$ من D_f فان $(a+x) \in D_f$

$$f(a-x) = f(a+x)$$

طريقة ②:

* $D_f = \mathbb{R}$ بمعنى لكل $x-2$ من D_f
فإن $-x-2$ ينتمي لـ D_f

* اثبات ان $f(-2+x) = f(-2-x)$

$$f(-2+x) = (-2+x+2)^2 - 1 = x^2 - 1$$

$$f(-2-x) = (-2-x+2)^2 - 1 = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$$

اذن $f(-2+x) = f(-2-x)$

و $y=2$: (د) محور تناظر لـ (ق).

طريقة ③:

* تغيير المعامل

$$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$$

$$y = x^2 + 4x + 3$$

$$Y = (X-2)^2 + 4(X-2) + 3$$

$$Y = X^2 + 4 - 4X + 4X - 8 + 3$$

$$Y = X^2 - 1$$

$$g(X) = X^2 - 1$$

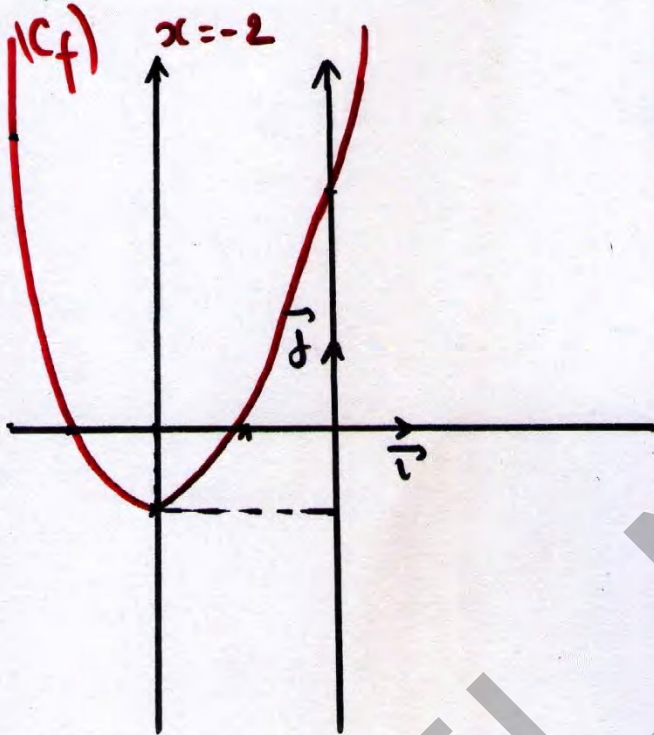
نبين ان زوجية

$D_g = \mathbb{R}$ متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-X) = (-X)^2 - 1 = X^2 - 1 = g(X)$$

g دالة زوجية

محور تناظر لـ (Cf) (د) $y=-2$ اذن $f(-2+x) = f(-2-x)$



ملاحظة:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ تحقق

$$f(4-x) = f(x)$$

29

ماذا نستنتج؟

نستنتج ان المستقيم $x=2$: (د) محور تناظر لـ (Cf)

11 / مركز تناظر:

اثبت ان النقطة $w(a, \beta)$
مركز تناظر لـ (C_f) $\Leftrightarrow 3$ طرق

طريقة ①:

لكل x من D_f فان $(2a-x) \in D_f$

$$f(2a-x) + f(x) = 2\beta$$

طريقة ②:

لكل $a-x$ من D_f فان $(a+x) \in D_f$

$$f(a-x) + f(a+x) = 2\beta$$

طريقة ③: "دساتير تغيير المعامل"

تغيير المعامل من (x, y) الى (X, Y)
كما يلي

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

انصلا قامنا عبارة $y = f(x)$ المفوض
 x و y بقيمتيهما

نجد عبارة Y بدلالة X ثرين
ان و ميث $g(X) = Y$ هي دالة
عزدية

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

اثبت ان $w(-1, 1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

طريقة ①:

لا ثبات انه مزاجل كل x من D_f
فان $-2-x$ - ينتمي لـ D_f .

نستعمل البرهان بالعكس النقيض للاستلزام

$$P \Rightarrow Q \text{ معناه } \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$

لكل P و Q ميث

$$P: -2-x \notin D_f$$

$$Q: x \notin D_f$$

P محققة، معناه $-2+x \notin D_f$

$$(-2-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \Leftrightarrow$$

$$x \notin D_f \Leftrightarrow$$

$$Q \text{ محققة} \Leftrightarrow$$

$$P \Rightarrow Q \text{ معناه } \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$

أي

$$x \in D_f \text{ يتلزم } -2-x \in D_f$$

وهذا هو المطلوب.

نثبت الآن أن:

$$f(-2-x) + f(x) = 2 \quad ??$$

$$f(-2-x) + f(x) =$$

$$= 1 + \frac{1}{-2-x+1} + 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$= 2 + \frac{1}{-x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 2$$

$$f(-2-x) + f(x) = 2$$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)

طريقة ②:

لكل x من D_f فان $-2-x$ من D_f .

نبين أن $f(-2-x) + f(-1+x) = 2$.

$$f(-1-x) + f(1+x) =$$

$$= 1 + \frac{1}{-1-x+1} + 1 + \frac{1}{-1+x+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x} = 2$$

$$f(-1-x) + f(-1+x) = 2$$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)

طريقة ③:

تغيير المعام

$$x = X - 1$$

$$y = Y + 1$$

$$y = 1 + \frac{1}{x+1}$$

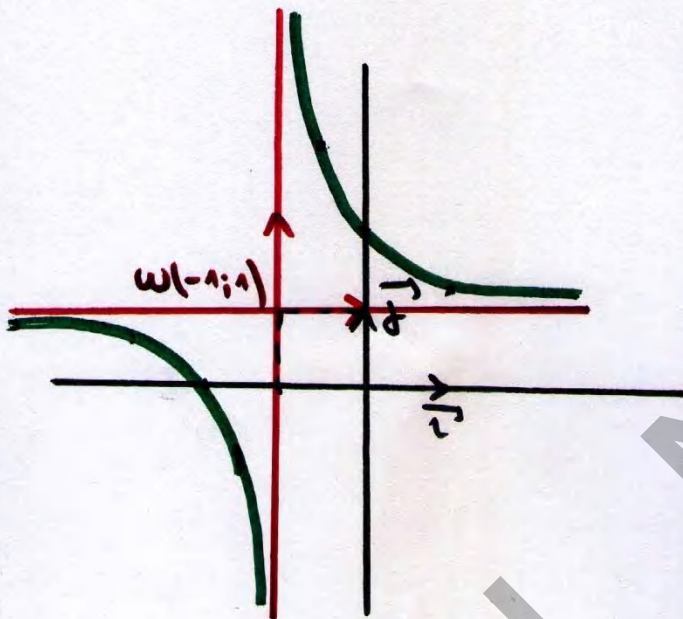
$$Y+1 = 1 + \frac{1}{X-X+X}$$

$$Y = \frac{1}{X}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

g دالة فردية

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)



ملاحظة:

$$f(\underbrace{-1-x}_{2\alpha}) + f(\underbrace{-1+x}_{2\beta}) = \underbrace{2}_{2\beta}$$

$$f(\underbrace{-2-x}_{2\alpha}) + f(\underbrace{x}_{2\beta}) = \underbrace{2}_{2\beta}$$

ماذا نستنتج؟

النقطة $\omega(-\frac{2}{2}; \frac{2}{2})$ أي $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ (f)

ج/ تقاطع (C_f) مع (C_g) :

* نحل المعادلة $f(x) = g(x)$
 * نجد قيم x الممكنة

لايجاد y نعوض في اهل العبارتين

د/ تقاطع (C_f) مع $(C_g): y = ax + b$ (د):

* نحل المعادلة $f(x) = ax + b$
 * نجد قيم x الممكنة

لايجاد y نعوض في اهل العبارتين

13/ اشارة دالة:

ط/ حسابيا:

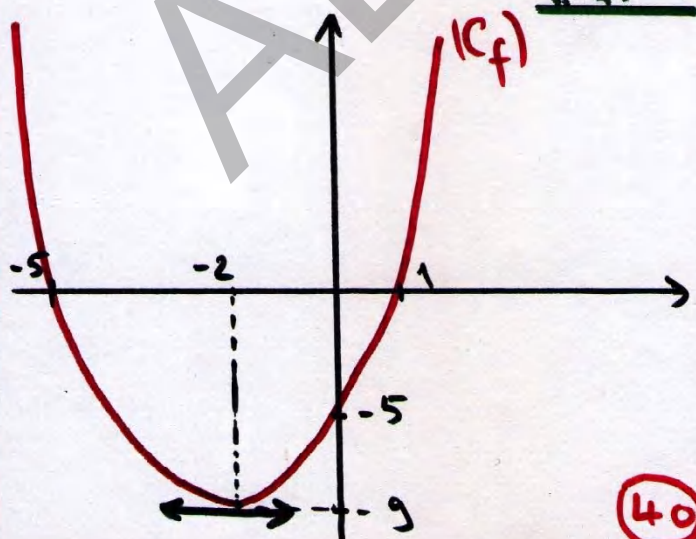
حل متراجعات $f(x) < 0 / f(x) > 0$

مثال:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

ب/ بيانيا:



(40)

12/ انقط التقاطع مع (xx) و (yy) :

أ/ تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

* نحل المعادلة $f(x) = 0$ ثم نتأكد من الحلول تنتمي إلى D_f

مثال:

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ معناه } f(x) = 0$$

(C_f) يقطع (xx) في نقطتين

$$(\sqrt{2}; 0) / (-\sqrt{2}; 0)$$

* باستعمال نظرية القيمة المتوسطة (Voir Apres)

ب/ تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب:

* نقطة واحدة على الأكثر $(0; f(0))$

مثال:

$$D_f = \mathbb{R}; f(x) = x^2 - 2$$

$$f(0) = -2$$

(C_f) يقطع (yy) في النقطة

$$(0; -2)$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (f) \text{ فوق } (xx)$$

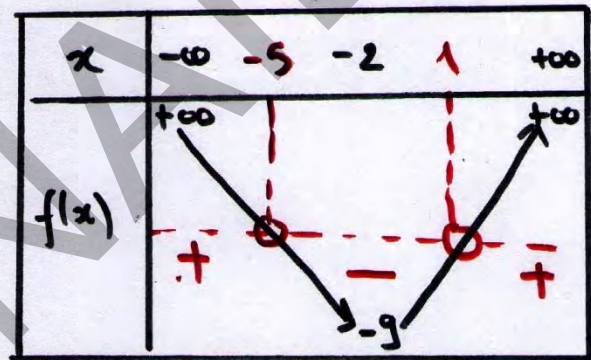
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow (f) \text{ تحت } (xx)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (f) \text{ يقطع } (xx)$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$f(x)$	+		-	+

ج اباستعمال جدول التغيرات :

جدول تغيرات f :



استنتاج جدول اشارة f

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$f(x)$	+		-	+

الدوال المراجعة

1/ الدالة مربع: $f(x) = x^2$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $]-\infty, 0]$: متناقصة قاما

$[0, +\infty[$: متزايدة قاما

← قيمة حدية معن: 0 تبلغها f مزايل $x = 0$

← شفعية الدالة: زوجية:

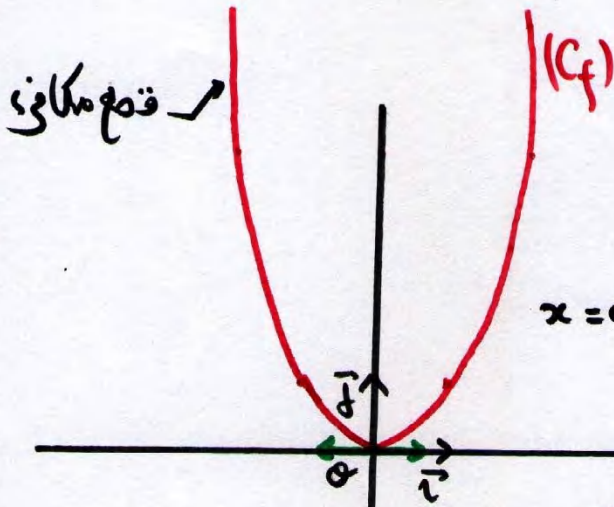
← محور التناظر: محور الترتيب

← إشارة الدالة: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$

← التقاطع مع المحاور: $(0,0)$, (x,x) , (C_f) تتقاطع في المبدأ 0

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



2/ الدالة مقلوب: $f(x) = \frac{1}{x}$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}^*$

← اتجاه التغير: $]-\infty, 0[$: متناقصة قاما

$]0, +\infty[$: متناقصة قاما

← شفعية الدالة: فردية

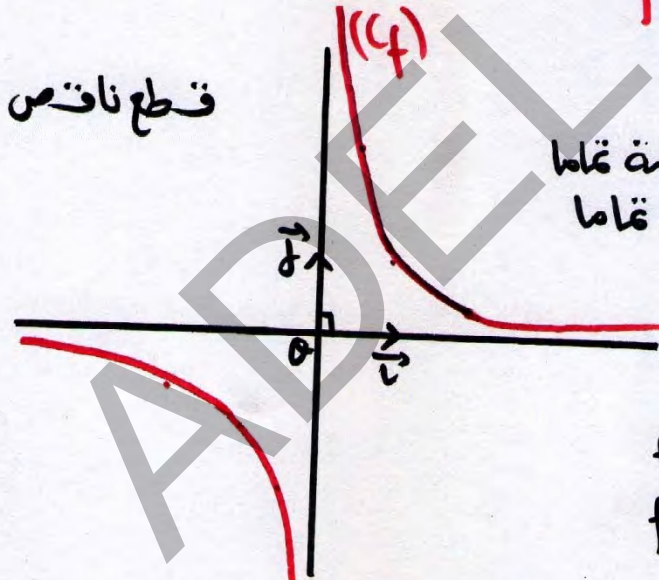
← مركز التناظر: المبدأ $O(0,0)$

← إشارة الدالة: $x < 0 : f(x) < 0$

$x > 0 : f(x) > 0$

← جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	0



3/ الدالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$

← مجموعة التعريف: $D_f = [0, +\infty[$

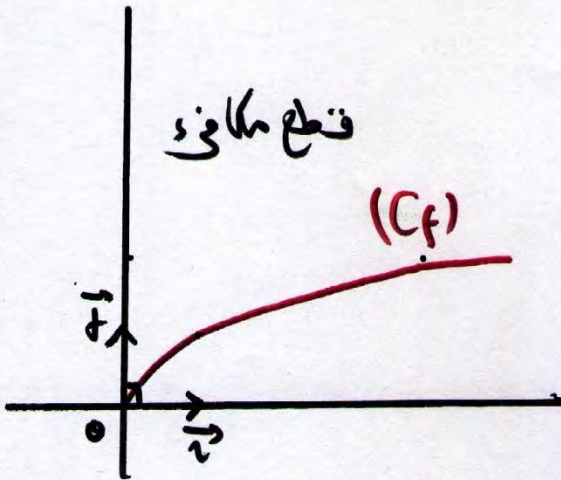
← اتجاه التغير: متزايدة تمامًا

← إشارة الدالة: $\forall x \geq 0 : f(x) \geq 0$

← التقاطع مع المحاور: $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,2)$
تقاطع في 0 .

← جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$



4/ الدالة قيمة مطلقة: $f(x) = |x|$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $]-\infty, 0]$: متناقصة تمامًا
 $[0, +\infty[$: متزايدة تمامًا.

← شفعية الدالة: زوجية

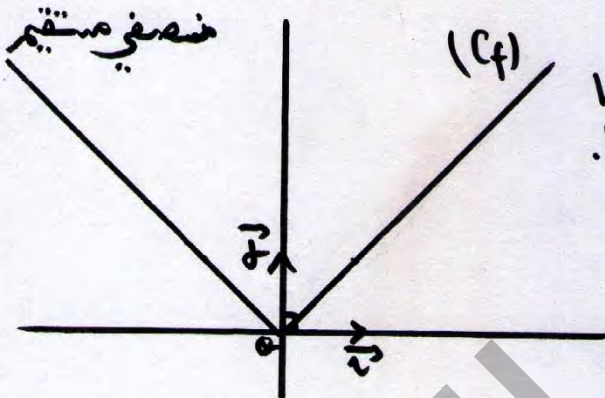
← محور التناظر: محور الترتيب

← إشارة الدالة: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$

← التقاطع مع المحاور: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ تقاطع في 0 .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

← جدول التغيرات:



5/ الدالة مكعب $f(x) = x^3$

← مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R}$

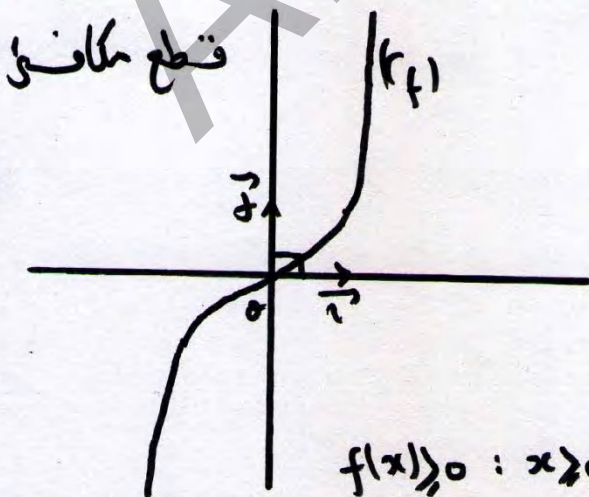
← اتجاه التغير: متزايدة تمامًا.

← نقطة انعطاف: المكعب $(0,0)$

← شفعية الدالة: فردية

← مركز التناظر: المكعب $(0,0)$

← إشارة الدالة: $x < 0 : f(x) < 0$ / $x \geq 0 : f(x) \geq 0$



→ التقاطع مع المحاور : (C_f) , (xx) , (yy) تقاطع في المبدأ ٢ و ٣.

→ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

١/٦ الدالة التآلفية $f(x) = y = ax + b$

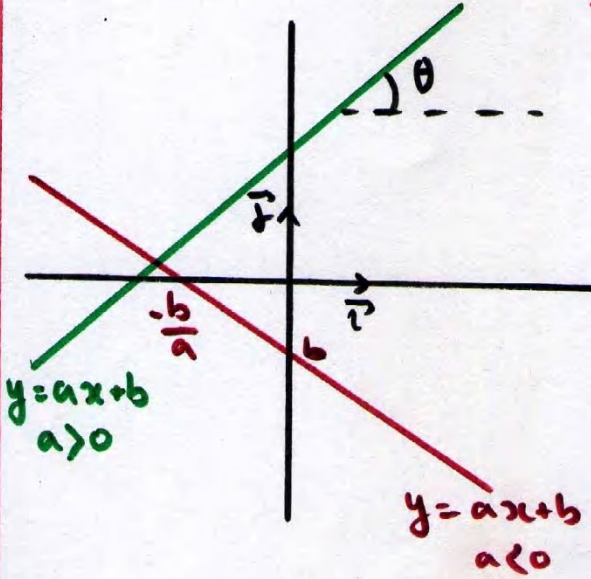
→ مجموعة التعريف $D_f = \mathbb{R}$

→ انحدار التغير: $a = \text{tg } \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

• $a > 0$: دالة متزايدة قما

• $a < 0$: دالة متناقصة قما

• $a = 0$: دالة ثابتة



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	نفس إشارة a	عكس إشارة a	نفس إشارة a

→ إشارة الدالة:

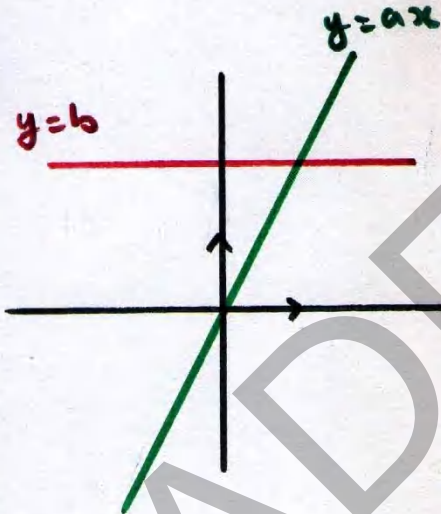
$a \neq 0$

• $a = 0$: $f(x) = b$ إما دوماً $\oplus$ دوماً $\ominus$

$$(C_f) \cap (xx) = \left\{ \left(-\frac{b}{a}; 0 \right) \right\}$$

$$(C_f) \cap (yy) = \{ (0; b) \}$$

→ التقاطع مع المحاور:



→ حالات خاصة:

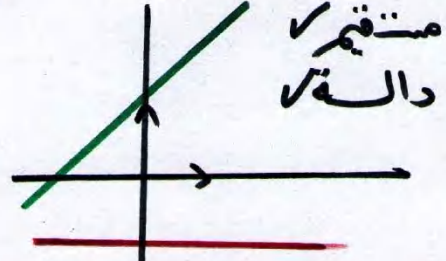
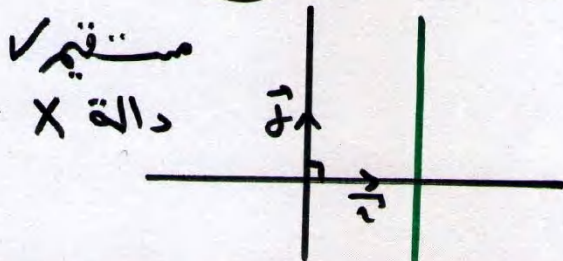
• $b = 0$: (C_f) يمر بالمبدأ ٢.

• $a = 0$: (C_f) مستقيم يوازي محور الفواصل

ملاحظة:

• كل دالة تآلفية تمثل بمستقيم لكل ليس كل مستقيم هو تمثيل بياني لدالة.

• $x = a$: (D) مستقيم يوازي محور الفواصل لا يمكن أن يمثل دالة



النهيائات

النهايات

١/ مفهوم النهاية:

* x يؤدل إلى 2 (x ينتهي عند 2) معناه x يأخذ قيم مجاورة جد العدد 2

$$\begin{cases} x = 2 + \epsilon \\ x = 2 - \epsilon \end{cases}, \epsilon \rightarrow 0^+$$

• نكتب $x \rightarrow 2$ ونميز حالتين

← $x \rightarrow 2^+$ أي $x = 2 + \epsilon$ اليمين

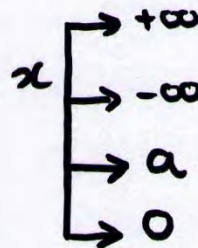
← $x \rightarrow 2^-$ أي $x = 2 - \epsilon$ اليسار

* مثال: $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$

لما $x \rightarrow 2$ فإن $f(x) \rightarrow \frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{2}$$

نكتب



٢/ عمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

f	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	a	$+\infty$
g	$+\infty$	a	$-\infty$	a	a'	$-\infty$
f+g	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$a+a'$	ح.ع.ت

نهاية جداء دالتين:

f	∞	∞	a	∞
g	∞	$a \neq 0$	a'	0
f.g	∞ (الاشارة)	∞ (الاشارة)	$a \cdot a'$	ح.ع.ت

نهاية حاصل قسمة:

f	∞	$a \neq 0$	$a \neq 0$	∞
g	$a \neq 0$	∞	$a' \neq 0$	∞
f/g	∞ (الاشارة)	0 (الاشارة)	$\frac{a}{a'}$	ح.ع.ت

f	∞	0	$a \neq 0$	0	0
g	0	∞	0	$a \neq 0$	0
f/g	∞ (الاشارة)	0 (الاشارة)	∞ (الاشارة)	0	ح.ع.ت

7 • في نهاية حامل قيمة، 0 قد يكون 0^+ أو 0^- لذا يجب تحديد اشرته أثناء الدراسة.

8 • وإذا قبلت دالة نهاية فهي

وحيدة

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

9 • في بعض الأحيان f لا تقبل نهاية:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leftarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x / \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x \leftarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^x \leftarrow$$

أمثلة:

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x + \sqrt{2}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x + \sqrt{2}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2(x+3)^2 = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3)^2 = +\infty$$

$$(+\infty)^n \rightarrow +\infty$$

$$(-\infty)^n$$

$$\sqrt{+\infty} \rightarrow +\infty$$

$$\sqrt{-\infty} \times$$

$$n=2k+1$$

$$(-\infty)$$

$$n=2k$$

$$(+\infty)$$

3/ قواعد هامة:

1 • $\lim_{x \rightarrow \frac{+\infty}{a}} (k) = k$

2 • $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

3 • $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

4 • يجب التخلص من رمز () ثم فصل الحالات

5 • $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

* a لا يمثل حدا من حدود f المفتوحة
 * f لا تتغير عبارتها عند a

6 • أثناء دراسة دالة، نحسب النهايات بصفة عامة عند حدود f المفتوحة

مثال $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

يجب حساب 4 نهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

مثال ٥:

$$f(x) = \frac{1}{-x+2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{0^+} & & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{0^-} & \end{aligned}$$

إشارة المقام (٥)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-x+2		$\begin{matrix} + & 0^+ & 0^- & - \end{matrix}$	

ملاحظة:

قيم أصغر لا تعني 0^-

قيم أكبر لا تعني 0^+

يجب وضع جدول الإشارة لمعرفة إشارة

إشارة ٥

١٤ متى نلجأ إلى دراسة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

← a يمثل حدا من حدود D_f المفتوحة
← f تغير عبارتها عند a
← في حالة وجود قيمة مطلقة وبعد التخلص منها.

* نحسب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l'$

← إذا كان $l = l'$ فإن f تقبل نهاية عند a ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

← إذا كان $l \neq l'$ فإن f لا تقبل نهاية عند a ، بل تقبل نهاية على يسار a ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l'$$

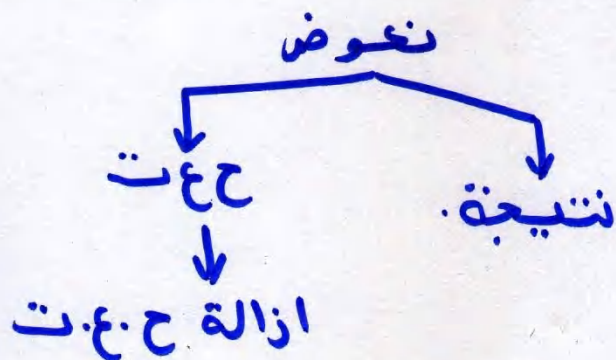
ملاحظة:

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ندرس فقط $a \in]0, +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ندرس فقط $a \in]-\infty, 0[$

5/ طرق ازالة ح.ع.ت:

4 حالات ع.ت	
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
$0 \times \infty$	$+\infty - \infty$



4/ دالة كثير حدود

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$g(x) = (2x+3)(x^2-1)$$

احسب نهايات f و g عند $2, +\infty, -\infty$

عند عدد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 21$$

عند ∞ :

نهاية دالة كثير حدود عند ∞ هي
نهاية الحد الأعلى درجة عند ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) = +\infty$$

مثال 2:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} &]-\infty, 0[\\ f(x) = 2x & [0, +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال 3:

$$f(x) = |2x+2|$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x-2 &]-\infty, -1] \\ f(x) = 2x+2 & [-1, +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{عبارة ①}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{عبارة ②}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \quad \text{عبارة ①}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \quad \text{عبارة ②}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \quad \text{عبارة ③}$$

(48)

عند ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty$$

$$\begin{array}{cc} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \\ \frac{9^{13}}{0^+} & \frac{9^{13}}{0^-} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \text{حالت } \frac{0}{0}$$

يجب اظهار (1-x) في كل من البسط والمقام بتجليلهما باحدى الطرق الثلاث ثم الاختزال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-3x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-3x-3} = \frac{-3}{5} \end{aligned}$$

ج/ دالة صماء خفية

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + 2x - 3$$

$$g(x) = \sqrt{4x^2-4} - 2x + 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{احسب}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

ب/ دالة ناطقة

$$f(x) = \frac{x^2+4x+1}{-x+2}$$

$$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3}$$

احسب نهاية f و g عند $+\infty$, $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

عند ∞ :

نهاية دالة ناطقة عند ∞ هي نهاية الحد الأعلى درجة على الحد الأعلى درجة (بعد الاختزال) عند ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \frac{3}{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)$$

$2 - 1 = 1$

$$= -\infty$$

* طريقة المرافق:

$$g(x) = \sqrt{4x^2 - 4} - 2x + 3$$

$$(x \rightarrow +\infty) \sqrt{4x^2} = 2x - 2x$$

$$2x - 2x = 0$$

← نتعمل طريقة المرافق كما يلي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 4} - (2x - 3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 4} - 2x + 3)(\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3)}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4 - (2x - 3)^2}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 13}{\sqrt{4x^2 - 4} + 2x - 3}$$

نمرنطبق طريقة التحليل والاختزال

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(12 - \frac{13}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{13}{x}}{\sqrt{4 - \frac{4}{x^2}} - \frac{3}{x} + 2}$$

$2 + 2 = 4$

$$= 3$$

(50)

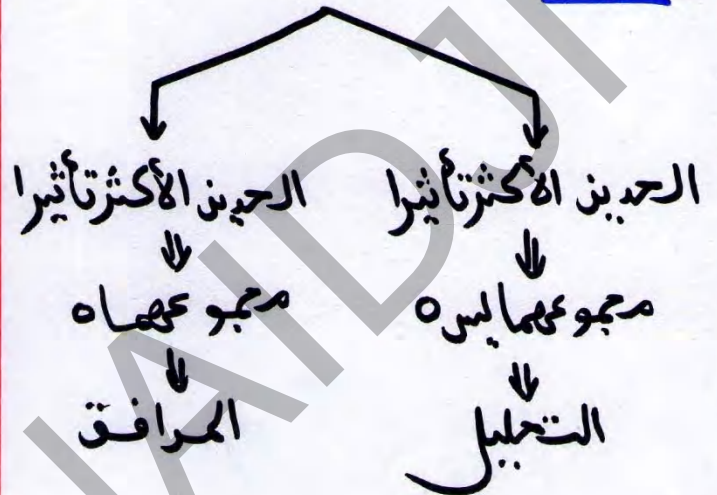
عنده :

نعوض

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{2} - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2\sqrt{3} - 1$$

عند ∞ :



* طريقة التحليل:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x - 3$$

$$(x \rightarrow -\infty) \sqrt{x^2} = |x| = -x \quad 2x$$

$$-x + 2x \neq 0$$

← نتعمل التحليل كما يلي

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + x \left(2 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x \left(2 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x \left(2 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

نختزل $x-4$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

طريقة العدد المشتق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = h'(0)$$

$$h(x) = \sqrt{x+4} \quad \text{حيث}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{0+4}} = \frac{1}{4} \quad \text{منه}$$

عند ∞ :

طريقة التحليل:

نتخرج المدايا أكثر تأثير في البسط كعامل مشترك وكذلك في المقام ثم نختزل

$$NB: x \rightarrow +\infty \quad |x| = x$$

$$x \rightarrow -\infty \quad |x| = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty}$$

$$= 0$$

دالة كسرية

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 4} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

احسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

عند ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{حالت}$$

يجب اظهار $(x-4)$ في كل من البسط والمقام ثم الاختزال

المرافقة العدد المشتق

طريقة المرافقة:

$$\sqrt{A} + B \quad \text{مرافقة}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} \quad \text{مرافقة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

مثال: احسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\frac{1}{x} > 0 \quad x > 0 \quad x \rightarrow +\infty$$

نضرب في $\frac{1}{x}$ ونحافظ على اتجاه المتراجحة

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{اذن}$$

• باستخدام العدد المشتق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{احسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = (\sin x)' / x = 0$$

$$= \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

• نهايات ثهيرة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 - \frac{2}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} - \frac{2}{x})}$$

$$= 2$$

• طريقة المرافق:
تصلح أحيانا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = 0$$

• دالة مثالية:

• مبرهنات الحصر والمقارنة:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{اذا كان}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\pi - 2t - \pi) \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -2t \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -2t \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} -2t \frac{\cos t}{-\sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cos t \cdot \frac{1}{\frac{\sin t}{t}}$$

$$= 2$$

* بالاستعمال العدد المشتق مرتين:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(\sin 3x)' - 0}{(2 \cos x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \cos 3x}{-2 \sin x}$$

$$= \frac{3 \cos 3x}{-2 \sin x} \Big|_{x = \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3 \cos \pi}{-2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{3(-1)}{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

* ملاحظة:

في النهايات، بصفة عامة باستعمال الآلة الحاسبة، يمكن تخمين النهاية

(53)

* تبديل المتغير:

* تبديل المتغير وارجاء بيؤول الى
* الضرب والقسمة في اعداد كاظهار
نهايات ثمرة.

* أمثلة:

① احسب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}}{\sqrt{2} \frac{x}{4}}$$

$$= \frac{2}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x \quad \text{احسب ②}$$

$$\left(x = t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{نضع } t = x - \frac{\pi}{2} \quad t \rightarrow 0$$

وا طريقة لوبيتال

hors programme

C'est pour verifier...

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{إذا كان}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{ح.ع.ت}$$

بتطبيق طريقة لوبيتال نجد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{g'(a)}{h'(a)}$$

* نتصلع في جميع ح.ع.ت سواء دالة
ناطقة، كسرية، مثلثية...

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x^2 + 3} = \left(\frac{2x + 1}{3x^2 - 8x} \right)_{x=1}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}} \right)_{x=0}$$

$$= \frac{1}{4}$$

السلوك التقاري

لمنحن دالة

” السلوك التقاربي لمنحن دالة “ التفسير البياني للنهائيات ”

ج/ المستقيم المقارب للمائل:

* تأكد أن $y = ax + b$ (D) : م م مائل
لـ (Cf) عند $\pm\infty$

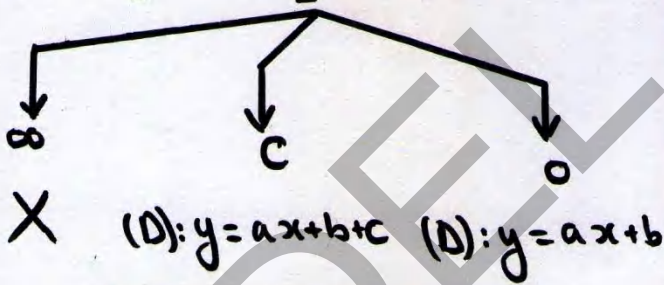
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

* يمكن للطالب ملاحظة الهرم بقوة
الملاحظة ، إذا كانت الدالة ضمن الشكل

$$f(x) = ax + b + g(x)$$

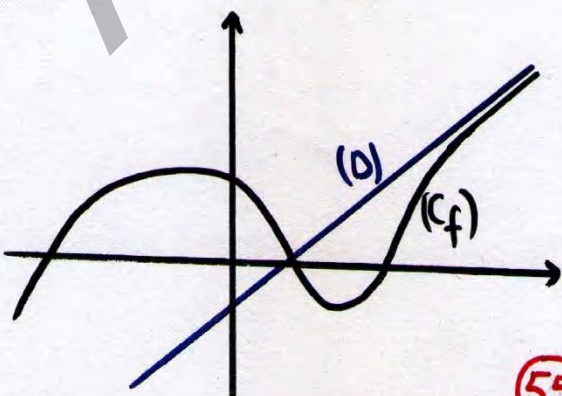
ننظر أن $y = ax + b$ (D) م م مائل
لـ (Cf) عند $\pm\infty$ نرى نتأكد من ذلك .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$$



* إذا كان $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

⇔ احتمال وجود مستقيم مائل .



(55)

١/ المستقيمات المقاربة:

- ✓ عيّن م م لـ (Cf) !
- ✓ تأكد أن (D) م م لـ (Cf) !
- ✓ احسب النهاية ثمفسر بيانيا النتيجة!

٢/ المستقيم المقارب العمودي:

* عيّن، تأكد: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$



* (Cf) يقبل م م يوازي محور الترتيب
معادلته $x = a$ وذلك عند $\pm\infty$
• غالبا هي القيمة الممنوعة .

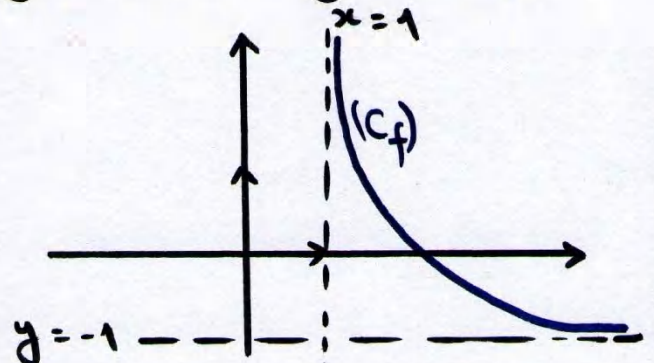
ب/ المستقيم المقارب الأفقي:

* عيّن: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

* تأكد: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a] = 0$



* (Cf) يقبل م م عند $\pm\infty$ يوازي
محور الفواصل، معادلته $y = a$

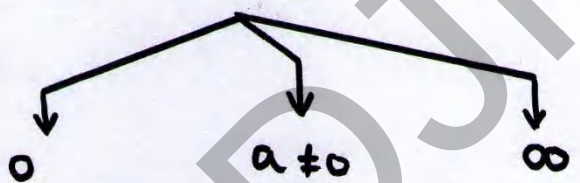


البحث عن مم م باستعمال الفروع اللانهاية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

احتمال وجود مم م

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \text{ نحسب}$$



(Cf) يقبل فرعاً لانهائياً
باتجاه $x = 0$ (D)
(محور الترتيب)
 $f(x) = x^2$

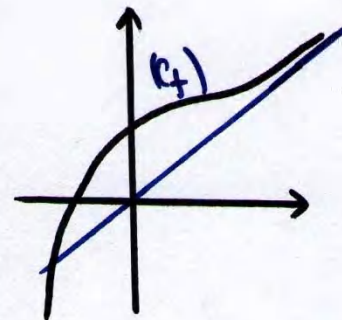
(Cf) يقبل فرعاً لانهائياً
باتجاه $y = 0$ (D)
(محور الفواصل)
 $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] \text{ نحسب}$$

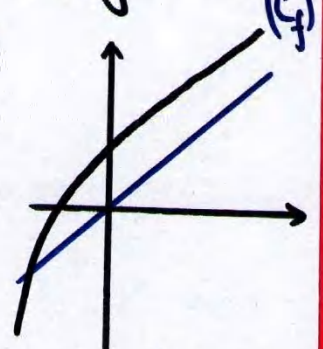


(Cf) يقبل فرعاً لانهائياً
باتجاه المستقيم
(D): $y = ax$

(Cf) يقبل مم م
(D): $y = ax + b$



مم م مماثل



فرع لانهائي

د/الوضع النبي:

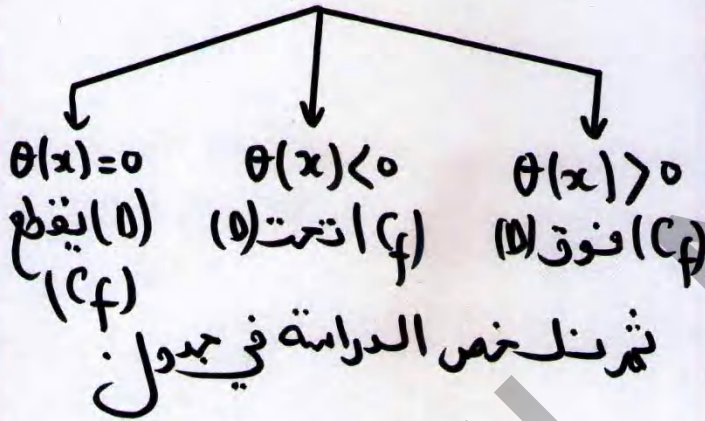
* المستقيم المقارب العمودي لا يقطع
أبداً (Cf)

* المستقيم المقارب الأفقي والمائل
يمكن أن يقطعا (Cf) ← وضع نبي

* لدراسة الوضع النبي بين (Cf) و (D)
حيث $y = ax + b$ (D)، ندرس إشارة

$$\theta(x) = f(x) - y$$

$$\theta(x) = f(x) - (ax + b)$$



هـ/أمثلة:

* احسب النهايات، فربما، ارم (Cf)
والمستقيمت المقاربة في كل حالة:

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x^2} \quad / \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 2x + 8 + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad / \quad f(x) = x^2$$

مثال ① $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ (ق) (قبيل م م)

يواري محور الفواصل عند $y = 2$ معادلته

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ (ق) (قبيل م م يواري)

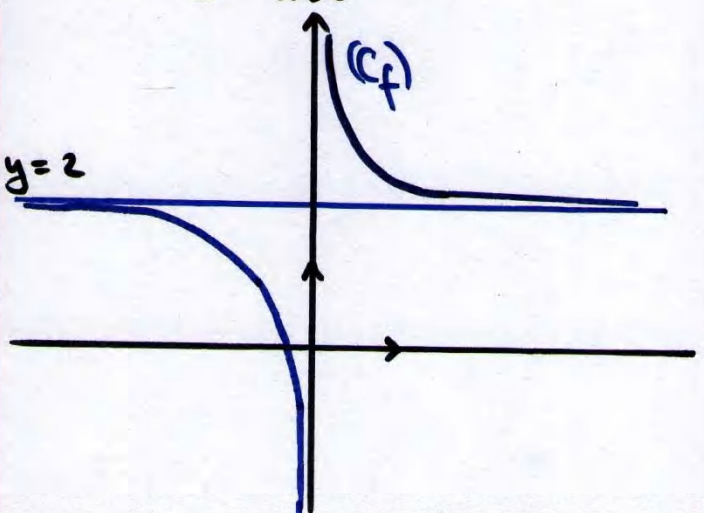
محور الفواصل عند $y = 2$ معادلته

③ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (ق) (قبيل م م)

يواري محور الفواصل عند $x = 0$ معادلته

④ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (ق) (قبيل م م)

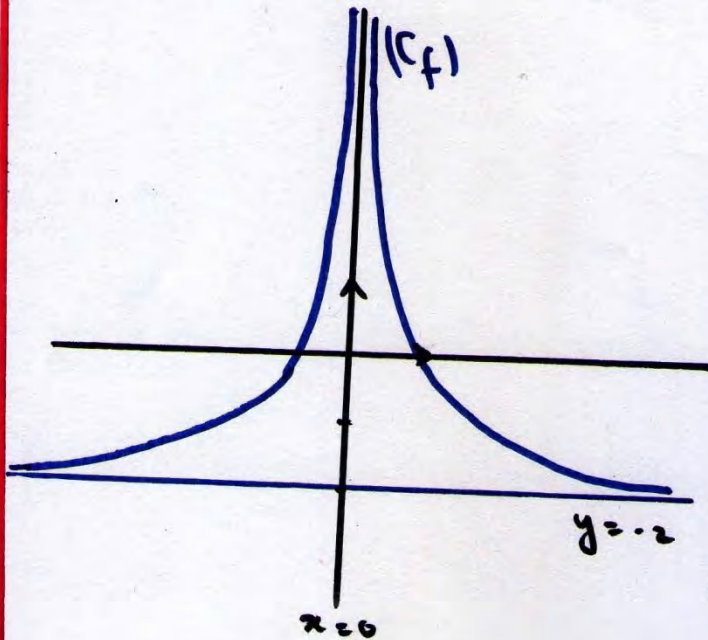
يواري محور الفواصل عند $x = 0$ معادلته (حامل محور الفواصل)



مثال ② $f(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$

المستقيمان المقاربة معادلتهما

$y = -2$ / $x = 0$



مثال ③ $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$

$x = 0$

نختار $y = ax + b$ (د) م م ل (ق)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

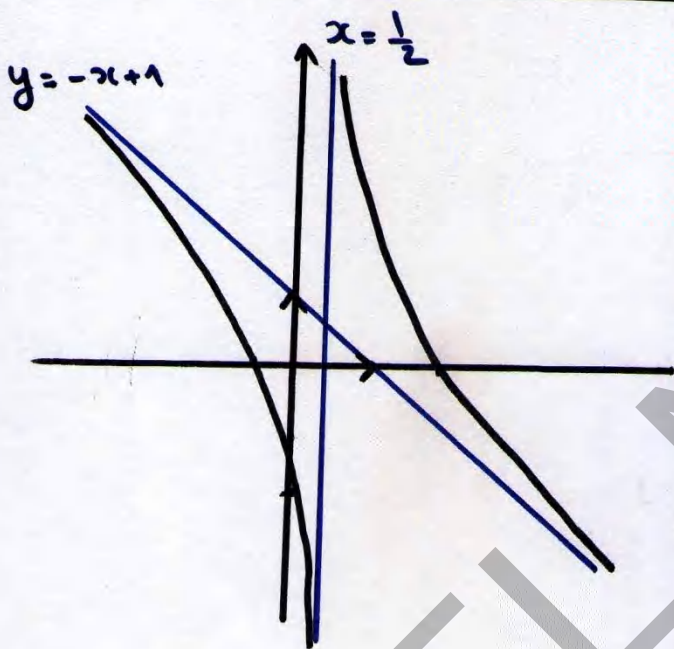
الوضع التبي: $\theta(x) = f(x) - y = \frac{1}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\theta(x)$	-		+
الوضع التبي:	(ق) (د) تحت		(ق) (د) فوق

الوضع النقيض

$$\theta(x) = f(x) - (-x+1) = \frac{3}{2x-1}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\theta(x)$	-		+
الوضع النقيض	(f) انتمت (ك)		(f) افوق (ك)



مثال 5 $f(x) = \sqrt{x}$

$$D_f = [0; +\infty[$$

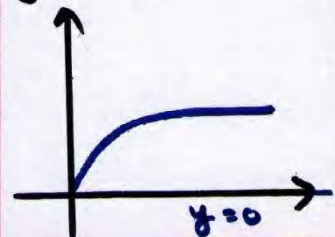
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

احتمال وجود م.م.م

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(f) يقبل فرعا لا نهائيا

عند $y=0$ باقى



مثال 6 $f(x) = x^2$

$$D_f =]-\infty; +\infty[$$

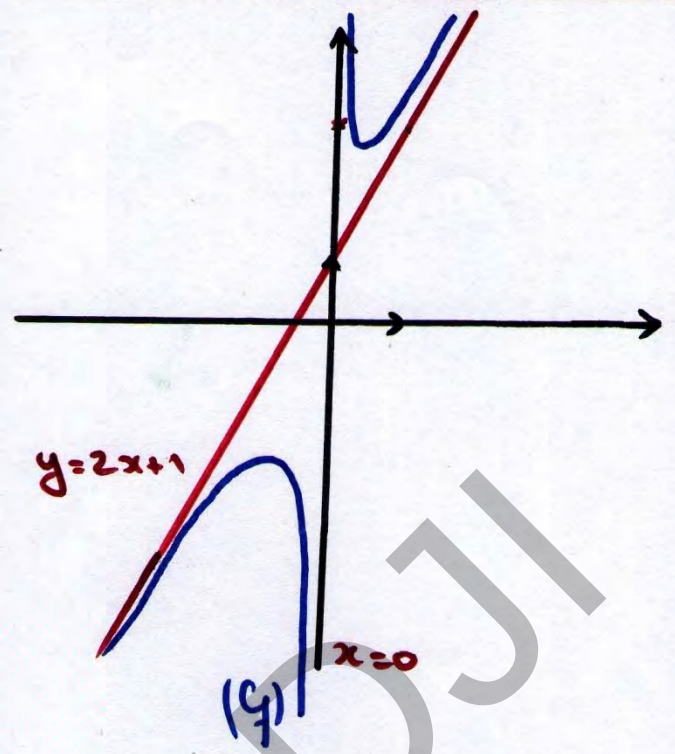
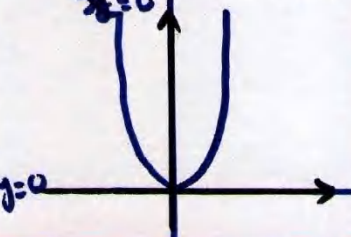
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

احتمال وجود م.م.م

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

(f) يقبل فرعا لا نهائيا

عند $y=0$ باقى



مثال 3 $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$

$$D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

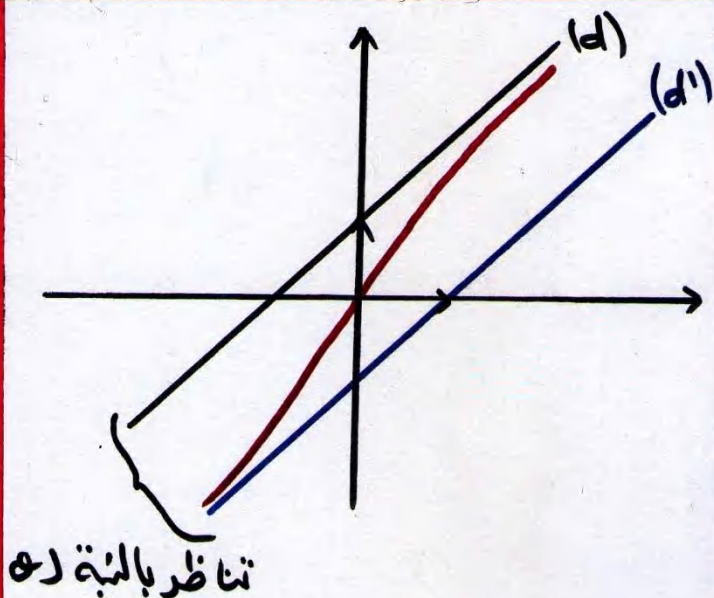
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

احتمال وجود م.م.م

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{2x - 1} = 1$$

اذ $y = -x + 1$ (D) م.م.م (f) عند $+\infty$ و $-\infty$



2/ المنحنيات المقاربة:

✓ بين أن منحنى الدالة g منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

تفسير بياني:

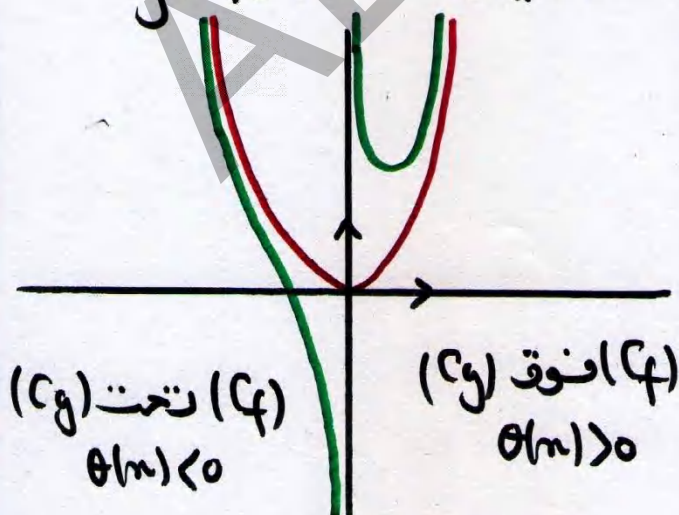
(C_g) منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$!

مثال: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

(C_g) منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$!

بحيث $g(x) = x^2$



(C_f) تحت (C_g)
 $\theta(x) < 0$

(C_f) فوق (C_g)
 $\theta(x) > 0$

1/ استخراج مرم انطلاقا من آخر باستعمال شعبة دالة

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right); D_f = \mathbb{R}$$

1. تأكد أن $y = x+1$ مرم (C_f) عند $+\infty$

2. استخراج دوز حساب أن (C_f) يقبل مرم (C') عند $+\infty$. يطلب تعيين معادلتها.

الحل:

1. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

2/ استخراج (C')

نلاحظ أن f دالة فردية

نضع $t = -x$ (معناه $x \rightarrow +\infty$ معناه $t \rightarrow -\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = 0$$

بما أن f فردية $f(x) = -f(-x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(-x) - x - 1] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [-f(t) + t - 1] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [f(t) - t + 1] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [f(t) - (t-1)] = 0$$

اذن (C'): $y = x - 1$

الامتحانات

ADEL NADJI

الاستمرارية

$$D_f =]-\infty, a] \quad /3$$

* f ليست متمرة عند العدد a .

* دراسة استمرارية f على يسار العدد a :

f متمرة على يسار العدد a



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

$$D_f =]-\infty, a] \cup [a, +\infty[\quad /4$$

عبارتها عند العدد a

* دراسة استمرارية f على يمين a :

f متمرة على يمين a



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

* دراسة استمرارية f على يسار a :

f متمرة على يسار a



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

* دراسة استمرارية f عند العدد a :

f متمرة عند العدد a



1 $\leftarrow f$ متمرة على يمين a

2 $\leftarrow f$ متمرة على يسار a

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \leftarrow 3$$

1/1 استمرارية الدالة f عند عدد a :

* f دالة معرفة على D_f

* a عدد ينتمي إلى D_f (غير معزول، له جوار)

1 $\leftarrow D_f$ يشمل a (ليس حال D_f)

2 $\leftarrow [a, +\infty[$

3 $\leftarrow]-\infty, a]$

4 $\leftarrow]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$

f متغيرة عبارتها عند العدد

سؤال: ادرس استمرارية الدالة f عند a .

$$D_f \text{ يشمل } a \text{ (ليس حال } D_f) \quad /1$$

f متمرة عند العدد a



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$D_f = [a, +\infty[\quad /2$$

* f ليست متمرة عند a .

* دراسة استمرارية f على يمين a :

f متمرة على يمين العدد a



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

N.B :

f قابلة للاشتقاق $\Leftrightarrow$ f دالة متمرة

2. $I = [a, b]$

- ← نبين ان f متمرة على $[a, b]$ كما سبق
- ← نبين ان f متمرة على a يمين
- ← نبين ان f متمرة على يساره

3. $I = [a, +\infty[$

- ← نبين ان f متمرة على $[a, +\infty[$ كما سبق
- ← نبين ان f متمرة على a يمين

4. $I =]-\infty, a]$

- ← نبين ان f متمرة على $]-\infty, a]$ كما سبق
- ← نبين ان f متمرة على يساره

3/ التفسير الهندسي للاستمرارية:

f دالة متمرة على مجال I



يمكن رسم (f) على المجال I دون رفع القلم

4/ أمثلة:

1. دوال متمرة على مجال تعرفها:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} -x &]-\infty, 0] \\ x^2 &]0, +\infty[\end{cases}$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 &]-\infty, 0[\\ x &]0, +\infty[\end{cases}$$

* هل الدالة f متمرة عنده؟

$$x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 2) = 2$$

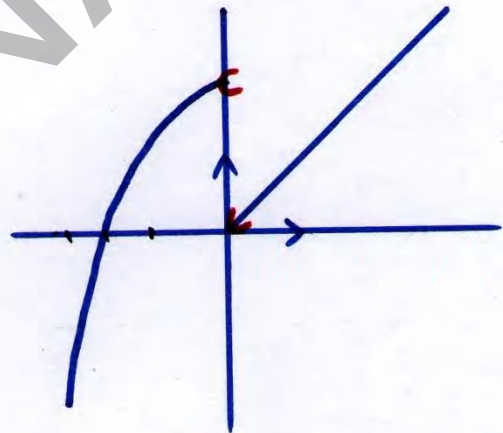
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f(0) = 0$$

* f ليست متمرة على يساره

* f متمرة على يمين 0

* f ليست متمرة عند 0



2/ استمرارية الدالة f على مجال I:

بين ان الدالة f متمرة على المجال I؟

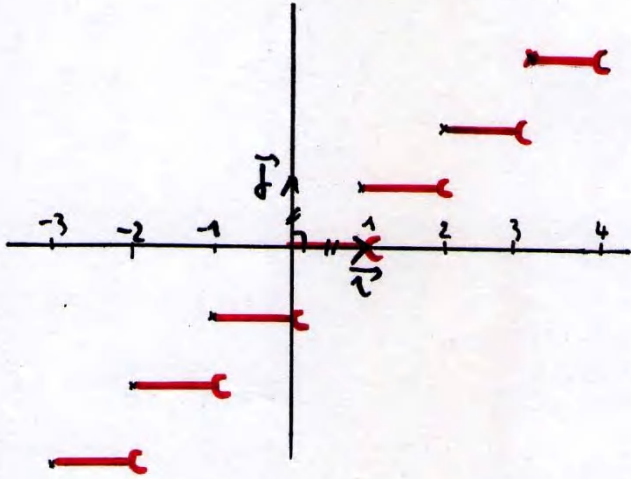
1. I مجال مفتوح $[a, b]$ $[a, +\infty[$ $]-\infty, b]$

f عبارة عن مجموع، جداء، تركيب،

عدة دوال مرجعية متمرة على I،

ادن فالدالة f متمرة على المجال I

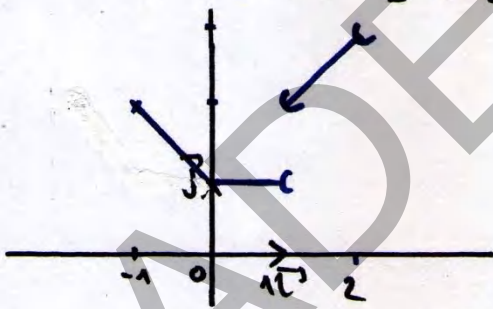
* التمثيل البياني : fonction en escaliers



* دوال مرتبطة بالدالة الجزء الصحيح
لتكن f الدالة المعرفة على $[-1; 2]$ بالعبارة
 $f(x) = x E(x) + 1$

عين عبارة f في كل مجال من I_f ، ارم (f)
هل f دالة متمرة؟

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & [-1, 0[\\ 1 & [0, 1[\\ x+1 & [1, 2[\end{cases}$$



* f متمرة على $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$

* f ليست متمرة على $[-1, 2]$

(Voir page precedente) مثال 2

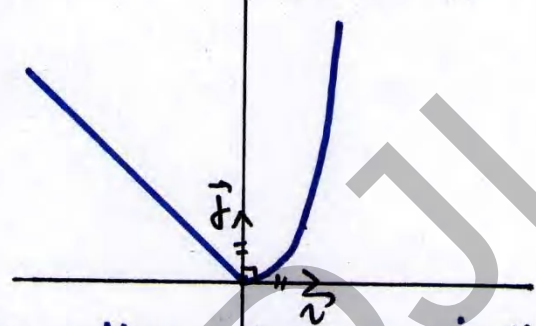
$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & [-\infty, 0[\\ x & [0, +\infty[\end{cases}$$

* f متمرة على $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

* استمرارية f عند 0 : $\in$ متمرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

* اذن f متمرة على $\mathbb{R}$



* 2. دوال غير متمرة على مجال تعريفها:

مثال : الدالة الجزء الصحيح

$$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \rightarrow n = E(x) = [x]$$

$$\text{حيث } n \leq x < n+1$$

* تعريف

$$E(2,3) = 2$$

$$E(3) = 3$$

$$E(\pi) = 3$$

$$E(-4,12) = -5$$

* أمثلة:

$$E(x) = \begin{cases} -1 & [-1, 0[\\ 0 & [0, 1[\\ 1 & [1, 2[\\ 2 & [2, 3[\end{cases}$$

* تعليق:

الدالة E متمرة على كل من المجالات

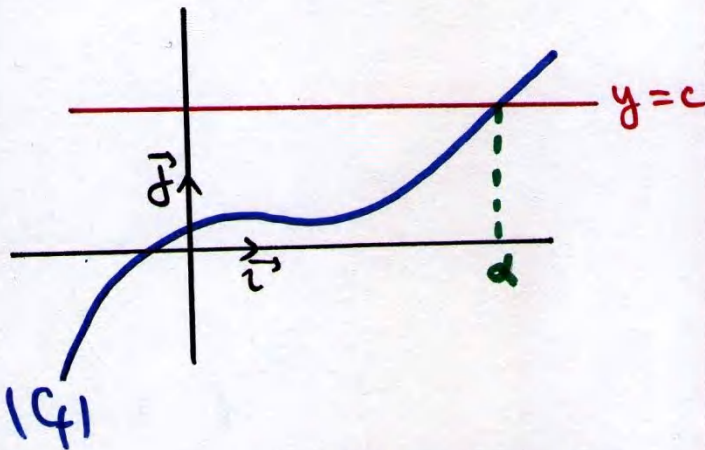
$$\dots [-3, -2[, \dots [-2, -1[, \dots [-1, 0[, \dots [0, 1[, \dots [1, 2[, \dots [2, 3[, \dots$$

لكنها غير متمرة على $\mathbb{R}$.

(62)

مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة القيمة المتوسطة



5. مثال + طريقة التنصيف:

ب: دالة معرفة على $\mathbb{R}$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

1/ ادرس تغيرات الدالة f.

2/ بين ان المعادلة $f(x) = 8$ تقبل حلا

وحيدا في المجال $[-2; 1]$

أو

بين ان (f) يقطع $y = 8$: (D) في نقطة وحيدة

3/ جد مصرا للحل α سعته 10^{-2}

أو

جد مصرا لفاصلة نقطة التقاطع.

x	$-\infty$	-2	α	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$		21	8	$+\infty$
				-6	

الهدف:

1. اثبات ان معادلة ما تقبل حلا في مجال معين باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة

2. تعيين حصر سعته m لهذه الحلول بطريقة التنصيف.

$$\textcircled{1} f(x) = c$$

اثبت ان المعادلة تقبل على الاقل حلا في

المجال $[a, b]$ (مفتوح، مغلق، $+\infty$, $-\infty$)

$\leftarrow f$ متمرة على $[a, b]$

$\leftarrow c$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

في حالة مجال مفتوح: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$

نقول ان $f(x) = c$ تقبل على الاقل حلا

α محصور بين a و b : $a < \alpha < b$

$\alpha \in]a, b[$

ثم اثبات ان الحل وحيد:

$\leftarrow f$ دالة رتيبة تماما

3. اثبات ان α محصور بين 1 و 3 مثلا:

$\leftarrow$ نثبت ان العدد c محصور بين $f(1)$ و $f(3)$.

4. التفسير البياني:

$f(x) = c$ تقبل حلا وحيدا α معناه (f)

يقطع المستقيم $y = c$: (D) في نقطة وحيدة

فاصلتها

(63)

$$\textcircled{2} f(x)=0$$

* اثبات ان المعادلة تقبل حلا في المجال
 $[a, b]$ (مفتوح، مغلق، ∞ , عدد

← f مستمرة على $[a, b]$

← f غيرت اشارتها .

نقول ان $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α
 حيث $a < \alpha < b$ $\alpha \in]a, b[$

* اثبات ان الحل وحيد:

← f دالة رتيبة قاما .

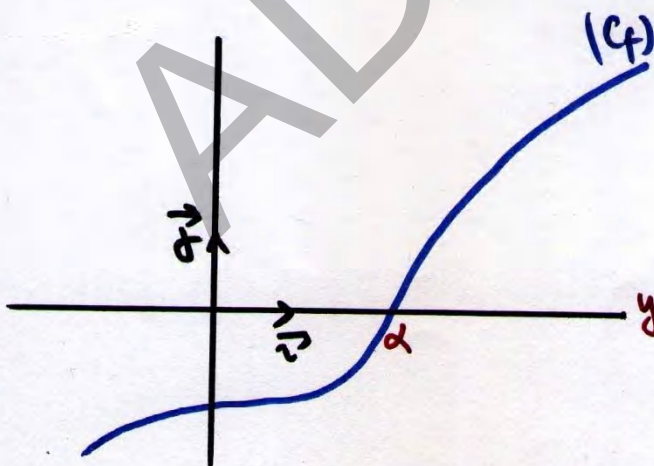
- اثبات ان α محصور بين 1 و 3 مثلا:

← نحسب $f(1)$ و $f(3)$ ونثبت
 ان $f(1) \times f(3) < 0$

* التفسير البياني:

$f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

(f) يقطع محور الفواصل في النقطة
 ذات الفاصلة α أي النقطة $A(4,0)$



اثبات ان $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا على $[-2, 1]$

* f دالة مستمرة على $[-2, 1]$ (مجال جزئي مغلق)

* $f(1) < 8 < f(-2)$ حيث

$$\begin{cases} f(-2) = 21 \\ f(1) = -6 \end{cases}$$

* الدالة f متناقصة قاما على $[-2, 1]$

مما سبق وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة

فان المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $-2 < \alpha < 1$

ابعد حصول α بطريقة التنصيف:

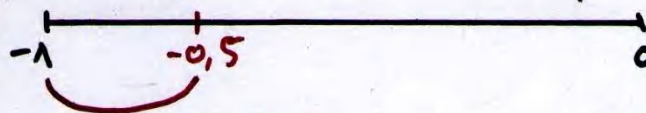
$a < \alpha < b$ هذا الحصر سقته m

$$m = b - a \quad \text{معناه}$$

$$f(-2)=21 \quad f(-1)=14 \quad f(0)=1 \quad f(1)=-6$$



$$f(-1)=14 \quad f(-0,5)=6 \quad f(0)=1$$



$$14 \quad 8,17 \quad 6 \\ -1 \quad -0,5 \quad -0,5$$

$$14 \quad 8,17 \quad 7,90 \quad 8,17 \\ -1 \quad -0,54 \quad -0,53 \quad -0,55$$

$$f(\alpha)=8$$

اذن $-0,53 < \alpha < -0,54$ (10^{-2})

بيانيا: (f) يقطع $y=8$ في النقطة

الوحيدة ذات الفاصلة α

$$-0,53 < \alpha < -0,54$$

$\textcircled{64}$

٦. مثال + طريقة التنصيف:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

3/ حدد حصر α بـ 10^{-1}

أو

بين أن (f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α ، ثم حدد حصر α .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

f دالة متتمة على $\mathbb{R}$

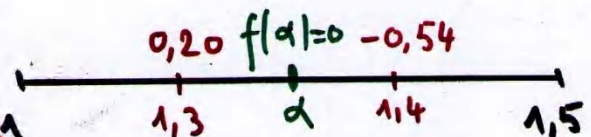
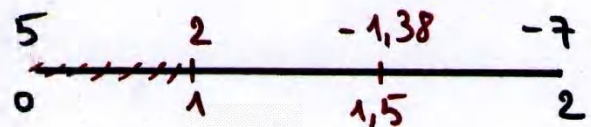
f غير تشارتها من $+\infty$ إلى $-\infty$

f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

مما سبق وحسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

ابعد حصر α :



(65) $1,3 < \alpha < 1,4$ (10^{-1})

ملاحظة:

سأبين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

في هذه الحالة لا نحتاج لطريقة التنصيف فقط نصيف أثناء الإجابة ما يلي

$$f(1,3) \times f(1,4) < 0 \quad \begin{cases} f(1,3) = 0,20 \\ f(1,4) = -0,54 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = h(x)$$

* لحل هذه المعادلة نجعلها صفرية ونعبر

الدالة $g(x) = f(x) - h(x)$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x) +$$

نطبق مبرهنة القيم المتوسطة

على الدالة g كما في الحالة ②.

$$\textcircled{4} \quad \text{عزل } e^x \text{ و } \ln a, \text{ حصر } f(a)$$

مثال: S_2 Bac 2012

$$g(x) = 1 - x e^x \quad \textcircled{I}$$

* بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

على المجال $[-1, 0]$ نثبت

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ e^x = 1/x \end{cases} \quad \text{فإن } 0,5 < \alpha < 0,6$$

$$f(x) = (x-1)e^x - x - 1 \quad \textcircled{II}$$

* بين أن $f(a) = \frac{a^2-1}{a}$ عزل e^x كما في عرض

* متزايدة تماما R $f(a) < f(0,6) < f(0,5) < R$

* متناقصة تماما R $f(a) < f(0,5) < f(0,6) < R$

* قواعد الطاب $\sin$ $\mathbb{R}$ فـ

فـ

الاستقافة

الاشتقاقية

أمثلة:

$a=2$ لـ $f(x)=x^2$ *

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+2)^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h+4) = 4$$

اذ الدالة مربع قابلة للاشتقاق عند 2

و $f'(2) = 4$

$a=-1$ لـ $f(x)=\sqrt{x}$ *

f غير قابلة للاشتقاق عند -1 لان $-1 \notin D_f$

$a=4$ لـ $f(x)=\sqrt{x}$ *

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

اذ f قابلة للاشتقاق عند 4

و $f'(4) = \frac{1}{4}$

$f(x) = \sqrt{-x}$

1/ قابلية اشتقاق الدالة f عند عدده

* f دالة معرفة على D_f

* a عدد ينتمي إلى D_f .

1 $\leftarrow D_f$ يشمل a (ليس حد الـ D_f)

2 $\leftarrow [a; +\infty[$

3 $\leftarrow]-\infty, a]$

4 $\leftarrow]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$

f تغير عبارتها عند a .

* سؤال: ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند a

واستنتج العدد المشتق بازواج.

1/ D_f يشمل a (ليس حد الـ D_f)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



* f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a

* f قابلة للاشتقاق عند العدد a

هو $f'(a)$ حيث $f'(a) = b$

$$D_f =]-\infty, a] / 3$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a .

دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ,$$

عددت f قابلة للاشتقاق على يسار العدد a و $f'_g(a) = b$ f ليست قابلة للاشتقاق على يسار a

مثال:

$$a=0 ; D_f =]-\infty, 0] ; f(x) = \sqrt{-x+3}$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 .

قابلية اشتقاق f على 0 من اليمين:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3-h} - \sqrt{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h(\sqrt{3-h} + \sqrt{3})} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يسار a

$$f'_g(0) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \text{ و}$$

$$D_f = [a, +\infty[/ 2$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a .

دراسة قابلية اشتقاق f على يمين a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ,$$

عددت f قابلة للاشتقاق على يمين العدد a و $f'_d(a) = b$ f ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

مثال:

$$a=2 ; f(x) = \sqrt{x-2}$$

f ليست قابلة للاشتقاق عند 2 .

قابلية اشتقاق f على يمين 2 :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

اذن f ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

• دراسة قابلية اشتقاق f على $\mathbb{R}$ معين 5:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{+5+h-5}{h} = +1$$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ معين 5
و $f'(5) = +1$

• دراسة قابلية اشتقاق f على $\mathbb{R}$ يسار 5:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-5-h+5}{h} = -1$$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ يسار 5
و $f'_g(5) = -1$

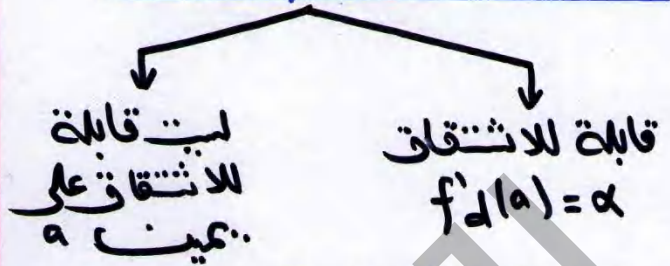
• دراسة قابلية اشتقاق f عند 5:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ معين و يسار 5
لكن $f'_d(5) \neq f'_g(5)$

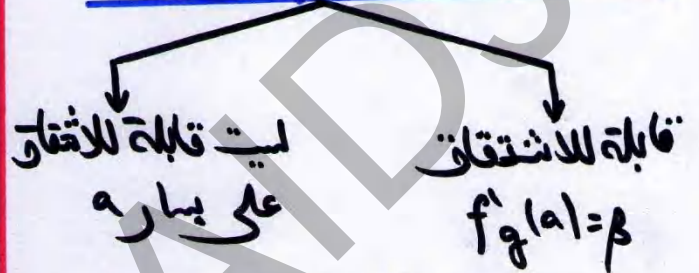
اذن f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 5.

14 / $[a, +\infty[\cup]-\infty, a]$ f متغير
عبارتها عند a

• دراسة قابلية اشتقاق f على a



• دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a :



• دراسة قابلية اشتقاق f عند العدد a :

يتكون f قابلة للاشتقاق عند العدد a
لذا فقط إذا كانت:

← f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ معين a

← f قابلة للاشتقاق على يسار a .

$$f'_d(a) = f'_g(a) = \alpha$$

« العدد المشتق f عند a هو $f'(a) = \alpha$

مثال $f(x) = |x - 5|$ $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = -x + 5 &]-\infty, 5] \\ f(x) = x - 5 & [5, +\infty[\end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق f عند العدد 5.

2/ مشتقات الدوال المألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجال الاشتقاق
a	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

3/ عمليات على الدوال المشتقة:

f	f'
$k \cdot u$	$k \cdot u'$
$u + v - w$	$u' + v' - w'$
$u \cdot v$	$u'v + u \cdot v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - u v'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

2/ الدالة المشتقة f' :

1/ مجالات قابلية اشتقاق f' :

f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I :

f قابلة للاشتقاق من أجل كل عدد a من I

كيف نجيب على السؤال؟: f عبارة عن مجموع اجزاء، تتركب عدة دوال من جنسها قابلة للاشتقاق على كل مجال من I . إذن f قابلة للاشتقاق على I (مجال مفتوح)

f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$:

نبين ان

f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ كما سبق.
نبين ان f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ كما سبق.
نبين ان f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ كما سبق.

f قابلة للاشتقاق على $[a, +\infty[$:

f قابلة للاشتقاق على $]a, +\infty[$ كما سبق.
 f قابلة للاشتقاق على $]a, +\infty[$ كما سبق.

f قابلة للاشتقاق على $]a, -\infty[$:

f قابلة للاشتقاق على $]a, -\infty[$ كما سبق.
 f قابلة للاشتقاق على $]a, -\infty[$ كما سبق.

• استنتج دوز حساب : النهاية التالية

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = f'(2)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{حيث}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$A = f'(2) = \frac{1}{4}$$

6/ المشتقان المتعاقبة:

• f دالة قابلة للاشتقاق n مرة على مجال I

• $f^{(n)}$ تسمى المشتقة ذات الرتبة n للدالة f .

مثال

$$f(x) = (3x+4)e^x \quad \text{احسب } f'(x)$$

$$f''(x), f'''(x) \quad \text{ثم بين ان}$$

$$f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x \quad \text{البرهان بالتراجع}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{احسب } f'(x)$$

$$f''(x), f'''(x) \quad \text{ثم بين ان}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$$

$n!$: عامل

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)$$

$$n! = (n-1)! \times n$$

14/ مشتقة مركب دالتين:

$f(x)$	$f'(x)$
$u[v(x)]$	$v'(x) \times u'[v(x)]$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$n u' u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-n u'}{u^{n+1}}$

15/ تطبيقات:

• بين ان f قابلة للاشتقاق على مجال معين واحسب $f'(x)$

$$f(x) = 2x+3 \quad f(x) = (2x+1)^3$$

$$f(x) = x^3 \quad f(x) = \sqrt{6x^2+3x+10}$$

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1 \quad f(x) = \frac{1}{(x+3)^4}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \quad f(x) = \cos(-4x+3)$$

$$f(x) = x^3(2x^2+1) \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} \quad f(x) = (x^3 + x + 1)\sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{2x^2+2}{2x+1} \quad f(x) = 10(x+2)^2$$

مثال: $a=0$, $f(x)=x^2$

3. f غير قابلة للاشتقاق عند a

(C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a

مماسا عموديا معادلته $x=a$

طبيعة الأسألة:

① عين معادلة المماس لـ (C_f)

← عند النقطة ذات الفاصلة a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

← عند النقطة ذات الترتيب b :

• نحل المعادلة $f(x)=b$
• نعين الفواصل a الممكنة لعدد الحاصل
• يمثل عدد المماسات الممكنة.

+ بعد تعيين a نكتب

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

مثال: $f(x)=x^2$

عين مماسات (C_f) عند النقاط ذات الترتيب 4.

$x=2$ معناه $f(x)=4$
 $x=-2$

$a=-2$

$$f(-2)=4 / f'(-2)=-4$$

$$y = -4(x+2) + 4$$

$$y = -4x - 4$$

$a=2$

$$f(2)=4 / f'(2)=4$$

$$y = 4(x-2) + 4$$

$$y = 4x - 4$$

(71)

3/ التفسير الهندسي للعدد المشتق:

1. D_f يمثل a (ليس محال D_f)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

*1 $f'(a) = b$ يقبل عند النقطة

$A(a, f(a))$ مماسا مماسا معادلته

$$(\Delta): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

مثال: $f(x)=x^2$, $a=1$

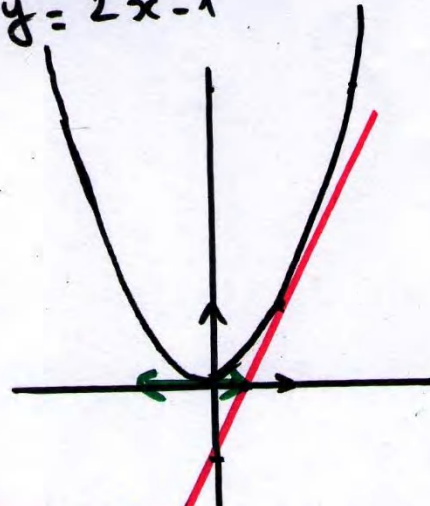
f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=2$

اذ (C_f) يقبل مماسا (Δ) عند النقطة

ذات الفاصلة 1 معادلته

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 2x - 1$$



$$(\Delta): y = 2x - 1$$

*2 $f'(a) = 0$ يقبل عند النقطة

ذات الفاصلة a مماسا افقيا

$$y = f(a)$$

معادلته

← الذي يمثل النقطة $A(a, \beta)$

نعين الفواصل الممكنة كما يلي

$$(A): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

نعوض $f(a)$ و $f'(a)$ بدلالة a

نعوض x و y بالاحداثيات a, β

نتحصل على معادلة بدلالة a ، نحلها

لايجاد a

$$\text{مثال: } f(x) = x^2$$

نعين محامات (C_f) التي تشمل النقطة $A(0, -1)$

$$(A): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$\begin{cases} f'(a) = 2a \\ f(a) = a^2 \end{cases}$$

$$x = 0 / y = -1$$

$$-1 = 2a(0-a) + a^2$$

$$-1 = -a^2$$

$$\underline{a = +1}$$

$$\underline{a = -1}$$

$$y = 2x - 1$$

$$y = -2x - 1$$

② عين النقطة A بحيث عندما فان (C_f)

ولاً (يقبلان نفس المحامات ثم عين معادلته

نعين a حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases} \Rightarrow A(a, f(a)) \quad \text{النقطة}$$

ثم نعوض في إحدى المعادلتين $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

← الذي معامل توجيها α

$$f'(x) = \alpha$$

نعين الفواصل الممكنة a المحامات (عدد الحلول

يمثل عدد المحامات الممكنة

بعد تعيين a نكتب

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$\text{مثال: } f(x) = x^2$$

نعين محامات (C_f) التي معامل توجيها α

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2x = 8 \quad \text{معناه} \quad x = 4$$

أي عند النقطة ذات الفاصلة 4

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$y = 8(x-4) + 16$$

$$y = 8x - 16$$

← الذي يوازي المستقيم $y = \alpha x + \beta$

نحل المعادلة $f'(x) = \alpha$ لتعيين

الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل

← الذي يعامد المستقيم $y = \alpha x + \beta$

$$f'(x) = -\frac{1}{\alpha}$$

لتعيين الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل

مثال:

عين النقطة A التي تقبل فيها منحنى الدالة مربع ومنحنى الدالة مكعب متماسا مشتركا ثم عين معادلة هذا الكماس:

$$\begin{cases} a^3 = a^2 \\ 3a^2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a^2 - 1) = 0 \\ a(3a - 2) = 0 \end{cases}$$

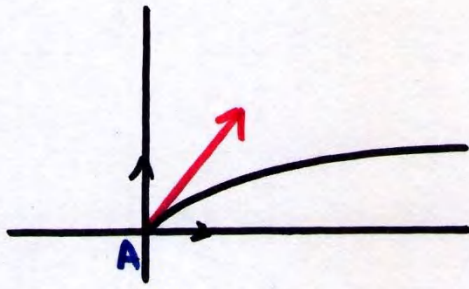
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 & a = -1 & a = 1 \\ a = 0 & a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{اذن } a = 0 \quad f(a) = 0$$

النقطة A هي المبدأ (0,0)

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

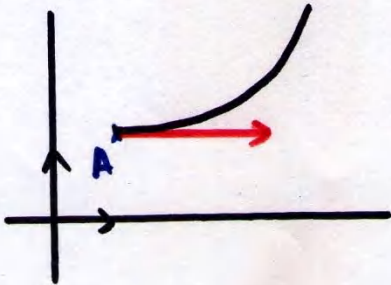
$$\boxed{(D): y = 0}$$



$$f'_d(a) = 0 \quad 2.$$

نصف كماس من اليمين مواز لمحور الفواصل

$$(A): \begin{cases} y = f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

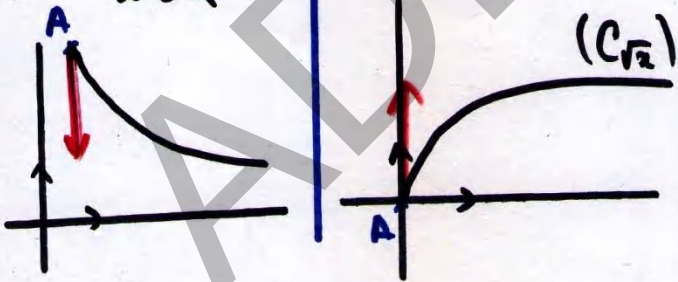


3. نعيد $+\infty$ أو $-\infty$

$-\infty$

$+\infty$

نصف كماس مواز لمحور الترتيب موجب نحو الأعلى معادلته $x = a$



N.B: في هذه الحالة النقطة $A(a, f(a))$ هي نقطة توقف.

2/ a حد f_d (يمين a أو يسار a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

أو

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

أو

نصف كماس بدل كماس

$$f'_d(a) = b \quad 1.$$

$$(D): \begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

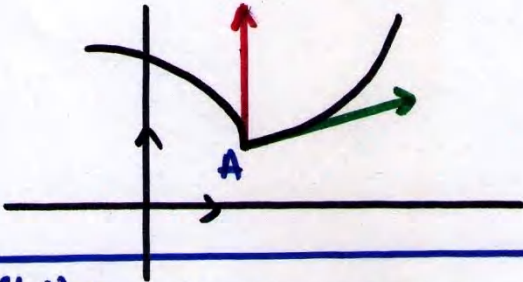
نصف كماس مائل (f) على عین النقطة ذات الفاصلة a

② l و ∞ :

(f) يقبل نصف مماسين عند النقطة ذات
الفاصلة a معادلتها مثلا:

$$(A_1) \begin{cases} y = f'(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases} \text{ من اليمين}$$

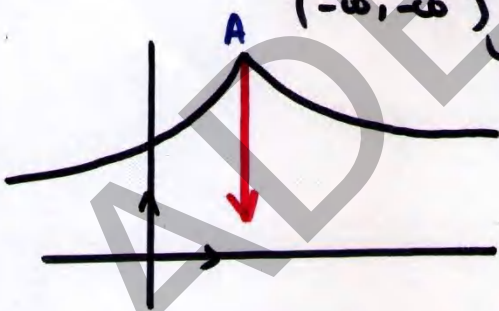
$$(A_2) \begin{cases} x = a \\ \text{نحو الأعلى } +\infty \text{ ونحو الأسفل } -\infty \end{cases}$$



N.B: في الحالة ① و ②، النقطة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة زاوية.

③ ∞ و ∞ من نفس الإشارة:

(f) يقبل نصف مماس معادلته $x=a$
موجه نحو الأعلى $(+\infty, +\infty)$ أو نحو
الأسفل $(-\infty, -\infty)$



N.B: النقطة $A(a, f(a))$ تسمى
نقطة رجوع

3/ $]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$

f تتغير عبارتها عند a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

عند l و l' حيث $l = l'$

نرجع للحالة الأولى

(f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a

مماسا

مائل
افقيا
عموديا.

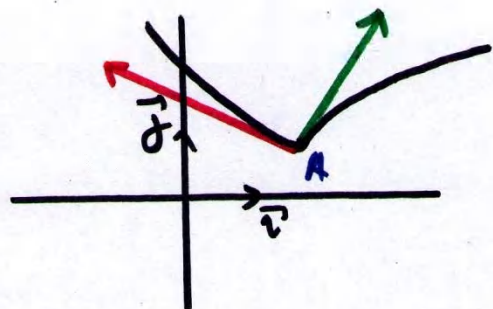
نتيجتين مختلفتين

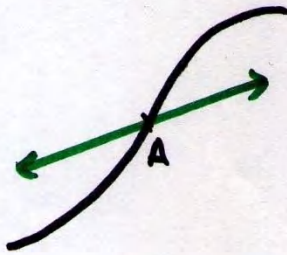
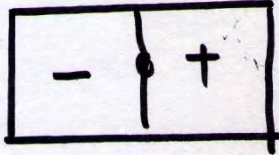
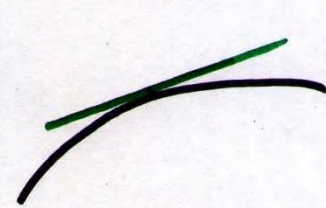
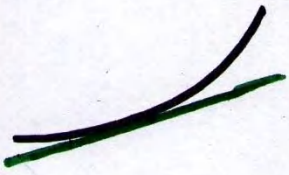
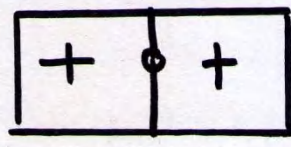
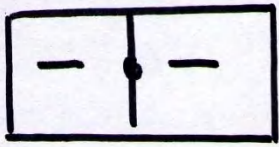
⑤ l و l' $(l \neq l')$

(f) يقبل نصف مماسين عند النقطة
ذات الفاصلة a معادلتها:

$$(A_1) \begin{cases} y = f'(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

$$(A_2) \begin{cases} y = f'(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

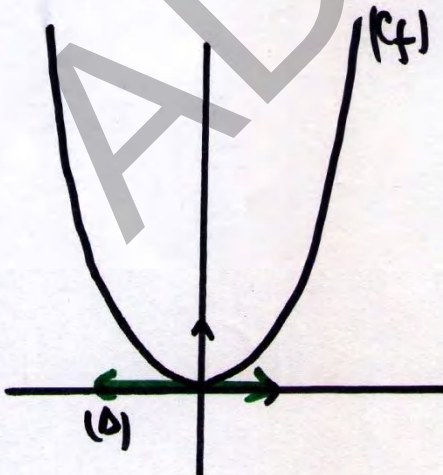




مثال:

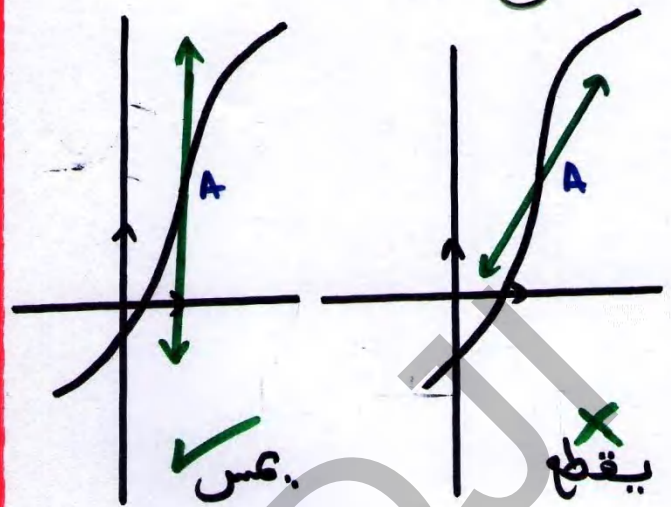
(5): $y=0$ عند $a=0$, $f(x)=x^2$
 ندرس إشارة الفرق $A=f(x)-y=x^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
A	+	0	+
الوضع	(f) فوق	(f) فوق	(f) فوق
البي	(5)	يمس (f)	(5)



(4) نجد $+\infty$ و $-\infty$:

(C_f) يقبل محاس معادلته $x=a$



N.B: النقطة A في هذه الحالة تسمى نقطة انعطاف (C_f) أيغير انحناءه

4 / الوضع البي بين (C_f) و (C_d):

طريقة 5:

(5): $y=ax+b$ محاس ل (C_f) عند

النقطة ذات الفاصلة a .

لمعرفة الوضع البي بين (C_f) و (C_d):

ندرس إشارة الفرق $A=f(x)-(ax+b)$

$A > 0$: (C_f) فوق (5)

$A < 0$: (C_f) تحت (5)

$A = 0$: الفرق لم يغير إشارته

(5) يمس (C_f)

الفرق يغير إشارته

(5) يخترق (C_f)

النقطة ($A(a, f(a))$) ن انعطاف.

(75)

بعد دراسة تغيرات و نشئي جدول
تغيراتها.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		

. استنتاج تغيرات R :

$$R'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$$R'(x) = g(x) - g(a)$$

$$x = a \Leftrightarrow g(x) = g(a) \quad \leftarrow R'(x) = 0$$

$$\leftarrow R'(x) \geq 0$$

لما $x > a$ و بما أن g متزايدة طام
فإن $g(x) \geq g(a) \Leftrightarrow g(x) - g(a) \geq 0$
 $R'(x) \geq 0$

$$\leftarrow R'(x) \leq 0$$

بنفس الطريقة نجد $R'(x) \leq 0$
لما $x \leq a$.

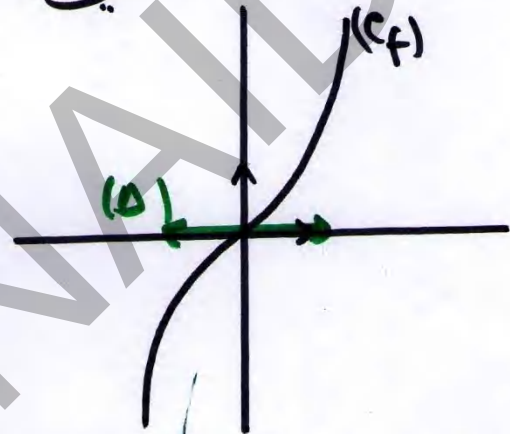
x	$-\infty$	a	$+\infty$
$R'(x)$	-	0	+
$R(x)$		$R(a) = 0$	
إشارة $R(x)$	+	0	+
الوضع النبي	(f) افوق (a)	(a) عكسي (f)	(f) افوق (a)

مثال ②:

$a = 0, f(x) = x^3$
 $(\Delta): y = 0$
ندرس إشارة الفرق $A = f(x) - y = x^3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
A	-	0	+
الوضع النبي	(f) ان تحت (a)	(a) ينفرد (f)	(f) افوق (a)

$(0,0)$ نقطة انعطاف لمعني الدالة مكعب



طريقة ② باستعمال دالة جديدة:

نزيد دراسة الوضع النبي بين (f)
والحماس (a) للمعني (f) عند النقطة
ذات الفاصلة a من أجل أي قيمة له
نضع الدالة R حيث: $Bac 2016 T_1$

$$R(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$$

$$R'(x) = f'(x) - f'(a)$$

. في بداية التمرين نجد دالة مساعدة g

$$g(x) = f'(x)$$

(76)

15/ تطبيقات الاشتقاقية:

1/ اتجاه تغير الدالة

* نعين الدالة المشتقة $f'(x)$
ندرس إشارتها

قواعد الحساب في $\mathbb{R}$ بالاستعانة بـ
أحدى (a) نظير
إشارتها في بداية
المسألة .

$f'(x) \geq 0$: f متزايدة تماما

$f'(x) \leq 0$: f متناقصة تماما .

* شكل جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2/ القيمة العدية الصغرى والعظمى

$f'(x)$ تنعدم من أجل قيمة محددة
ندرس إشارتها

+	0	-
---	---	---

عظمى

-	0	+
---	---	---

صغرى

3/ نقطة الانعطاف

* ط ①: $f'(x)$ تنعدم ولا تغير إشارتها

* ط ②: $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها

* ط ③: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$
والعكس

* ط ④: عند دراسة الوضع النبيل (C_f)
ومماسه (L) نجد أن (L) يقطع
 (C_f)

N.B ①

• ذروة $\Leftarrow$ محاس أفقي
• محاس أفقي $\Leftarrow$ { ذروة
نقطة انعطاف .

N.B ②:

$A(\alpha, \beta)$ ذروة لـ (C_f) معناه

$$\begin{cases} f(\alpha) = \beta \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

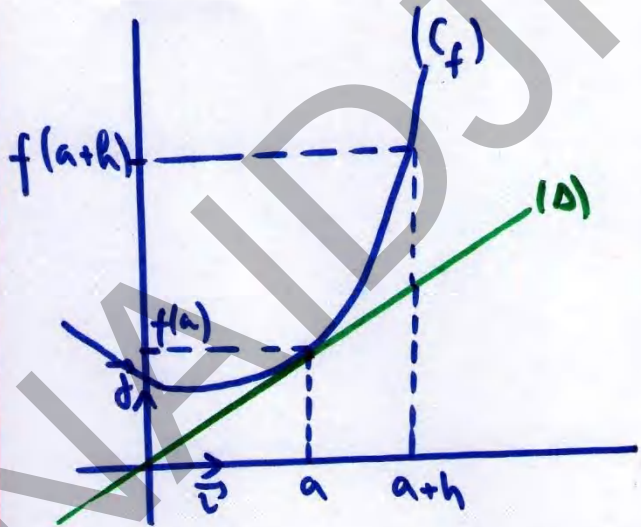
سؤال:

$f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$ ، عين a وط حتى
تكون النقطة $A(2;1)$ نهاية حدية
للمستقيم (C_f)

4/ التقريب التآلفي لدالة

المبدأ:

- دالة لها عبارة معقدة
- نريد حساب صور أعداد بشكل سهل
- نستبدل عبارة $f(x)$ بدالة تآلفية بسيطة كما يلي:



(Δ) مماس (f) عند النقطة ذات الإحداثيات (a, f(a))

$$(Δ): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

لما $x = a + h$

$$\begin{cases} f(x) = f(a+h) \\ y = f'(a) \cdot h + f(a) \\ f(x) \approx y \quad h \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$f(a+h) \approx h \cdot f'(a) + f(a)$$

مثال: احسب $(2,0001)^2$

$$\text{نعتبر } f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$\text{نكتب } f(2+h) \approx f'(2)h + f(2)$$

$$f(2+h) \approx 4h + 4$$

$$(2+h)^2 \approx 4h + 4$$

$$(2,0001)^2 \approx 4,0004$$

5/ إنشاء دالة عابقتها معجولة باستعمال طريقة Euler

المبدأ:

يمكن إنشاء منحنى تقريبي لـ (C_f) لدالة لا نعلم سوى دالتها المشتقة ونقطة منها كما يلي:

M_i	x_i	y_i
M_0	x_0	$f(x_0)$
M_1	$x_0 + h$	$h f'(x_0) + f(x_0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- ننجز جدولين $h \geq 0$ و $h < 0$
- فنستحصل على عدد كبير من النقط القريبة جدا من منحنى (C_f) الحقيقي
- نربط بين النقط لنحصل على منحنى تقريبي لـ (C_f) .

الدوال الأسية

الدوال الأسية

3/ معادلات تتضمن الدالة الأسية:

$$u(x) = v(x) \Leftrightarrow e^{u(x)} = e^{v(x)} *$$

$$\phi : \begin{cases} b \leq 0 \\ b > 0 \end{cases} \leftarrow e^{u(x)} = b *$$

$$u(x) = \ln b : b > 0$$

* تبديل المتغير إذا كانت كل المتجاهيل مكتوبة على الشكل $e^{\dots}$

$$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} y = e^x > 0 \\ x = \ln y \end{cases}$$

نطبق: حل المعادلات:

$$\begin{array}{l|l} e^{-x+2} = 1 & e^{2x+1} = (e^x)^3 \\ e^{2x} \cdot e^{x-3} = e^{x+6} & 2e^{2x} - 3e^{3x} + e^x = 0 \\ e^{-x^2} = \frac{1}{e} & 2e^x + \sqrt{e^x} - 3 = 0 \\ e^{x+3} - e^{\frac{x}{2}} = 0 & \end{array}$$

4/ دراسة إشارة عبارة وحل مترجمات:

1/ عبارة من الدرجة الأولى:

* قاعدة إشارة $\alpha e^{ax+b} + \beta$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha e^{ax+b} + \beta$	نفس إشارة α	نفس إشارة α

$\alpha, \beta > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha e^{ax+b} + \beta$	نفس	عكس	نفس
	$\alpha \cdot \alpha$	$\alpha \cdot \alpha$	$\alpha \cdot \alpha$

$\alpha, \beta < 0$

N.B: $e^{u(x)}$ دوما موجبة.

79 $\alpha e^{ax+b} + \beta = 0$ هي القيمة التي تعدم العبارة

1/ عموميات

1/ تعريف الدالة الأسية النيبيرية:

* توجد دالة وحيدة f معرفة على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f' = f \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

* هذه الدالة تسمى الدالة الأسية النيبيرية (ذات الأساس e) اكتشفت كعكسية $\ln$

$$f: \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_*^+ =]0, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = \exp(x) = e^x$$

* الدالة الأسية النيبيرية هي الحل الخاص للمعادلة

التفاضلية $y' = y$ ، حيث $y(0) = 1$

$$n \in \mathbb{Z}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

2/ خواص:

$e^a \times e^b = e^{a+b}$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(e^a)^n = e^{n \cdot a}$ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $e^{u(x)} \times e^{-u(x)} = 1$ $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$ $\sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}$	$e^{u(x)} > 0 \quad \forall x$ $e^{u(x)} < 0$ jamais $e^{u(x)} = 0$ jamais $e^0 = 1$ $e^1 = e = 2,718...$ $e^{\ln a} = a ; a > 0$ $\ln e^a = a$
---	---

نطبق: اكتب على أبسط شكل ممكن ما يلي:

$$A = \frac{e^{-5} \times e^8}{\sqrt{e^3} \times e^2} + \frac{e^{2^3} \times e^3}{e^{2^2} \times e^{-4}}$$

$$B = \frac{e^{-x} \times e^{3x} \times e^{x^2+2}}{e^{2x} \times (e^{2x})^{x+1}}$$

* حل متراجحات :

* نضع $\alpha e^{ax+b} + \beta > 0$ ثم نحل المتراجحة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة
* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من $\mathbb{R}$.

14 / اشارة $e^x - 1$:

$$\begin{aligned} 0 < e^x < 1 & : x < 0 \\ e^x > 1 & : x > 0 \\ e^0 = 1 & : x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

15 / انظر درس دراسة اشارة عبارة + حل متراجحات

16 / تطبيق:

ادرس اشارة العبارات التالية:

$$\begin{array}{l|l} e^x - 1 & 7e^{3x} - e^x - 6e^{2x} \\ 2e^{3x+4} + 3 & 2e^{2x} + e^x - 3 \\ -3e^{-5x} - 4 & 6e^{2x} - 18e^x + 12 \\ -2e^{1-x} + 1 & e^{2x} - e^x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 7e^{3x} - e^x - 6e^{2x} > 0 & 2e^{3x+4} + 3 < 0 \\ -2e^{1-x} + 1 < 0 & e^{2x} - e^x + 1 > 0 \end{array}$$

حل المتراجحات:

2 / عبارة من الدرجة الثانية أو أكثر:

$$\begin{aligned} & a e^{2x} + b e^x + c \\ & \text{نستعمل تبديل المتغير } y = e^x > 0 \\ & a y^2 + b y + c \end{aligned}$$

* $\Delta < 0$: اشارة a .

* $\Delta = 0$: اشارة $a (e^x - y_1)^2$.

* $\Delta > 0$: نحلل العبارة $a(e^x - y_1)(e^x - y_2)$ ثم نستخدم اشارة العدد

3 / اشارة عبارة $A(x)$ تتضمن الحالة الاية:

* نحل المعادلة $A(x) = 0$

واذا المرتقبل المعادلة أي حلول فإن:

$A(x) > 0$: إذا كان $A(0) > 0$ مثلاً

$A(x) < 0$: إذا كان $A(0) < 0$ مثلاً.

العدد الممتق عنده

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = 1$$

التقريب التالي عنده:

$$e^h \approx 1 + h ; h \rightarrow 0$$

5/ اشارة المثقة:

$f'(x) = e^x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$
الدالة e^x متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.
6/ جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$				$+\infty$

7 / نقط التقاطع مع المحاور:

مع (xx') : $S = \emptyset \Leftrightarrow e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
لا يوجد نقط تقاطع

مع (yy') : $f(0) = e^0 = 1$
 $(C_f) \cap (yy') = \{A(0,1)\}$

8/ اشارة الدالة e^x :
 $e^x > 0$ برهان: $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		+

كتغير هذ بي: (f) يقع دوما فوق (xx')

1/ الدالة الأسية النيرية $f(x) = e^x$

1/ تعريف:

مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

عبارة $f(x)$
 $f:]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$
 $x \mapsto y = f(x) = \exp x = e^x$

2/ النهايات:

معور الفواصل ممر أفقي (C_f) عند $-\infty$ (C_f) فوق (xx')	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
احتمال وجود ممر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (C_f) يمثل فرع لا نهائي عند $+\infty$ باتجاه (yy')	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

3/ الاستمرارية:

الدالة e^x متمرة على $\mathbb{R}$

4/ الاشتقاقية:

$f \leftarrow$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المثقة
هي f' حيث: $f'(x) = f(x) = e^x$

الهماسات:

مثلا عند النقطة ذات الفاصلة 0

(C_f) يقبل مماسا $(T): y = x + 1$

(f) يقع دوما فوق هذ الكماس (T) .

تطبيق: احسب مشتقان الدوال التالية

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^x$$

$$g(x) = (2x+3)e^{-2x+1}$$

$$h(x) = \frac{e^{2x} - 3}{e^{-x} + 3}$$

$$t(x) = -3x + 4 - 3e^{-2x-2}$$

$$k(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$z(x) = 2x + 1 - 3 \frac{e^x}{e^x - 1}$$

الدالة الأسية ذات الأساس a

* مجموعة التعريف: $\mathbb{R}$

* العلاقة: $(a > 0)$

$$f(x) = a^x \begin{cases} f(x) = 1 & ; a = 1 \\ f(x) = e^{x \ln a} & ; a > 0 ; a \neq 1 \end{cases}$$

* الاشتقاقية:

$$(a^x)' = \ln a \times e^{x \ln a}$$

$0 < a < 1$

$f'(x) < 0$ إذن f متناقصة تماما.

$$a^x < a^y \iff x > y$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

العلامات
حسب
إشارة $\ln a$

$a > 1$

$f'(x) > 0$ إذن f متزايدة تماما

$$a^x > a^y \iff x > y$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

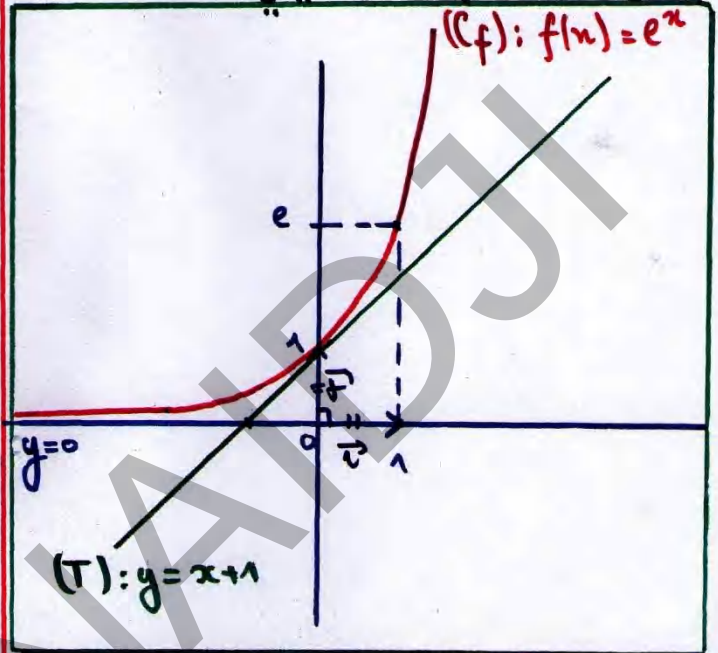
$a > 1$

9/ التمثيل البياني لمنحني الدالة e^x :

* انطلاقا من جدول التغيرات أو باستعمال

$$\left(\begin{array}{l} f'(x) = e^x \\ f(0) = 1 \end{array} \right) \text{ طريقة Euler}$$

يمكن إنشاء (C_f) كما يلي:



10/ الدالة $f = \exp u$

* مجموعة التعريف: $D_f = D_u$

* العلاقة: $f(x) = e^{u(x)}$

* النهايات: (Voir Apres)

* الامتزائية: إذا كانت u متزايدة على مجال I

فإن f متزايدة على نفس المجال I

* الاشتقاقية: إذا كانت u قابلة للاشتقاق

على مجال I فإن f قابلة للاشتقاق على I

وبالتالي المشتقة

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

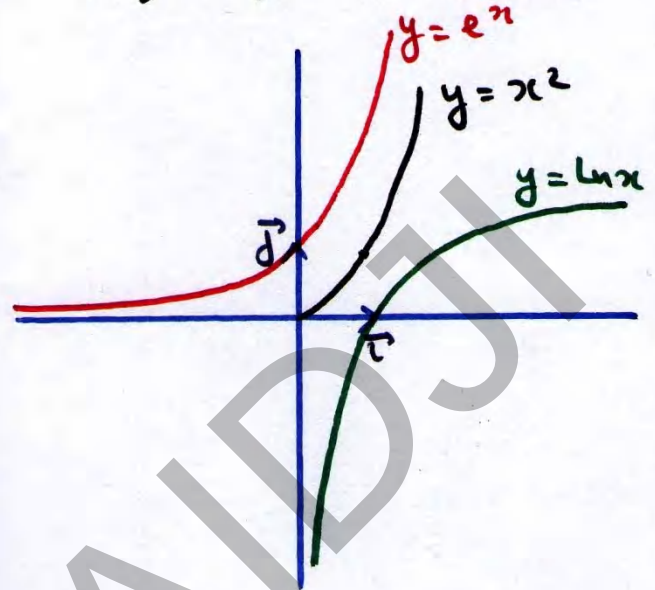
إشارة $f'(x)$ من إشارة $u'(x)$

* تغيرات f : لها نفس تغيرات u .

التزايد المقارن (الدالة الأسية)

1/ مدخل:

عند $+\infty$: $e^x > x^n > \ln x$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

2/ إزالة ح. عت: نهايات تهية:

النهاية الشهيرة	حساب النهاية عند
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	
المقلوب $\leftarrow 0^+$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$	
$\left[\begin{array}{l} 0^- \text{ } n=2k+1 \\ 0^+ \text{ } n=2k \end{array} \right]$	
المقلوب $\leftarrow \infty$	

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

عند عدد

المقلوب $\leftarrow 1$

في هذا الجدول يشرط التماثل (voir Apres)

3/ طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة:

1/ التحليل باخراج e^x و x كعامل مشترك:

e^x كعامل مشترك

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \times x^{+\infty}}{e^x \times (1 + \frac{1}{e^x})} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^x - 3e^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(\frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (e^x - 3 + \frac{4}{e^x})}{e^x (1 + \frac{2}{e^x})} = +\infty$$

x كعامل مشترك

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{e^x}{e^x} - \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x+1} - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{2x}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right) = +\infty$$

83

1/4 تبديل المتغير:

وذلك إذا كانت العبارة فيها e^x فقط

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2}$$

$$y \rightarrow 0^+ \text{ فإن } x \rightarrow -\infty \text{ و } y = e^x$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2 - 3y + 4}{y + 2}$$

$$= 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - 3y + 4}{y + 2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (y)$$

$$= +\infty$$

1/5 إنشاء القائل:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x+1}{x} \times \frac{e^{2x+1}}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}}$$

$$= +\infty$$

1/6 باستعمال خواص اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})) - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$$

← (Voir Après cours $\ln x$):

1/2 النشر:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^x - e^x$$

$$= 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 1)e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x + 2x e^x - e^x = 0$$

1/3 الانتقال بين $e^{u(x)}$ و $e^{-u(x)}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{+\infty}}{1 + e^{-x}} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(-x)^2 e^{-x} - (-x) e^{-x} + e^{-x}}$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+\infty} - 3 + 4e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$$

$$= +\infty$$

الدوال اللوغاريتمية

الدوال اللوغاريتمية

* خواص الحساب:

① a و b أعداد حقيقية موجبة قايما.

$\ln(a^n) = n \ln a$	$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$	$= -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
	$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

② إذا كان a و b حقيقيان أو عبارة بدلا لهما:

$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v $
$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v $
$\ln u^n \begin{cases} \rightarrow n \ln u & \text{فردى} \\ \rightarrow n \ln u & \text{زوجى} \end{cases}$

③ أخطاء شائعة:

$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$
$\ln a \times \ln b \neq \ln a + \ln b$
$\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln a - \ln b$
$(\ln a)^n \neq n \ln a$

ملاحظة

(85)

1/4/ عموميات

1/ تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

* هي الدالة العكسية لـ $f(x) = \frac{1}{x}$ والتي
تستخدم من أجل $x=1$, $\ln(1) = 0$
* هي الدالة العكسية للدالة الأسية النيبيرية

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y, x > 0$$

* الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معرفة على $]0, +\infty[$ وتحقق:

$$f:]0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = \ln x$$

2/ خواص:

* إشارة $a:]0, +\infty[$
 $\ln a$ معرف من أجل $a > 0$
 $\text{jama'is } a = 0$
 $\text{jama'is } a < 0$

* إشارة $\ln a: \mathbb{R}$

$$\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

$$\ln 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$$

a	0	1	$+\infty$
$\ln a$	-	0	+

* صور بعض القيم بالدالة $\ln$:

$\ln e^a = a$	$\ln 1 = 0$
$e^{\ln a} = a, a > 0$	$\ln e = 1$

4/ دراسة اشارة عبارة وحل مترجمات:

1/ عبارة من الدرجة الاولى:

* قاعدة اشارة $\alpha \ln(ax+b) + \beta$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha \ln(ax+b) + \beta$		نفس α α عكس α	

x_0 هي القيمة التي تعدم العبارة

$$\alpha \ln(ax+b) + \beta = 0$$

* حل مترجمات: بعد تعيين D

* نضع $\alpha \ln(ax+b) + \beta > 0$ ثم نحل المترجمة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة

* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من D.

$$\begin{aligned} u(x) > v(x) &\Leftrightarrow \ln u(x) > \ln v(x) * \\ u(x) > e^a &\Leftrightarrow \ln u(x) > a * \\ u(x) < e^a &\Leftrightarrow \ln u(x) < a * \end{aligned}$$

2/ عبارة من الدرجة 2 أو أكثر:

$$a(\ln x)^2 + b \ln x + c$$

بعد تعيين D: نتمثل تبديل المتغير $y = \ln x$

$$ay^2 + by + c$$

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &: \text{ اشارة } a \\ \Delta = 0 &: \text{ اشارة } a \\ \Delta > 0 &: \text{ نحل العبارة } (y_1)(y_2) \end{aligned}$$

وندرس اشارة الجداء.

3/ معادلات تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

← نعين D (داخل $\ln$ موجب تقام)

← نسط المعادلة باستعمال خواص $\ln$

← نحصل على احدى الحالات.

$$u(x) = v(x) \Leftrightarrow \ln u(x) = \ln v(x) * (1)$$

$$u(x) = e^b \Leftrightarrow \ln u(x) = b * (2)$$

* (3) تبديل المتغير اذا كانت كل البجائل مكتوبة على الشكل $\ln \dots$

$$ay^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$$

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x = e^y ; x > 0 \end{cases}$$

تطبيق: حل في R مايلي:

$$* \ln(x^2 - 1) = \ln x$$

$$* \ln(2x - 1) = 2$$

$$* \ln(x - 1)(x + 2) = 2 \ln 2$$

$$* \ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 2 \ln 2$$

$$* 2[\ln x]^2 + (\ln x) - 6 = 0$$

$$* \ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln(2x - 3) + \ln 4$$

$$* \ln|x| + \ln|4 - x| = \ln|2x - 1| + \ln 3$$

$$* \begin{cases} \ln 2x + \ln 3y = \ln 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} \ln x - \ln y = -\ln 3 \\ x^2 + 2y = 16 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} \ln x - \ln y = -\ln 3 \\ x^2 + 2y = 16 \end{cases}$$

3/ اشارة عبارة تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

• حل المعادلة $A(x) = 0$

• إذا لم تقبل المعادلة أي حلول في مجال ما فإن:

$A(x) > 0$: إذا كان $A(0) > 0$ مثلاً

$A(x) < 0$: إذا كان $A(0) < 0$ مثلاً

4/ اشارة $\ln x$

$x \in]0, +\infty[$

$\ln x < 0$: $0 < x < 1$

$\ln x = 0$: $x = 1$

$\ln x > 0$: $x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

5/ انظر درس اشارة عبارة + حل مترابطة:

6/ تطبيق: بعد تعيين

• حل المترابطة:

$+\ln(2x-1) > 2$

• $\ln(x+2) \leq 5$

• $\ln(x^2-1) < \ln(x)$

• $\ln(x-1)(x+2) \leq 2\ln 2$

• $\ln(x-1) + \ln(x+2) \leq 2\ln 2$

• $\ln(35-8x) > 3\ln 2 + \ln x^2$

• ادرس اشارة العبارة:

$(1+\ln x)(1-\ln x)(2-\ln x)(e^x-3)(e^{2x}-4)$

(T) يقع درجته (T)

العدد المشتق عند 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

التقريب التآلفي عند 1:

$$\ln(1+h) = h, \quad h \rightarrow 0$$

5/ إشارة المشتقة:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: f'(x) > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x}; \quad x > 0$$

الدالة $\ln$ متزايدة قاطعة على $]0, +\infty[$

6/ جدول التغيرات:

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

7/ انقط التقاطع مع المحاور:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{مع } (x, x)$$

$$x = 1 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow$$

$$(C_f) \cap (x, x) = \{A(1; 0)\}$$

مع (y, y) : لا يمكن أصلاً حساب $f(0)$

لأن 0 لا ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة $\ln$.

(88)

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1/ تعريف:

$$D_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$$

عارة $f(x)$:

$$f:]0, +\infty[\longrightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \ln x$$

2/ النهايات:

مع الترتيب م عمودي (C_f) عند $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
احتمال وجود م عند $+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (C_f) مثل فرع لا نهائي عند $+\infty$ باتجاه (x, x)	

3/ الاستمرارية:

الدالة $\ln x$ متمرة على $]0, +\infty[$

4/ الاشتقاقية:

f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وماليتها
المشتقة هي f' حيث:

$$(\ln x)' = (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

الجماسات:

مثلاً عند النقطة ذات الفاصلة 1, (C_f)

يقبل مماساً (T): $y = x - 1$

٨٠ / الدالة $f = \ln u$

* مجموعة التعريف:

الدالة	مجموعة التعريف
$\ln u(x)$	$u(x) > 0$
$\ln u(x) $	$u(x) \neq 0$
$\ln (u(x))^n$ زوجي	$u(x) \neq 0$
$\ln (u(x))^n$ فردي	$u(x) > 0$
$[\ln u(x)]^n$	$u(x) > 0$
$\frac{1}{\ln(u(x))}$	$u(x) > 0$ $u(x) \neq 1$
$\ln \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$	$A(x) \times B(x) > 0$
$\ln \left \frac{A(x)}{B(x)} \right $	$\begin{cases} A(x) \neq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$

* العبارة: $f(x) = \ln[u(x)]$

* النهايات: (Voir Apres)

* الاستمرارية: إذا كانت u موجبة تماما

ومتصلة على مجال I فالدالة $f = \ln u$

متصلة على نفس المجال I

* الاشتقاقية: إذا كانت u موجبة تماما

وقابلة للاشتقاق على مجال I

فإن الدالة $f = \ln u$ قابلة للاشتقاق

على نفس المجال I و:

$$[\ln(u(x))]' = [\ln |u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

* تغيرات f : إشارة $f'(x)$ مزاشارة $u'(x)$

لأن $f = \ln |u(x)| > 0$ لها نفس تغيرات u

8 / إشارة الدالة $\ln x$:

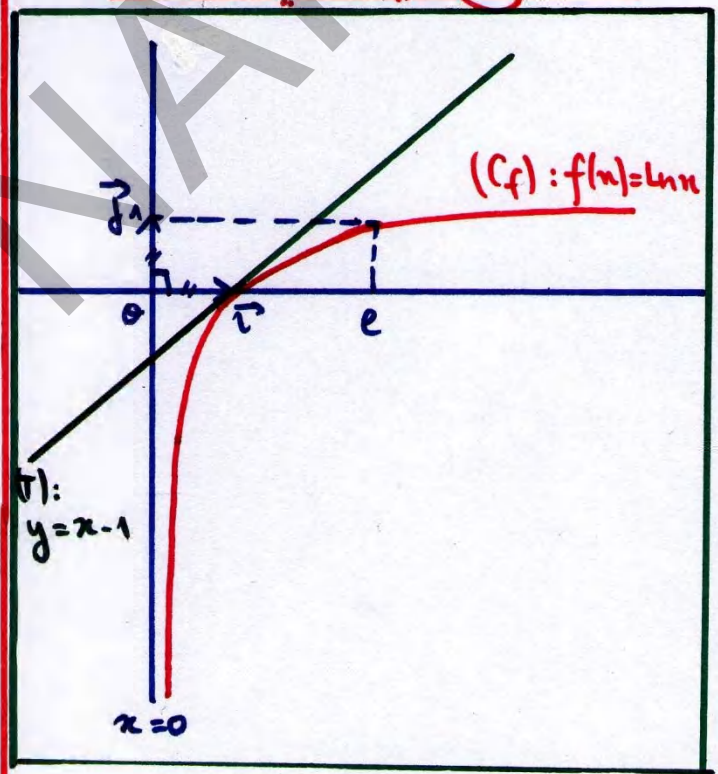
$$\ln x < 0 : 0 < x < 1$$

$$\ln x > 0 : x > 1$$

$$\ln x = 0 : x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $\ln x$		0	
وضع (C_f)			
$(C_{\ln})$			
$(x, \ln(x))$			

9 / التمثيل البياني لمنحني الدالة $\ln x$:



* اثارة $\ln u(x)$:

$$u(x) > 0$$

$$\ln u(x) < 0 \quad 0 < u(x) < 1$$

$$\ln u(x) = 0 \quad u(x) = 1$$

$$\ln u(x) > 0 \quad u(x) > 1$$

$$\ln u(x) = 1 \quad u(x) = e$$

$u(x)$	0	1	e	$+\infty$
$\ln u(x)$		-	+	

II الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس e

* مجموعة التعريف: $]0, +\infty[$

* العبارة $a > 0; a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

* الاشتقاقية:

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$0 < a < 1$$

$f(x) < 0$: f متناقصة تماما
 $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

النهايات حسب اشارة $\ln a$

$$a > 1$$

$f'(x) > 0$ اذن f متزايدة تماما

$$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$a > 1$$

* الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس e:

$$f(x) = \ln x$$

* الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس 10:

$$f(x) = \log_{10}(x) = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$\log 10 = 1$	0	الدالة $\log$ متزايدة
$\log 10^n = n$	$+\infty$	تقاطع على $]0, +\infty[$
$n \leq \log x \leq n+1 \Leftrightarrow 10^n \leq x \leq 10^{n+1}$		

طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة:

١/ التحليل باخراج x كعامل مشترك:

← خارج اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - \ln(1 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x) \left(\frac{x^2 + 3x}{-2x + 1} - \frac{\ln(1 - 2x)}{1 - 2x} \right) = +\infty$$

← داخل اللوغاريتم

وذلك لما كان أس x الذي داخل $\ln$ أكبر من أس x الذي خارج اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[x^2(1 + \frac{1}{x^2})]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} \right] = 0$$

٢/ النشر

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x + 2 \ln x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x + x \ln x = 0$$

التزايه المقارن (الدالة اللوغاريتمية)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

ازالة حعت : نهايات شهيرة:

حساب النهاية عند	النهاية الشهيرة
$+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ المقلوب $\leftarrow +\infty$
0^+	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-$ المقلوب $\leftarrow -\infty$
عدد	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ المقلوب $\leftarrow 1$

في هذا الجدول يشترط التماثل

7/ تبديل المتغير

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^2 - \ln x + 3]$$

$$y \rightarrow +\infty \text{ مع } x \rightarrow +\infty : y = \ln x$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 - y + 3$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)^2 - \ln x + 3]$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} y^2 - y + 3$$

$$= +\infty$$

8/ الانتقال بين اللوغاريتمية والالية

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0^+$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^n = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y^n$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} y^n e^y = 0$$

وذلك بوضع $y = e^x$

9/ باستعمال خواص $\ln$ هامة جدا

العبارة التي داخل $\ln$ فيها الالية e^n .
تعمل الطريقة التالية لازالة e وتكون كذا:
اظهار المستقيم بالمقاربة المماس.

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

$$= \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})]$$

$$= \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\bullet (D): y = 2x \leftarrow +\infty \text{ عند } x \rightarrow +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})] = +\infty$$

3/ توحيد المقامات

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} + \ln(2x-1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 + (2x-1)\ln(2x-1)}{(2x-1)} = +\infty$$

4/ انشاء التماثل

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} \times \frac{x+2}{x}$$

$$= 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{2x^2 - x + 3} \right)$$

$$= 0$$

5/ استخدام خواص اللوغاريتم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln x - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

$$= +\infty$$

6/ باستخدام تعريف العدد المشتق

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = (\ln x)'_{x=e}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)_{x=e} = \frac{1}{e}$$

أسئلة نظرية حول

الدوال الأسية و

اللوغاريتمية

الدوال الأسية واللوغاريتمية (أسئلة نظرية)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} ; D_f = [0, +\infty[$$

$$f'(x) = e^x - x > 0 \quad \forall x \in D_f$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} : \text{لكن عند } +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \left(\frac{-x}{e^{-x}} \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} - \frac{y}{e^y} \quad y = -x$$

$$= 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

A عدد حقيقي كبير جدا ($A \rightarrow +\infty$) حيث $A(x)$
هل يوجد عدد حقيقي كبير جدا B يحقق $x > B$ ؟
 $\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$ يمكن أخذ B
على الأقل e^A محققة.

١/ اثبات النهايات الشهيرة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$f(x) = e^x - x ; D_f = [0, +\infty[$$

$$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad \forall x \in D_f$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	

$$e^x > x \Leftrightarrow e^x - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$e^x > x \quad \text{لكن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'_{x=0}$$

$$= e^0 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{n \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{n \ln x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - n \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1 - \frac{n \ln x}{x})} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{e^{-x}} / y = -x \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(-y)^n}{e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \\ &\quad \begin{array}{l} \text{فردی} \quad 0^- \\ \text{زوجی} \quad 0^+ \end{array} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^{\frac{1}{n}}}{y} / y = x^n \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{\ln y}{y} = 0^+ \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^n \ln\left(\frac{1}{y}\right) / y = \frac{1}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^n} x - \ln y = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\ln y}{y^n} \\ &= 0^- \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) ; y = \frac{1}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} -\ln(y) = -\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0^+ / y = \ln x$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0^- / y = \ln x$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \\ &= (\ln x)'_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$h = x - 1 \quad \text{عوض}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$$

$$(\ln u)' = (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\ln |u|)' \begin{cases} \rightarrow u > 0 : (\ln u)' = \frac{u'}{u} \\ \rightarrow u < 0 : (\ln -u)' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} \end{cases}$$

Equations fonctionnelles

دوال تحول مجموع الجداء:

الدوال غير المعدومة f والقابلة للاتفاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق من أجل كل عددين حقيقيين x, y

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

هي الدوال

$$x \mapsto e^{kx}; k \in \mathbb{R}$$

دوال تحول الجداء لمجموع:

كمثال عن هذه الدوال نأخذ الدوال
 $\dots, \log_a x, \log x, \ln x$

$$\ln(axb) = \ln a + \ln b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left(x + \frac{1}{x}\right)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{y} \ln(1+y)} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{بحيث}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e$$

2/ اثبات خواص أخرى لـ e^x و $\ln x$:

$$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = e^{\frac{x}{2} \times 2} = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) = e^x$$

$$\exp x = \exp(1 \times x) = (\exp 1)^x$$

$$\exp 1 = e = 2.718 \dots$$

$$\exp x = e^x \quad \text{اذن}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(1) = 1$$

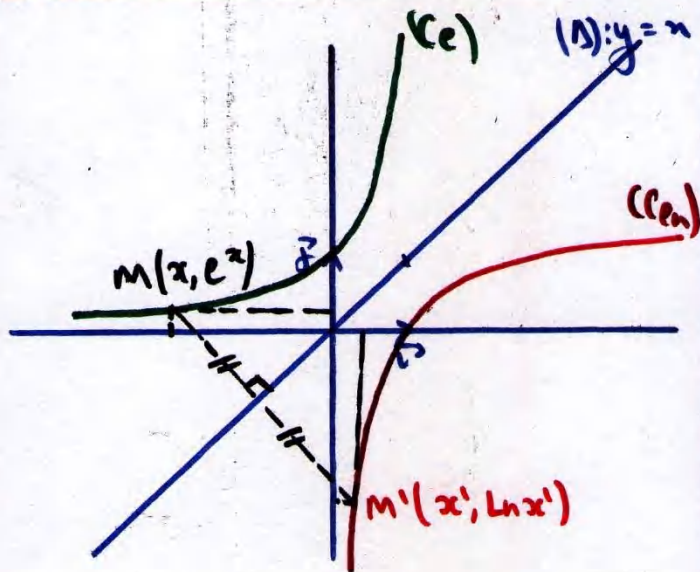
$$\begin{aligned} f(x) = e^{\ln x} &\Rightarrow f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x} \\ &= (\ln x)' \times x \end{aligned}$$

$$(\ln x)' \times x = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

15 اثبات بعض التناظرات:

(C_e) و $(C_{\ln})$ متناظران بالنسبة للمنهف الأول



$$M'(b, a) \in (C_{\ln}) \iff M(a, b) \in (C_e)$$

برهان:

$$b = e^a \iff M(a, b) \in (C_e)$$

$$\ln b = a$$

$$M(b, a) \in (C_{\ln}) \iff$$

اذن لكل نقطة $M(a, b) \in (C_e)$ نقطة أخرى $M'(b, a) \in (C_{\ln})$

اثبات ان M' نظيرة M بالنسبة للمنهف الثاني

$$M(a, b) / M'(b, a) / \overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$(\Delta): y = x / \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = (b-a) + (a-b) = 0$$

اذن (Δ) عمودي على (MM')

$$\text{لتكن } I \text{ منتصف } [MM'] \text{ متصف } [MM'] \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2} \right)$$

$$x_I = y_I \Rightarrow I \in (\Delta)$$

اذن (Δ) محور $[MM'] \iff M'$ صورة M بالنسبة لـ (Δ)
 $\iff$ لكل M من (C_e) صورة M' من $(C_{\ln})$ تناظرهما (Δ)
 بالنسبة للمنهف الاول $\iff (C_e)$ و $(C_{\ln})$ متناظران بالنسبة للمنهف الاول.

3 الدوال العكسية:

f	f^{-1}
e^x	$\ln x$
a^x	$\log_a x$
10^x	$\log x$
x^n	$\sqrt[n]{x}$

$$* f[f^{-1}(x)] = x$$

(C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متناظران بالنسبة للمنهف الاول $(\Delta): y = x$

4 نظرية عن الدالة الجذر النوني:

* مجموعة التعريف: $[0, +\infty[$

* العبارة: $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x} \quad x \neq 0$$

* الاشتقاقية:

f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ (غير قابلة للاشتقاق عنده) وبالتالي المشتقة f'

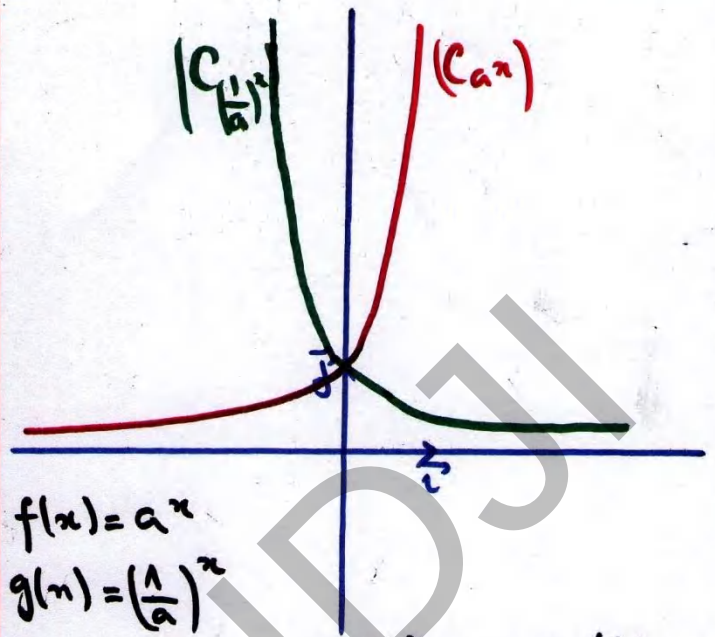
$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx} e^{\frac{1}{n} \ln x}$$

$$* f'(x) > 0$$

* الدالة الجذر النوني متزايدة قاطبة على $[0, +\infty[$

* امصلا ما: $f(0) = 0$

$(C_a)^n$ و $(C_{\frac{1}{a}})^n$ متناظران بالنسبة لـ $(\frac{1}{y})$



$$f(x) = a^x$$

$$g(n) = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$g(n) = \left(\frac{1}{a}\right)^n = e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)^n} = e^{n \ln\left(\frac{1}{a}\right)} \\ = e^{-n \ln a} = e^{\ln a^{-n}} = a^{-n} = f(-n)$$

$$g(n) = f(-n) \Leftrightarrow (f) \text{ انظير } (g) \text{ بالنسبة لـ } \left(\frac{1}{y}\right)$$

6/ دوال تغول دراستها لدراسة دوال اية:

• الدالة نجيب الزائدية:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ ب:}$$

• دالة زوجية .

• الدالة جب الزائدية:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ ب:}$$

• دالة فردية .

N.B. : عند $+\infty$: (C_{sh}) و (C_{ch})

منحنيان متقاربان .

الدوال الأصلية

الدوال الأصلية

1/ مفهوم الدالة الأصلية:

F دالة أصلية لـ f على مجال I معناه:

F قابلة للاشتقاق على I

$$F'(x) = f(x) \leftarrow$$

مثال:

$$f(x) = 2x - 3, \quad F(x) = x^2 - 3x + 1$$

بين أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

2/ مجموعة الدوال الأصلية لدالة:

f تقبل دوالاً أصلية على مجال I وإذا وفقط إذا كانت مستمرة على هذا المجال

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على مجال I فإن كل الدوال $F + C$ هي دوال أصلية لـ f على I

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f والتي نتحقق من $F(x_0) = y_0$

مثال:

$$f(x) = 2x + \cos x$$

• أثبت أن f تقبل دوالاً أصلية على $\mathbb{R}$

• عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f

• عين الدالة الأصلية لـ f والتي

$$F(\pi) = -1 \text{ نتحقق}$$

لأثبت أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة، نوجد طريقتان:

F و G قابلتان للاشتقاق على I

$$F'(x) = G'(x) \text{ و}$$

$$F(x) - G(x) = C^{\text{te}} \leftarrow$$

مثال:

$$G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x \quad F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2}$$

أثبت أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

3/ الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

دوال عددية:

f	F
a	$ax + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
ex: x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$\frac{1}{x^n}, n \neq -1$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
ex: $\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C, x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C, x > 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C, x > 0$

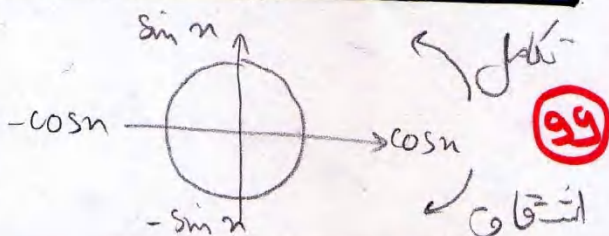
14 عمليات على الدوال الأصلية:

f	F
$u' u^{n, n \neq -1}$ ex: $u' u$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $\frac{u^2}{2} + C$
$\frac{u'}{u^n}, n \neq 1$ ex: $\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{(n-1) u^{n-1}} + C$ $\frac{-1}{u} + C ; u \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C ; u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C ; u > 0$
$u' e^u$	$e^u + C$

$u' + v'$	$u + v + C$
$k \cdot u'$	$k \cdot u + C$

$u' \cdot v'$	$u \cdot v$	⚠ jamais
$\frac{u'}{v'}$	$\frac{u}{v}$	

N.B : لايجاد الحالة الأصلية لجداء دالتين، نستخدم التكامل بالتجزئة في بعض الأحيان (voir Apres).



دوال مثلثية:

f	F
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$

دوال أسية ولوغاريتمية:

f	F
e^x	$e^x + C$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x$ تجزئة	$x \ln x - x + C$
$\ln(ax+b)$ تجزئة	$\frac{1}{a} (ax+b) \ln(ax+b) - x + C$
$\frac{\ln(x+d)}{x+d}$	$\frac{1}{2} [\ln(x+d)]^2 + C$
$\frac{1}{x \ln x}, \frac{u'}{u}$	$\ln[\ln x] + C$
$\frac{a}{(ax+b) \ln(ax+b)}$	$\ln[\ln(ax+b)] + C$
قواعد تكامل لا تبرز بالتجزئة	

15 / تقنيات لإيجاد الدوال الأصلية:

1/ اظهار أحد الأشكال $u' u^n$, $\frac{u'}{u^n}$... وذلك بالضرب والقسم في اعداد معينة:

$$f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (2x+2)(x^2+2x+5)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} u' u^2 \text{ tq: } u(x) = x^2+2x+5$$

$$F(x) = \frac{1}{6} (x^2+2x+5)^3 + C$$

$$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{2} \times \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$g(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$\text{tq } u(x) = x^2+1$$

$$G(x) = 3\sqrt{x^2+1} + C$$

2 / تغيير شكل الدالة في التقرين قبل حساب دالتها الأصلية:

مثال: f دالة معرفة على $[-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$$

$$f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$$

نثرجه دالة أصلية للدالة f.

3/ دوال ناطقة:

يجب ان نغير شكلها كما يلي:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{a'x+b'}$$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x+a}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{\alpha}{g(x)} + \frac{\beta}{h(x)}$$

4 / دوال مثلثية:

$$\cos u \times \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u-v) + \cos(u+v)]$$

$$\sin u \times \sin v = \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

$$\sin u \times \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u-v) + \sin(u+v)]$$

$$\sin^n x \cos^m x, \cos^n x, \sin^n x$$

نحول العبارة الى الشكل $u' u^n$ وذلك باستعمال الدساتير التالية:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos 2x]$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos 2x]$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ (تأديرا)}$$

15 / إيجاد علاقة بين f و f' و f'':

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

$$\text{تحقق أن } f(x) - 2f'(x) + f''(x) = 4e^x$$

عين دالة أصلية لـ f.

$$F(x) = 2f(x) - f'(x) - 4 \int e^x$$

$$F(x) = 2f(x) - f'(x) - 4e^x + C$$

$$+ f(x) = \cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$$

$$- f(x) = \cos^2 x \sin x = -u^2 u'$$

$$+ f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$$

$$= (\sin x \cos x)^2 \cos x$$

$$= [\sin^2 x (1 - \sin^2 x)] \cos x$$

$$- f(x) = \sin^4 x = (\sin^2 x)^2$$

$$= \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right]^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right]$$

$$+ f(x) = \cos 2x \cdot \cos 4x$$

$$- f(x) = \sin 3x \cdot \sin x$$

$$- f(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x$$

$$- f(x) = \cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$= \frac{1}{4} (1 - \cos 2x) (1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right]$$

6/ دراسة دالة أصلية دون حسابها:

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$	$F(a) = b \leftarrow$
$F(a) = 0$	$f(x) = \dots \leftarrow$

الهدف دراسة تغيرات F دون حسابها.

تمارين:

ص 154 / ص 181 / ص 91 ص 69

100

6/ تطبيقات:

عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f في كل حالة

$$+ f(x) = (x^2 + 3)(2x - 1)$$

$$+ f(x) = x - \frac{3}{x}$$

$$+ f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$+ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$- f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2}$$

$$- f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$- f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$$

$$- f(x) = \frac{1}{x} \ln^2 x$$

$$- f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$- f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}}$$

$$- f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 9}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= 2 + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

$$- f(x) = \frac{2x^4 + 13x^2 + x + 18}{(x+1)(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2}{x+1} + \frac{x}{(x^2+3)^2}$$

$$+ f(x) = \cos^2(2x) = \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)$$

$$+ f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x = u^3 u'$$

$$- f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$- f(x) = \frac{3}{x+1}$$

$$+ f(x) = 4 \sin 2x + 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$- f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$$

$$- f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

$$- f(x) = \frac{2 \cos x}{\sin x}$$

$$- f(x) = \frac{1}{(x+1)^n}$$

$$- f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}$$

$$- f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$- f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-4}$$

$$- f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية .

الحل

$$1/ y = C e^{\frac{2}{3}x}$$

$$2/ y = C e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$3/ y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x$$

3/ معادلات تفاضلية باستعمال الدوال الأصلية

f دالة مستمرة على I و F دالتها الأصلية
 F دالة مستمرة على I و G دالتها الأصلية.

المعادلة التفاضلية	الحل العام
$y' = f(x)$	$y = F(x) + C$
$y'' = f(x)$	$y = G(x) + C_1 x + C_2$

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$1/ y' = \frac{1}{x^2}$$

$$2/ y'' = \sin x$$

الحل

$$1/ y = -\frac{1}{x} + C$$

$$2/ y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

4/ معادلات تفاضلية تحتوي y, y', y'' دالة f

المعادلة التفاضلية	الحل العام
$y' - ay = f(x)$	$y = C e^{ax} + \text{الحل الخاص}$

تحقق أن a حل خاص؟ عين a و حتى تكون a حل خاص

1/ مفهوم معادلة تفاضلية

* نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة
تحتوي على $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$
حيث $y = f(x)$ و $y', y'', \dots, y^{(n)}$
هي المشتقات المتعاقبة للدالة f .

* المجهول في المعادلات التفاضلية هو
الدالة $y = f(x)$

* مجموعة حلول المعادلة التفاضلية
هي كل الدوال التي تحقق هذه المعادلة
التفاضلية.

2/ معادلات تفاضلية تحتوي y, y', y'' فقط

المعادلة التفاضلية	الحل العام
$y' = ay; a \neq 0$	$y = C e^{ax}$
$y' = ay + b; a \neq 0$	$y = C e^{ax} - \frac{b}{a}$
$y'' = -w^2 y$	$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$1/ 3y' - 2y = 0$$

$$2/ 2y' + y = 1$$

$$3/ y'' + \pi^2 y = 0$$

102

مثال:

$$(E): y' + 2y = 6x - 1$$

1/ تأكد ان $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ (E)

ب- عين $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى والذي هو حل خاص للمعادلة (E)

2/ بين ان y حل للمعادلة (E) معناه

$$z = y - p \text{ حل للمعادلة التالية}$$

$$(E'): z' + 2z = 0$$

3/ حل للمعادلة (E')

4/ بين ان حلول المعادلة (E) تكتب

$$y = z + p$$

5/ استنتج حلول المعادلة (E)

الحل:

السؤال 1/ P

P حل لـ (E) معناه $p' + 2p = 6x - 1$ ؟!

$$p'(x) + 2p(x) = 3 + 2(3x - 2)$$

$$= 3 + 6x - 4$$

$$= 6x - 1$$

محققة

اذن $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ (E).

السؤال 2/ ب: ايجاد $p(x)$

$p(x) = ax + b$ حل لـ (E) معناه

$$p'(x) + 2p(x) = 6x - 1$$

$$a + 2(ax + b) = 6x - 1$$

$$a + 2ax + 2b = 6x - 1$$

$$(2a)x + (a + 2b) = 6x - 1$$

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow p(x) = 3x - 2$$

السؤال 2/:

$$y \text{ حل لـ (E): } y' + 2y = 6x - 1$$

$$p \text{ حل خاص لـ (E): } p' + 2p = 6x - 1$$

$$\text{بالطرح نجد: } y' - p' + 2y - 2p = 0$$

$$(y - p)' + 2(y - p) = 0$$

نسمي $z = y - p$ ، منه فان

$$z = y - p \text{ حل للمعادلة } z' + 2z = 0 \text{ (E')}$$

السؤال 3/:

$$(E'): z' = -2z \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

السؤال 4/ اثبات ان $y = z + p$

لدينا $z = y - p$ اذن $y = z + p$.

السؤال 5/ حلول المعادلة (E):

حلول المعادلة (E) هي $y = z + p$

$$\begin{cases} z = Ce^{-2x} \\ p = 3x - 2 \end{cases} \text{ حيث}$$

$$y = Ce^{-2x} + 3x - 2 \text{ اذن}$$

5/ تعيين حل خاص بمعرفه الحل العام ونشرط

* كل معادلة تفاضلية تقبل لا نهاية من الحلول

التي لها نفس الشكل المشترك (الحل العام)

* بتغير الثوابت $C_1, C_2, \dots$ نحصل على حلول مختلفة.

* في بعض الأحيان يضاف الى المعادلة

التفاضلية شرط من اجل تعيين الثابت C

وايجاد الحل الخاص.

* عدد الثوابت المجهولة = عدد الشروط المعطاة

103

6/ تمارين

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية

1/ $y' = x^3 + 3x^2 - 2$

2/ $y' = e^{2x+1} + \frac{x}{x^2+1}$

3/ $y' = 2\cos^2 x + \sin 2x$

4/ $y'' = -3x^2 + 2x + 1$

5/ $y'' = x + 1 + e^{-x}$

6/ $y'' = 2\sin^2 x + 2x$

7/ $(x^2+1)y' = x$ / $y(+2) = \ln 10$

8/ $y' - 2y = 0$ / $y(1) = e^2$

9/ $y'' = -y$

10/ $y'' + 4y = 0$

تمرين 2:

(E)... $y' + y = \sin 2x$

عين a و b حتى تكون الدالة u حل خاص لـ (E) حيث $u(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ ثم عين الحل العام لـ (E) والحل الخاص من أجل: $y(0) = \frac{1}{2}$

تمرين 3:

(E): $2y' - y + 2 = 0$

برهنا أن (E) تقبل الدالة الثابتة كحل. خاص ثم جد الحل العام لـ (E).

عين الحل الخاص الذي يحقق $y(0) = 3$

أمثلة:

1/ عين الحل الخاص للمعادلة $2y' + y = 1$ حيث $y(-1) = 2$

2/ عين الحل الخاص لـ $y'' + \pi^2 y = 0$ حيث $y(\frac{2}{3}) = 0$ و $y(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

الحل:

السؤال 1:

$y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1 \Leftrightarrow 2y' + y = 1$

$\begin{cases} y(-1) = Ce^{\frac{1}{2}} + 1 \\ y(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ce^{\frac{1}{2}} + 1 = 2 \\ \Rightarrow C = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$

اذن

السؤال 2:

$\begin{cases} y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x \\ y' = -\pi C_1 \sin \pi x + \pi C_2 \cos \pi x \end{cases}$

$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = C_2 \\ y'(\frac{2}{3}) = -\pi C_1 (\frac{\sqrt{3}}{2}) + \pi C_2 (-\frac{1}{2}) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{3} = C_2 \\ 0 = -\pi C_1 (\frac{\sqrt{3}}{2}) + \pi C_2 (-\frac{1}{2}) \end{cases}$

$\begin{cases} C_2 = \frac{2}{3} \\ C_1 = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$

$y = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \cos \pi x + \frac{2}{3} \sin \pi x$ اذن

الحساب التكاملي

(حساب التكامل)

2/ خواص التكامل

* من التعريف:

$$\begin{aligned} * \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ * \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ * \int_a^b k \cdot dx &= k(b-a) \\ \text{N.B: } \int_a^b dx &= (b-a) \end{aligned}$$

* علاقة شال:

$$* \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

* خطية التكامل:

$$\begin{aligned} * \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ * \int_a^b k f(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

* شفعية دالة:

$$\begin{aligned} * \int_{-a}^a f(x) dx &= 0 \Leftrightarrow f \text{ فردية} \\ * \int_{-a}^a f(x) dx &= 2 \int_0^a f(x) dx \\ &\Leftrightarrow f \text{ زوجية} \end{aligned}$$

1/ تعريف التكامل: "المحدد"

f دالة مستمرة على مجال [a, b] و F دالة أصلية لها على هذا المجال (أي دالة أصلية)

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

التكامل من a إلى b لـ f(x) تفاضل x (a هو الحد الأسفل و b الحد الأعلى)

أمثلة: احسب التكاملات التالية:

$$\begin{aligned} 1/ \int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx & \quad 4/ \int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 1) dx \\ 2/ \int_0^1 e^{2x-1} dx & \quad 5/ \int_{\ln 2}^3 \frac{e^x}{e^x + 3} dx \\ 3/ \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx & \quad 6/ \int_0^1 (2x + e^{-x+1}) dx \end{aligned}$$

الحل:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx = \left[-x^3 + x \right]_{-1}^2 \\ &= (-2^3 + 2) - (-(-1)^3 - 1) \\ &= -6 - 0 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= (-\cos \pi) - (-\cos -\pi) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

* استقلالية حساب التكامل المحدود عن اختيار الدالة الأصلية

f دالة متمرة على $[a, b]$
 H, G, F دوال أصلية لـ f على $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = [G(x)]_a^b$$

$$= [H(x)]_a^b = \dots$$

مثال: احب
 $\int_0^2 f(x) dx$ حيث
 $f(x) = 2x + 2$

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + 2x \\ G(x) &= x^2 + 2x + 100 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = [x^2 + 2x]_0^2$$

$$= (2^2 + 2 \times 2) - (0^2 + 2 \times 0)$$

$$= 8$$

$$I = \int_0^2 f(x) dx = [G(x)]_0^2 = [x^2 + 2x + 100]_0^2$$

$$= (2^2 + 2 \times 2 + 100) - (0^2 + 2 \times 0 + 100)$$

$$= 8$$

* التكامل غير المحدود:

$$* \int f(x) dx = F(x) \iff \int f' = f \iff \int f'' = f'$$

مثال:

$$\int (2x + 2) dx = x^2 + 2x + c$$

* اشارة التكامل + المقارنة:

x عدد كفي من المجال $[a, b]$

$$f(x) \geq 0 : \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$f(x) < g(x) : \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

* المتغير عند حساب التكامل:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt \dots$$

المتغير عند اجراء التكامل او
 الاشتقاق هو x وما سواه
 من الأحرف يعتبر ثابتا

مثال:

$$\begin{aligned} * \int_0^2 (2x + 2) dx &= [x^2 + 2x]_0^2 = 8 \\ * \int_0^2 (2t + 2) dt &= [t^2 + 2t]_0^2 = 8 \\ * \int_0^2 \underbrace{(2x + 2)}_{cte} dt &= (2x + 2)(2 - 0) = 4x + 4 \\ * \int_0^2 (2x) dx &= [x^2]_0^2 = 4 \\ * \int_0^2 2x dy &= 2x [y]_0^2 = 4x \\ * \int_0^2 (2x + t) dt &= \left[(2x)t + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 \\ &= 4x + 2 \end{aligned}$$

$$I = \int_{-3}^3 f(x) dx = S \begin{pmatrix} x = -3 ; x = 3 \\ y = 0 ; y = f(x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(2+1) \times 3}{2} + \frac{(3+2) \times 2}{2}$$

$$= \frac{19}{2} \text{ u.d. (u.d. = 1cm} \times \text{1cm)} \\ = \frac{19}{2}$$

التكامل = المساحة مكتوبة بالوحدة u.d

فكرة ③ ايجاد تكامل معرفة تكاملات أخرى

مثال ①: $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx, I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

احب I, $I+J$, واستنتج J

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I+J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$J = (I+J) - I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$J = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

مثال ②: $J = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, I = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

احب I و J

3/ تقنيات لحساب التكامل

1/ باستعمال خواص التكامل

فكرة ①: علاقة مثال (في حال وجود قيمة مطلقة)

① احب $I = \int_0^3 |x^2-1| dx$

من أجل كل x من $[0; 1]$: $x^2-1 \leq 0$

$$|x^2-1| = -x^2+1$$

من أجل كل x من $[1; 3]$: $x^2-1 \geq 0$

$$|x^2-1| = x^2-1$$

$$I = \int_0^3 |x^2-1| dx = \int_0^1 |x^2-1| dx + \int_1^3 |x^2-1| dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2+1) dx + \int_1^3 (x^2-1) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2-1) dx + \int_1^3 (x^2-1) dx$$

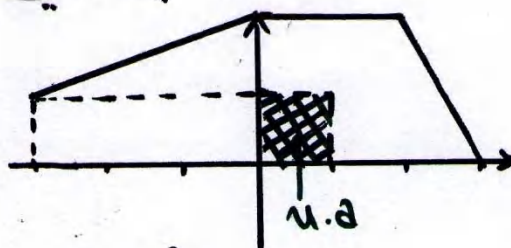
$$= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3$$

$$= \frac{2}{3} + 6 - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{22}{3}$$

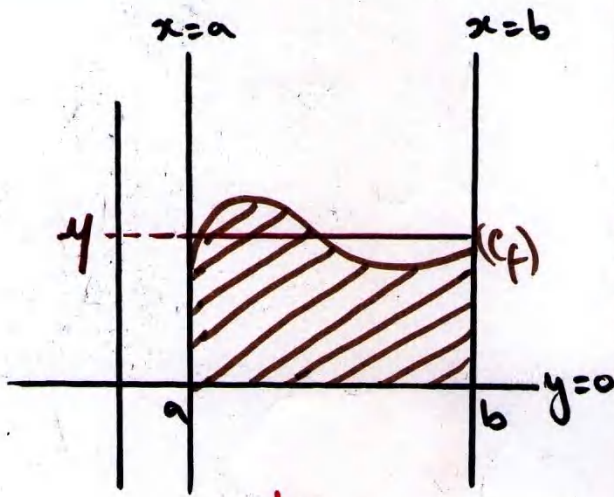
② بنفس الطريقة احب $\int_0^6 |x^2-4x| dx$

فكرة ②: العلاقة بين التكامل والمساحات

f دالة متشابهة البياني كمايلي



احب $I = \int_{-3}^3 f(x) dx$



$$y(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

③ حصر القيمة المتوسطة

① إذا كان $m \leq f(x) \leq M : \forall x \in [a, b]$
 $\uparrow$ minorant $\uparrow$ Majorant

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

② إذا كان $|f(x)| \leq m : \forall x \in [a, b]$

$$-m \leq f(x) \leq m$$

$$m(a-b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a)$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt \quad \text{④ تطبيق رقمه}$$

بما أننا لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لـ I لكن يمكن إيجاد حصر له.

$$0 < \frac{1}{t^2+1} \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1] \text{ فإن}$$

2. اوجد حصر لـ I.

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} (\cos 2x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} I+J = \frac{\pi}{4} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{\pi+2}{8} \\ J = \frac{\pi-2}{8} \end{cases}$$

2/ باستعمال القيمة المتوسطة

① تعريف

f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ ، القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a, b]$ هي:

$$y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

② التفسير البياني

y هي ارتفاع المستطيل الذي

← قاعدته b-a

← له نفس المساحة المعصورة

بين x=a و x=b و y=0 والمنحني f(x)

3/ المكاملة بالتجزئة

مبرهنة

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

برهان

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \int_a^b (uv)' dx &= \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx \\ [uv]_a^b &= \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx \\ \int_a^b u \cdot v' dx &= [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx \end{aligned}$$

طريقة اختيار u و v'

$$\begin{cases} u = \text{اللوغاريتمية} \\ u' = \text{الأيبة / الجيبية} \end{cases} \quad \begin{cases} v' = \text{اللوغاريتمية} \\ v = \text{الأيبة / الجيبية} \end{cases}$$

أمثلة عن المكاملة بالتجزئة في التكامل غير المحدود (لحساب الدوال الأصلية)

$$\int \ln x dx \quad \int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$\ln x$ من $x \ln x - x$ دالة أصلية لـ $\ln x$

تطبيق رقم 2

$$f(x) = \frac{x e^x}{1 + e^x}$$

بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$\frac{e^x}{1 + e^x} \leq f(x) \leq x$$

$$I = \int_0^2 f(x) dx \quad \text{استنتج حصره:}$$

تطبيق رقم 3

دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + \ln(x+1)$$

ادرس اتجاه تغير f على المجال $[0; e-1]$

$$\begin{aligned} &\text{استنتج حصره } f \\ &\text{استنتج حصره } I = \int_1^{e-1} f(x) dx \end{aligned}$$

تطبيق رقم 4

f الدالة المعرفة على $[-1; 1]$ بـ $f(x) = x^2$
احسب القيمة المتوسطة لـ f على المجال $[-1; 1]$ ، فربانيا.

أمثلة عن المكافحة بالتجزئة في التكامل المحدود

$$I = \int_0^1 x e^n$$

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^n \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^n \end{cases}$$

$$I = [x e^n]_0^1 - \int_0^1 e^n$$

$$I = [x e^n]_0^1 - [e^n]_0^1$$

$$I = e - (e - e^0)$$

$$I = 1$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x$$

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x$$

$$J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$J = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

احب بالتجزئة، الشكاملات التالية

1/ $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$	4/ $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} \, dx$
2/ $\int_1^0 (x+1) e^x \, dx$	5/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3x+2) \sin 2x \, dx$
3/ $\int_1^2 (x^2+x) \ln x \, dx$	6/ $\int_0^1 x(e^x - e^{-x}) \, dx$
	7/ $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x \cos 4x \, dx$

$$\bullet \int \ln(x+a) \, dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(x+a) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x+a} \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(x+a) \, dx = x \ln(x+a) - \int \frac{x}{x+a}$$

$$= x \ln(x+a) - \int \left(1 - \frac{a}{x+a}\right) \, dx$$

$$= x \ln(x+a) - \int dx + a \int \frac{1}{x+a} \, dx$$

$$= x \ln(x+a) - x + a \ln(x+a)$$

$$= (x+a) \ln(x+a) - x + C$$

$$\bullet \int \ln(x+a) \, dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(x+a) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x+a} \\ v = x+a \end{cases}$$

$$\int \ln(x+a) \, dx = (x+a) \ln(x+a) - \int dx$$

$$= (x+a) \ln(x+a) - x + C$$

$$\bullet \int \ln(ax+b) \, dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{a}{ax+b} \\ v = x + \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\int \ln(ax+b) \, dx = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - \int dx$$

$$= \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x$$

AMO

14 حساب التكامل بتبديل المتغير

مثال ①:

احسب $I = \int_0^4 \sqrt{x} dx$

• نتعمل تبديل المتغير:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

نضع $\sqrt{x} = t$ أي $x = t^2$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=4 \Rightarrow t=2$$

dx يجب تعويضها بـ $2t dt$

نشتق بالنسبة لـ x نشتق بالنسبة لـ t

$$dx = 2t dt$$

$$I = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^2 t \cdot 2t dt$$

$$= \int_0^2 2t^2 dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

• طريقة أخرى:

$$I = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

أمثلة عن استعمال التكامل بالتجزئة مرتين

$$* \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ u' = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} v' = 2x \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx$$

$$J = \int_0^1 x e^x dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ u' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$$

$$J = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2J$$

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2[x e^x]_0^1 + 2[e^x]_0^1$$

$$I = e - 2$$

$$1. \int_0^{\pi} (x^2 + 2x) \sin x dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x dx$$

$$3. \int_1^e (\ln x)^2 dx$$



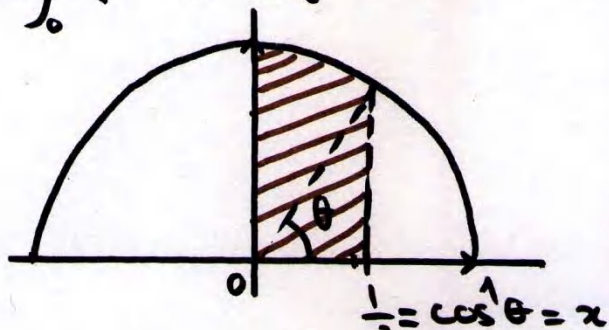
$$I = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right)$$

$$I = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

الاجابة هندسيا:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$



$$I = S = S_{\Delta} - S_{\Delta} + S_{\Delta}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{\Delta} : 90^{\circ} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\theta \rightarrow S_{\Delta}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\pi}{4} \frac{\theta^{\circ}}{90^{\circ}} = \frac{\pi}{4} \frac{\cos^{-1} x}{90} = \frac{\pi}{6}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\cos \theta \times \sin \theta}{2} = \frac{\cos \theta \sqrt{1-\cos^2 \theta}}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{1-\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

او

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

نستعمل تبديل المتغير:

$$t = \cos^{-1}(x) \text{ ف } x = \cos t$$

نضع

$$x=0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$dx = -\sin t dt$$

$$x = \cos t$$

$$1 dx = -\sin t dt$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 t} x - \sin t dt$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sin^2 t} x (-\sin t) dt$$

$$\sin t > 0 : \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{3}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (+\sin t)(-\sin t) dt$$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt$$

تغيير كتابة $\sin^2 t$:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\cos 2t = 1 - \sin^2 t - \sin^2 t$$

$$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-\cos 2t)}{2} dt$$

او

$$I = -\frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}$$

① أ حسب التكمالات التالية :

$\int_0^1 \frac{dt}{4+t^2}$	$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$\int_1^2 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$	$\int_1^2 (x + \frac{1}{x^2}) dx$	$\int_0^1 x\sqrt{3+x^2} dx$
$\int_0^1 \frac{x}{2+x^2} dx$	$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$	$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$	$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4} dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}}$	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$
$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$	$\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2+1} dx$	$\int_0^1 x(2+x^2)^4 dx$	$\int_0^1 \frac{t+1}{t-2} dt$	$\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2} dt$	$\int_0^2 2x-1 ^3 dx$
$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x} \cos x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
$\int_0^1 e^x \sqrt{1+e^x} dx$	$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx$	$\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx$	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$	$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$

② باستعمال مكاملة با لاجزاء أ حسب التكمالات التالية :

$\int_2^3 \ln(\frac{x-1}{x+1}) dx$	$\int_1^2 x \ln(x+1) dx$	$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx$	$\int_1^2 \ln(x+2) dx$	$\int_1^e \ln x dx$
$\int_{\sqrt{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$	$\int_0^1 (x^2-2x+3)e^x dx$	$\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$	$\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$	$\int_0^1 xe^x dx$
$\int_0^1 \frac{-2x^3}{(x^2+1)^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$	$\int_0^2 x\sqrt{2-x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-1) \sin x dx$
$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$\int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$	$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(1+\tan^2 x) dx$	

③ باستعمال مكاملة بتغيير المتغير أ حسب التكمالات التالية :

$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ ($t=e^x$)	$\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ ($t=\sqrt{x+1}$)	$\int_5^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2} dx$ ($t=\sqrt{x-1}$)	$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ($t=1+\sqrt{x}$)	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ ($t=\sqrt{e^x-1}$)
$\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{(e^x-1)\sqrt{e^x-2}} dx$ ($t=\sqrt{e^x-2}$)	$\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x+2} dx$ ($t=\sqrt{x+2}$)	$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ ($t=\sqrt{x-1}$)	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ ($t=\frac{1}{x}$)	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ ($t=\frac{x+1}{2}$)

تطبيقات التكامل

2/ حساب المساحات

$$S = \int_{a \rightarrow b}^{\text{يمين}} (\text{أعلى} - \text{أسفل}) dx$$

يسار

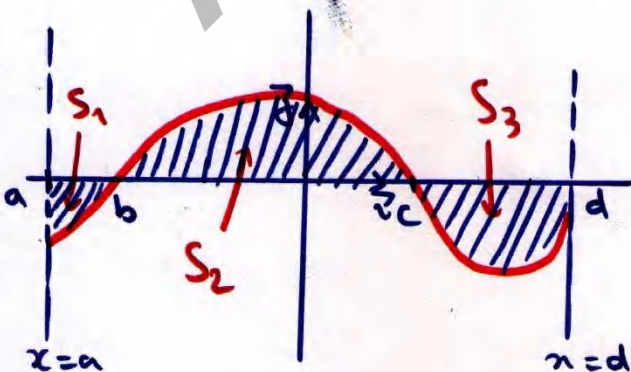
* طرح الأسئلة:

س1: احب المساحة من المستوى المحصور
 بين (C_f) و (C_g) المستقيمتين (a) و (b)
 والمتقيمتين $x=a$ و $x=b$

س2: احب مساحة الجير من المستوى
 المعروف بمجموعة النقط $M(x, y)$
 حيث $a \leq x \leq b$ و $f(x) \leq y \leq g(x)$
 لدراية الوضع
 النقيض والاشارة

f دالة متمرة على $[a, b]$ و $(a \leq b)$ و (C) قتيبيها
 البياني في معلم متعامد (ليس شرط متجانس)

1) المساحة المحددة ب (C) ، محور الفواصل
 والمتقيمتان $x=a$ و $x=b$



4/ تطبيقات التكامل

1/ الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل
 قيمة معلومة مسبقا

الطريقة التقليدية:

* نعين الدالة الأصلية ل f باستعمال
 قواعد الدوال الأصلية

* نعين الثابت C من الشرط $F(a)=0$

الطريقة الثانية باستعمال التكامل:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

مثال:

عين الدالة الأصلية للدالة $\ln x$ والتي
 تنعدم عند 1:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \ln t dt$$

$$\begin{cases} u = \ln t \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{t} \\ v = t \end{cases}$$

$$F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x dt$$

$$F(x) = [t \ln t]_1^x - [t]_1^x$$

$$F(x) = x \ln x - \ln 1 - x + 1$$

$$F(x) = x \ln x - x + 1$$

ندرس إشارة f ونميز 3 حالات:

$f(x) > 0$ L_1

$$S_2 = \int_b^c f(x) dx$$

$f(x) \leq 0$ L_2

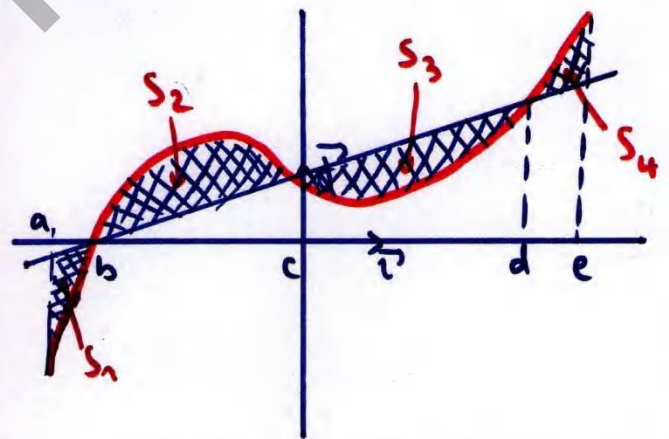
$$S_1 = \int_a^b -f(x) dx$$

$$S_3 = \int_c^d -f(x) dx$$

L_3 تغير إشارة f :

$$S = \int_a^b -f(x) dx + \int_b^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx$$

② المساحة المحددة بـ (C) ، مستقيم $y = dx + \beta$ والمنحنيات $n=a$ و $n=b$



* ندرس الوضع النقيض بين (C) و (A) ونميز 3 حالات:

$f(x) > dx + \beta$ (فوق) L_1

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - (dx + \beta)) dx$$

$$S_4 = \int_d^e (f(x) - (dx + \beta)) dx$$

$f(x) < dx + \beta$ (تحت) L_2

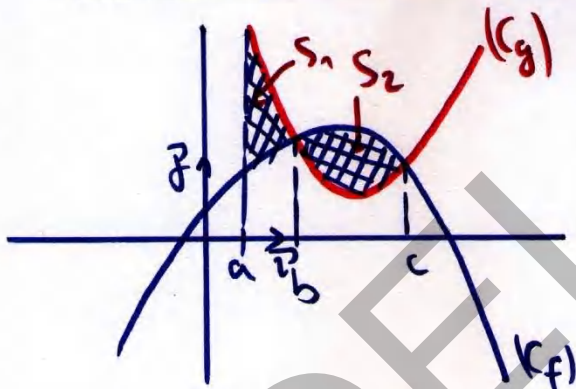
$$S_1 = \int_a^b (dx + \beta - f(x)) dx$$

$$S_3 = \int_c^d (dx + \beta - f(x)) dx$$

L_3 الوضع النقيض يتغير:

$$S = \int_a^b (dx + \beta - f(x)) dx + \int_b^c (f(x) - (dx + \beta)) dx + \int_c^d (dx + \beta - f(x)) dx + \int_d^e (f(x) - (dx + \beta)) dx$$

③ المساحة المحددة بـ (C_f) ، (C_g) والمنحنيات $n=a$ و $n=b$



* ندرس الوضع النقيض بين (C_f) و (C_g) :

$f(x) > g(x)$ (فوق) L_1

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

$f(x) \leq g(x)$ (تحت) L_2

$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

L_3 الوضع النقيض يتغير:

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

④ * ملاحظات هامة جدا:

في كل ما سبق حسنا d_n (انزل - اعل) $\leftarrow$ حيث a عدد معطى في التمرين a

$\leftarrow$ عوض a حيث a هو العدد

الذي يحقق $g(n)=0, \dots$ السؤال يكون كما يلي:

① احس $A(a)$ بدلالة a !

② بين ان $A(a) = \dots$ (هنا نزل)

ثم احصر $A(a)$ لنصل للنتيجة

$\leftarrow$ n بقل a : حيث n عدد طبيعي أكبر من $a \dots$ والسؤال كما يلي:

① احس $A(n)$ بدلالة n .

② نعرف المتتالية $u_n = A(n)$

احس $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$

③ عين n حتى يكون $A(n) > 8$ أو $A(n) \leq 6$ مثلا $\dots$

④ بعد حساب المساحة بالتكامل نجدها

بوحدة $u.d$.

$$1 u.d = \parallel \vec{i} \parallel \cdot \parallel \vec{j} \parallel$$

⑤ * تطبيقات

تمرين ①:

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب:

$$f(n) = x + 2 + \frac{\ln n}{n}$$

١. اوجدان (١) ذوالمعادلة $y = x + 2$
م م م ل - (٢) عند $x = 0$

٢. ادرس وضعية (٢) بالنسبة لـ (١)

٣. احس S المساحة المحددة بـ (٢)

$$y = x + 2, \quad x = \frac{1}{e}, \quad x = e$$

تمرين ②:

احس مساحة العيز من المستوى المحرف

$$1 \leq x \leq 3$$

$$3x + 1 \leq y \leq 2x^2 + x + 5$$

تمرين ③:

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي:

$$f(n) = 1 - \frac{\ln x^2}{n}$$

$$y = 1$$

١. ادرس تغيرات f

٢. ادرس الوضع انبي لـ (٢) و (١)

٣. بين ان $f(n) = 0$ تقبل حلا a حيث $-\frac{1}{2} < a < -1$

٤. احس $A(a)$ مساحة العيز من المستوى

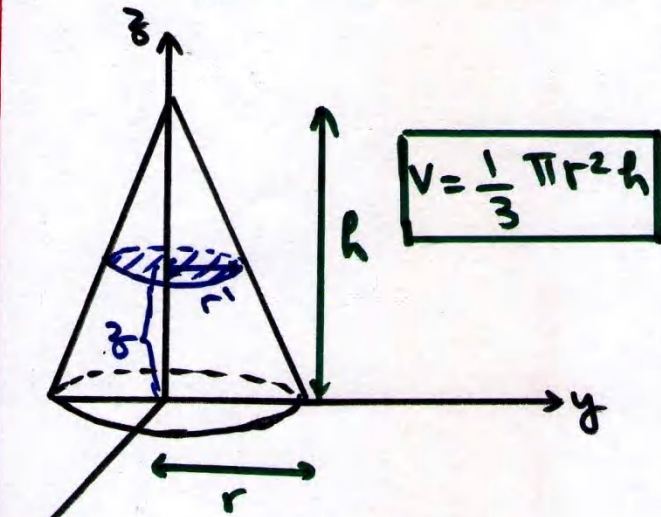
المحدد بـ (٢), (١), (٤), $x = 1, x = a$

$$A(a) = \frac{a^2}{4}$$

٥. بين ان $A(a) = \frac{a^2}{4}$

٦. جد حصر لـ $A(a)$

مثال ② حجم المخروط الدوراني:



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h (\pi r'^2) dz$$

$$S(z) = \pi r'^2 \quad / \quad \frac{r'}{r} = \frac{h-z}{h} \quad / \quad r' = \frac{r(h-z)}{h}$$

$$V = \int_0^h \pi \left(r \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right)^2 dz = \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz$$

$$V = \pi r^2 \int_0^h \left(-\frac{1}{h} z + 1 \right)^2 dz$$

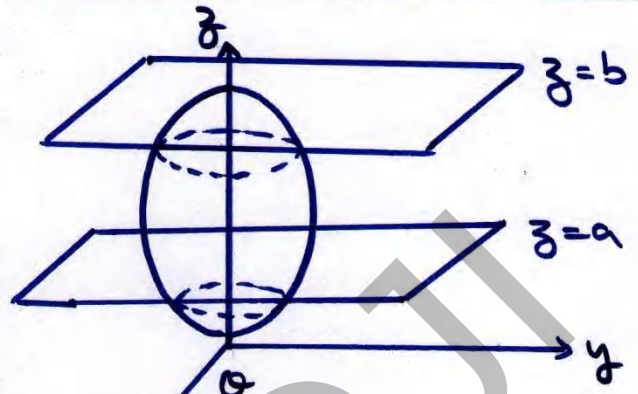
$$V = \pi r^2 (-h) \int_0^h -\frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h} z + 1 \right)^2 dz$$

$$V = -\pi r^2 h \left[\left(-\frac{1}{h} z + 1 \right)^3 \right]_0^h \times \frac{1}{3}$$

$$V = -\frac{\pi r^2 h}{3} \left[\frac{(-1+1)^3 - (1^3)}{-1} \right] = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

13/ حساب الحجم

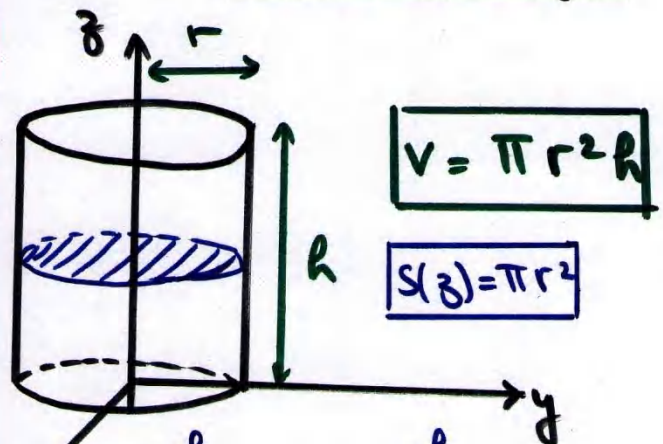
① قواعد حجوم مجسمات بسيطة



$S(z)$ مساحة مقطع الجسم
بمسو موازل (x, y)
واقعه z حيث $a \leq z \leq b$

$$V = \int_a^b S(z) dz$$

مثال ① حجم الاسطوانة:



$$V = \pi r^2 h$$

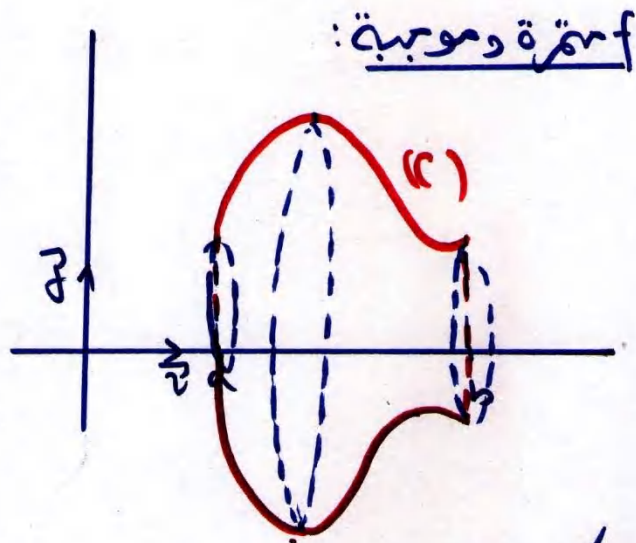
$$S(z) = \pi r^2$$

$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h (\pi r^2) dz$$

$$V = [\pi r^2 z]_0^h = \pi r^2 h$$

$$V = \pi r^2 h$$

② حجم مجسم دوراني متولد من $f(x)$



ليكن V حجم المجسم المتولد عند دوران $f(x)$ حول حامل محور الفواصل.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

تطبيق:

١. استعمال البكاملة بالتجزئة احب:

$$I = \int_2^3 (x-2) e^{2x} dx$$

$$J = \int_2^3 (x-2)^2 e^{2x} dx$$

٢. لتكن f الدالة المعرفة على $[2; 3]$ ب:

$$f(x) = (x-2) e^x$$

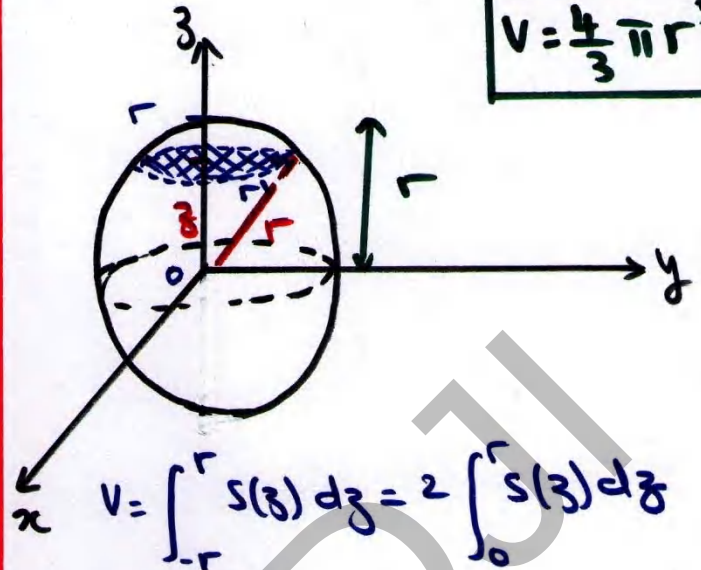
وليكن (C) منحناها البياني في معلم

متعامد ومتجانس، احب V حجم

المجسم المتولد بدوران (C) حول (x)

مثال ③: حساب حجم الكرة

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$S(z) = \pi r^2 / r^2 = r^2 - z^2$$

$$S(z) = \pi (r^2 - z^2)$$

$$V = 2 \int_0^r \pi (r^2 - z^2) dz = 2\pi \int_0^r (r^2 - z^2) dz$$

$$V = 2\pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^r$$

$$V = 2\pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

5/ منهجية طرح أسئلة التكامل:

طريقة ①:

① أسئلة مساعدة لتعيين $F(x)$

- احب التكامل التالي
- باستعمال التكامل بالتجزئة، عيّن .
- تحقق أن G دالة أصلية لـ f (جزء من f) .
- عيّن h و m حتى تكون G أصلية لـ f (جزء من f)
- اثبت أن f تكتب على الشكل أو يطلب تعيين ثوابت a, b .
- اثبت أن $a f'' + b f' + c f = \dots$

② حساب $F(m)$

- بين أن f تقبل دالة أصلية على $[a, b]$
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي تحقق
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم
- منا أجل $a \leftarrow 2$ طرق .

③ حساب المساحات:

- عيّن إشارة f
- ادرس الوضع النقي بين $\dots$ و $\dots$
- احب مساحة الحيز المحصور بين $\dots$ و $\dots$ و $\dots$ و $\dots$
- أو الحيز المعروف $\dots$ و $\dots$

الحد الأعلى للتكامل قد يكون
عدد ما

α بين أن $A(\alpha) = \dots$ وجد حوا

$A(n) = \dots$: بين أن n عدد طبيعي
احب $A(n)$ حين $n \rightarrow \infty$ عيّن n حتى $A(n)$

④ حساب الحجم:

احب V حجم المجسم المولد عند دوران
(f) حول (xx)

طريقة ②:

نفر F كما يلي

$$\begin{cases} f(m) = \dots \\ F(a) = b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{أو}$$

نريد دراسة الدالة F دون إيجاد عبارتها .

أمثلة:

- 154 ص
- 181 ص
- 91 ص 69
- $Bac 2015 M_1 \dots$

تابع لحساب المساحة:

$$A(n) = \int_0^n f(x) dx$$

$$h(n) = f(n) + n$$

فرض $A(x)$ العدد

$A(x)$ هي مسألة أكثر من المسألة

المحسورين

$$\begin{cases} n=0 \\ n=1 \\ (cf) \end{cases}$$

$$y = -n$$

استنتاج منحيات انطلاقاً من منحيات أخرى

استنتاج تمثيل بياني (Cg) مجهول انطلاقا من تمثيل بياني معلوم (Cf)

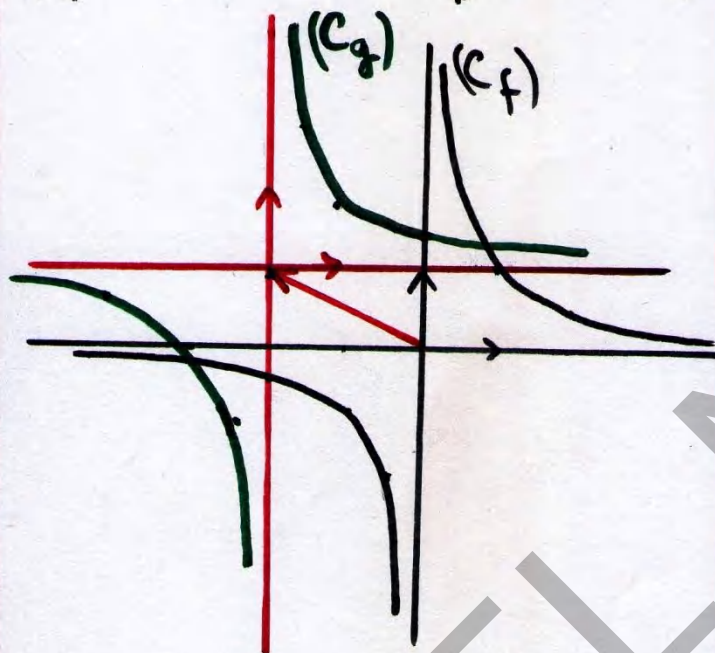
$$g(x) = \frac{x+3}{x+2} \quad (2)$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$

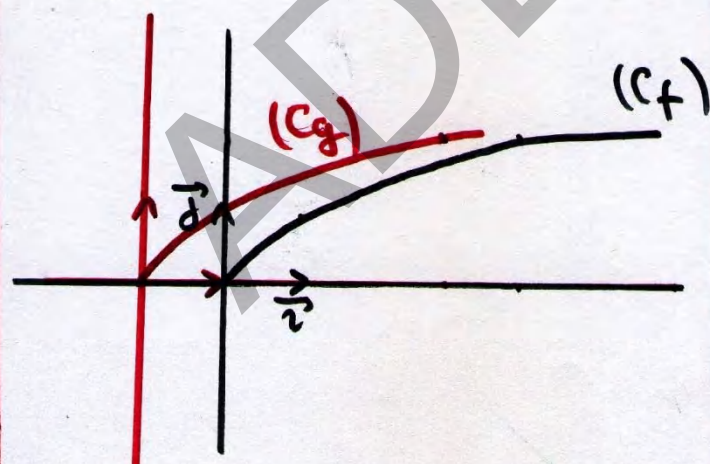
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ بوضع}$$

$$g(x) = f(x+2) + 1$$

(Cg) صورة (Cf) بانسحاب شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g(x) = \sqrt{x+1} \quad (3)$$



$$g(x) = f(x+a) + \beta \quad / 1$$

(Cg) صورة (Cf) بانسحاب شعاعه

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ \beta \end{pmatrix}$$

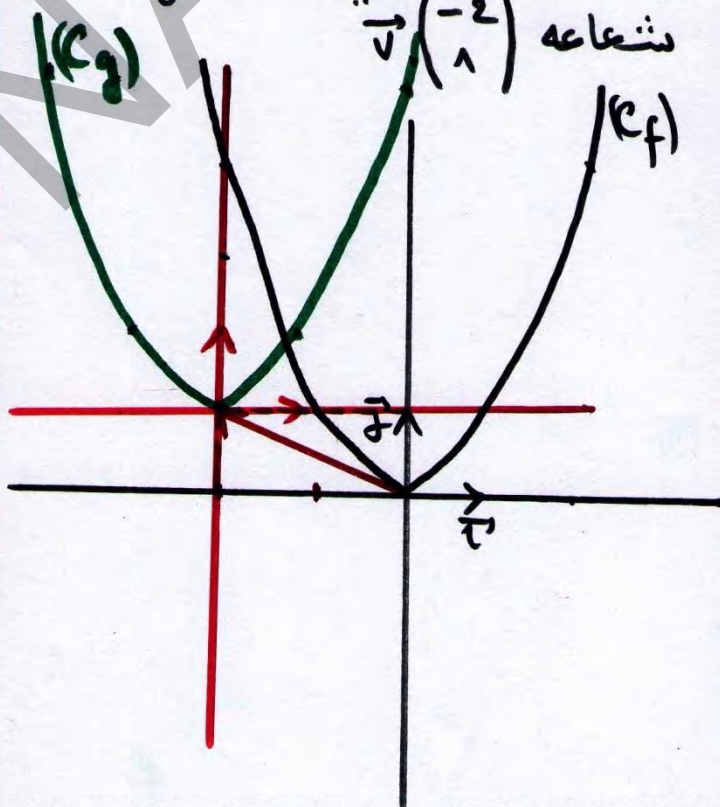
مثال: باستعمال دالة مربعة ودون دراسة تغيرات الدالة g، مثل (Cg)

$$g(x) = x^2 + 4x + 3 \quad (1)$$

$$g(x) = (x+2)^2 + 1$$

(Cg) صورة منحنى الدالة مربع بانسحاب شعاعه

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



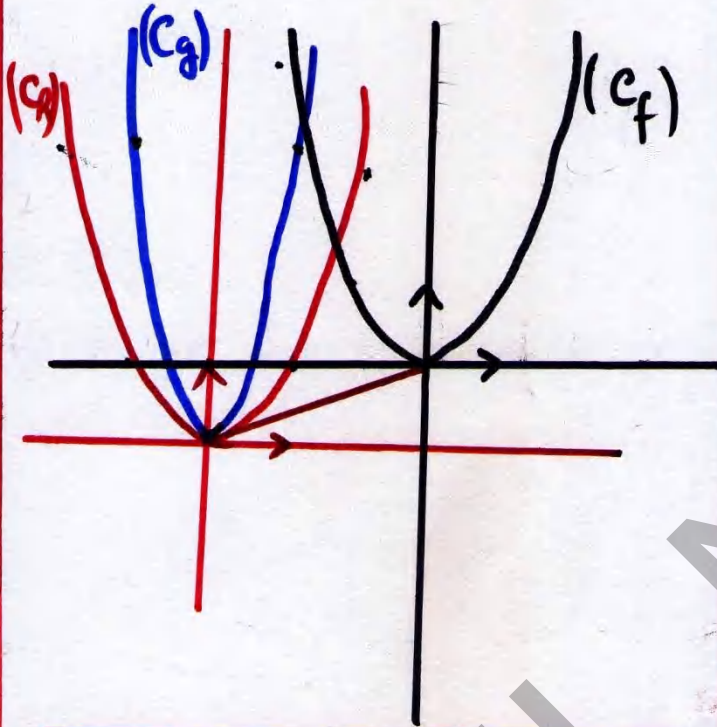
$$g(x) = (2x+6)^2 - 4$$

$$g(x) = 4[(x+3)^2 - 1] = 4h(x)$$

انصلا قامن منحنى الدالة مربع، ننتج

بتضاع $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ لنحصل على (C_h)

انصلا قامن (C_h) ننشئ (C_g)



(4) العبارة تتضمن قيمة مطلقة

تطابق : $g(x) = f(x)$

تناظر بالنسبة لمحور الترتيب : $g(x) = f(-x)$

تناظر بالنسبة لمحور الفواصل : $g(x) = -f(x)$

تناظر بالنسبة للمبدأ : $g(x) = -f(-x)$

(121)

$$g(x) = k \cdot f(x) \quad (2)$$

$$M(x, y) \in (C_f)$$

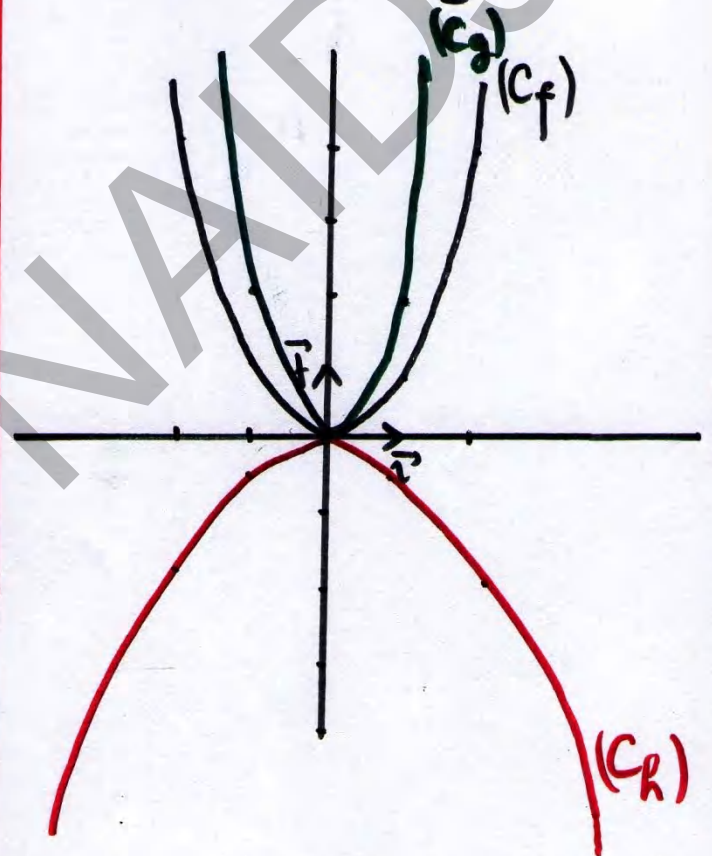
$$M(x, ky) \in (C_g)$$

$k > 0$: (C_f) و (C_g) في نفس الجزء

$k < 0$: (C_f) و (C_g) في جزئين متعاكسين

$$g(x) = 2x^2 \quad \text{مثال:}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2$$



$$g(x) = f(ax+b) + \beta \quad (3) \quad \text{حالة خاصة}$$

في بعض الأحيان يمكننا إنشاء (C_g) وذلك باستعمال التحويلات السابقين معا.

$$g(x) = 4x^2 + 24x + 32 \quad \text{مثال:}$$

الخطوات:

- ندرس شفعية الدالة
- نتخلص من رمز القيمة المطلقة
- نختار مجال مناسب للدراسة
- ثم نرسم (C_f) على هذا المجال
- نناظر الجزء المرسوم

• حالة ① $g(x) = f(|x|)$

- g دالة زوجية $\Leftrightarrow (C_f)$ متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

$$g(x) = f(x) : x \geq 0$$

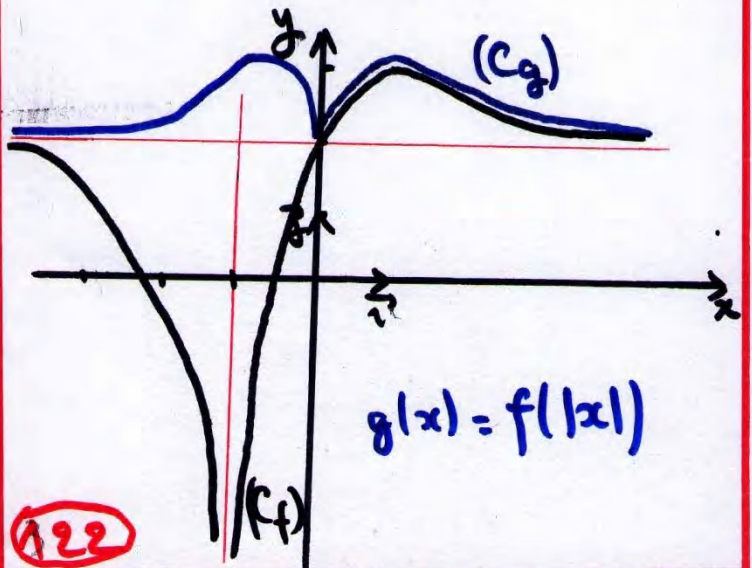
(C_g) يطابق (C_f) على هذا المجال

$$: x \leq 0$$

• نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (y, y') من شفعية (C_f) $\Leftrightarrow$ الشفعية

• إذن: $g(x) = f(-x)$ إذن نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (y, y')

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8x + 2}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{مثال:}$$



122

حالة ② $g(x) = f(-|x|)$

- g دالة زوجية $\Leftrightarrow (C_f)$ متناظر بالنسبة لـ (y, y')

$$g(x) = f(x) : x \leq 0$$

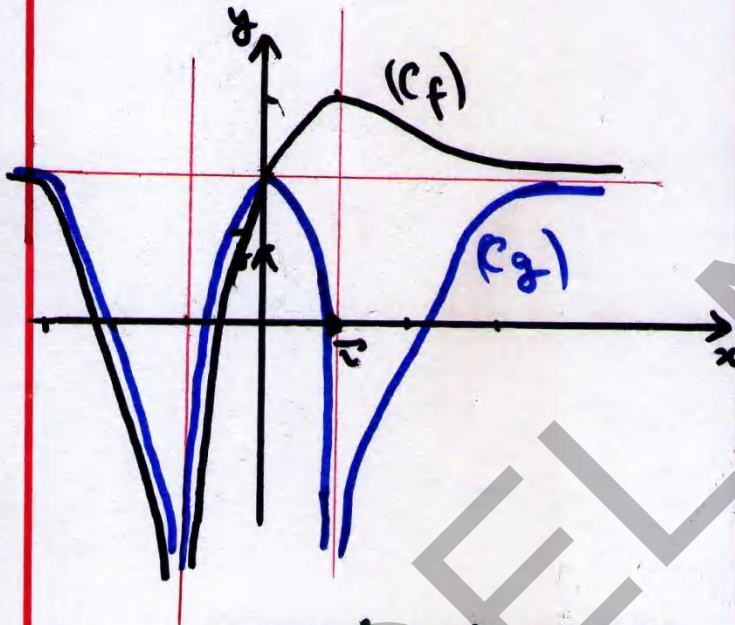
(C_g) يطابق (C_f)

• $x \geq 0$: نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ (y, y')

$$: x \leq 0$$

المثال السابق:

$$g(x) = f(-|x|)$$



حالة ③ $g(x) = |f(x)|$

$$g(x) = |-f(x)|$$

لما $f(x) \geq 0$ (C_f) فوق محور الفواصل

$$g(x) = f(x)$$

(C_g) يطابق (C_f)

لما $f(x) < 0$ (C_f) تحت (x, x')

$$g(x) = -f(x)$$

(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

①

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		9		$-\infty$

$$R(x) = [f(x)]^3$$

$$R'(x) = 3 \cdot f'(x) \cdot f(x)^2$$

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
$R'(x)$		+	0	-	
$R(x)$	$(-\infty)^3 = -\infty$		9^3		$(-\infty)^3 = -\infty$

$$k(x) = f(x)^2$$

$$k'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$$

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	0
$k(x)$	$(-\infty)^2 = +\infty$		9^2		$(-\infty)^2 = +\infty$

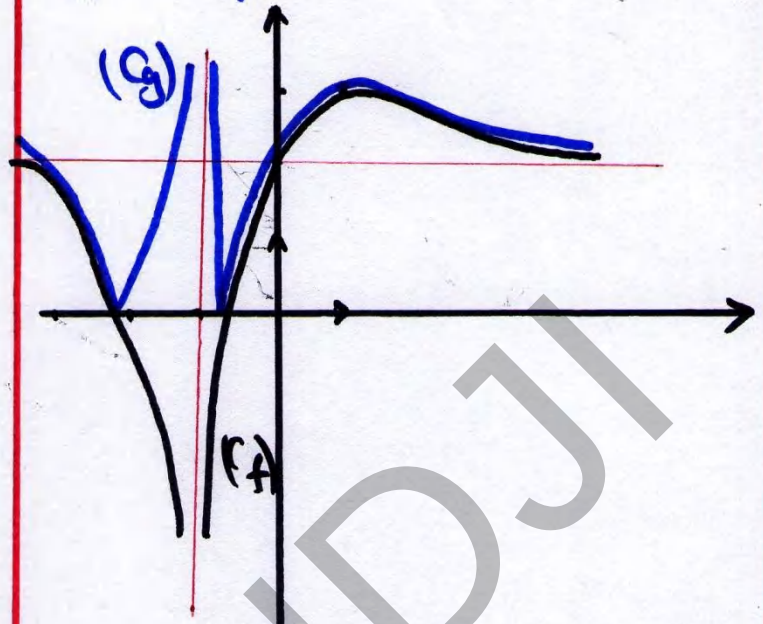
أشارة $k'(x)$ تستنتج من الجدول

①

(123)

المثال السابق:

$$g(x) = |f(x)|$$



(g) دوماً فوق (x)

$$g(x) = [f(x)]^n / 5$$

$$g'(x) = n \cdot f'(x) \cdot [f(x)]^{n-1}$$

* فردية إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$ $\Rightarrow$ تغيرات g نفسها تغيرات f

* زوجية إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x) \cdot f(x)$

مثال: لعن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = -x^2 - 4x + 5$$

* شكل جدول تغيرات f

* استنتج جدول تغيرات k / h حيث

$$k(x) = [f(x)]^2, \quad h(x) = [f(x)]^3$$

6/ بحساب $g'(x)$ ودراسة اشارتها

فدالة عددية معرفة على $]-2; +\infty[$ كما يلي:

x	-2	e^{-2}	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	6	4	5	9

استنتج جدول تغيرات g, h, k

$$g(x) = f(x^2)$$

$$h(x) = f(e^x) ; D =]-2; +\infty[$$

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$g(x) = f(x^2)$$

$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$$

من أجل كل x من $]-2; +\infty[$:

$$x^2 \geq 0$$

$$f'(x^2) \geq 0$$

$$f'(x^2) = 0 : x^2 = 0 : x = 0$$

x	-2	0	$+\infty$
$2x$	-	0	+
$f'(x^2)$	+	0	+
$g'(x)$	-	0	+

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	6	4	9

$$g(+\infty) = f(+\infty) = 9$$

$$g(0) = f(0) = 4$$

$$g(-2) = f(4) = 6$$

$$h(x) = f(e^x)$$

$$h(x) = e^x \cdot f'(e^x)$$

من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$: $e^x > 0$; $f'(e^x) > 0$

x	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	5	$f(1)$	9

$$h(+\infty) = f(e^{+\infty}) = f(+\infty) = 9$$

$$h(-2) = f(e^{-2}) = 5$$

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

تغيرات k من تغيرات f

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$
$k(x)$	$\sqrt{+\infty} = +\infty$ $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$		

6

125

تمارين

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1,48; -1,47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد

الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 + 2)^2}$.

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(5) نرمز بـ S إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها

$x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$.

أثبت أن: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ثم بين أن: $\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$.

الوحدة: الدوال العددية

عادل نعيمجي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

(3) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $-0,1 \approx f(\alpha)$)

(4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

(5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

(6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$.

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب) استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أثبت أن الدالة f فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

ج- ادرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

ج- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة

(d') المستقيم المقارب الآخر.

د- ارسم (d) و (d') و (C_f) في المعلم السابق.

(3) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$.

أ- بين أن الدالة g زوجية.

ب- انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

تمرين 4: (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- أدرس تغيرات الدالة f .
- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y = x$.
- ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D) .
- أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.
- ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.
- ج- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.
- أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تتعد من أجل القيمة 0 للمتغير x .
- $g(x) = |f(x)|$ بالدالة: $]-1; +\infty[$ على المجال $]-1; +\infty[$ بالدالة: $g(x) = |f(x)|$
- منحنى الدالة g في المعلم السابق.
- بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.
- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x) = m^2$

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

(I) f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$: f تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) أ- أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I .

(ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

(2) g دالة معرفة المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

(أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

(ب) تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) .

عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس تغيرات g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) أ- أحسب $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

(3) أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمتين التي معادلاتها: $x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$

التمرين الرابع (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يأتي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- أ - براءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $0, \frac{1}{2}[$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f.

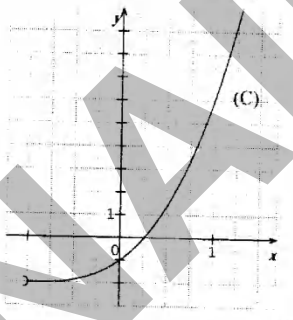
3 - نأخذ $\alpha \approx 0,26$

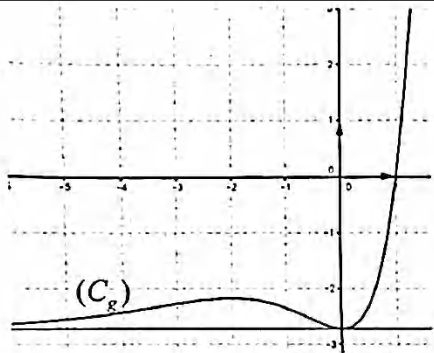
أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = 2$





التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$
 تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (كما هو في الشكل المقابل).
 - احسب $g(1)$.

- بقراءة بيانية عيّّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بيّن أنّ المنحنى (γ) الذي معادلته : $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ).

(3) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا : $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

(4) استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقاً من منحنى الدالة: $x \mapsto e^x$ ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

(6) ليكن n عدداً طبيعياً و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحّد بالمنحنيين (γ) و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.

احسب العدد الحقيقي I حيث $I = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$

الوحدة : الدوال الأسية

عادل نعيجي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1cm$.

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني .

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما، احسب $f(-2)$ ، ثم ارسم المنحنى (C).

(II) ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$

وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(1) أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيهما.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.

(3) M_m نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1 - m$.

أثبت أنه عندما m يسمح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيين معادلة له.

(4) ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m \neq 2$ ، الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) .

(5) احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين

(C) و (C_3) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = 0$ ، ثم احسب: $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) لنكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$.

- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ ثم استنتج معادلة لـ (Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(4) باستعمال المنحنى (C_f) ، عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلّين مختلفين.

(5) ليكن α عددا حقيقيا موجبا، نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

وبالمستقيمت التي معادلاتها على الترتيب: $y = x + 1$ ، $x = -1$ و $x = \alpha$.

- احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ثم $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$.
- (1) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادله له.
- (ب) بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (2) اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .
- (3) الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 e^{-x+2} - 4$ ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدد عندئذ وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.
- (4) ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.
- (5) نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $f(x) = m(x - 2) \dots (E)$ ناقش بيانها حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .
- (6) g الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيرات الدالة g .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثم احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x - 2)e^{1-x}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) اكتب معادلة (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $h(x) \geq 0$ ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,6 < \alpha < -0,7$.

(3) أنشئ المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

(4) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 0$ و $x = 1$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(2) (أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1,52 < \alpha < -1,51$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول 1cm) .

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$. (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f) .

(ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,38$) .

(د) عيّن دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

(2) (أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(ج) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما .

(د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

(هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$.

على المجال $[-2; +\infty[$.

(III) h و H الدالتان المرفقتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حتّى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

(2) (أ) احسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا .

(ب) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

(أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g) .

(ب) بيّن أنّه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.

(ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) بيّن أنّه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f) .

(ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

2- (أ) بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

(ج) أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0,29$) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاً α يختلف عن 1 ثم تحقق أن: $2,79 < \alpha < 2,80$.

(3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f و g الدالتان العدديتان المرفقتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن للمنحنيين (C_g) و (C_f) مماساً مشتركاً (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

(3) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

(4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

(ب) ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_g) و (C_f).

(ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t) dt$.

(د) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_g) و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x=2 \text{ و } x=1.$$

(III) 1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخميناً لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}$.

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

(أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$.

(ب) استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (x+2)e^x - 2$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$.

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$.

(ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

(4) بين أن الدالة: $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

(ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

(ج) جد حصرًا للعدد A .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2} g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$.

(2) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0,1$.

(6) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.
 (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له.

(5) g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) عيّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$

ب) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

ج) أرسم (T) و (C_f)

(4) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$

(5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ) بيّن أن الدالة h زوجية.

ب) أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

(6) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث: a, b عدنان حقيقيان

عيّن a, b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $g'(x) = f(x)$

(6) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) > x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) أنشئ المنحنى (C_f) .

(7) (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$.

ب) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عيّن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(8) m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ :

$$h_m(x) = x e^{\frac{1}{x}} - m x$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب) باستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة

$$h'_m(x) = 0$$

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

(I) f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بي: $f'(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

(2) احسب $f''(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α .

(4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بي: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1,2 < \alpha < -1,9$ و $1,8 < \beta$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسّر النتيجة هندسيا.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

(4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

(5) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - 1] dx$

ب) احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1 - \sqrt{2}) \approx -0,25$ و $g(1 + \sqrt{2}) \approx 1,43$)

2. أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α ، حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ب - استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II - الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ، (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f)

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,9$)

3. أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - مثل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .

ج - ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

4. الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$.

أ - بين أن H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب - احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين

معادلتهما $x = -1$ و $x = 0$.

III - (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(تذكر أن العدد α يحقق $g(\alpha) = 0$)

1. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq \alpha$.

2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أن (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.

3 - استنتج إشارة $g(x)$.

II - f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm).

1 - بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

2 - أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) احسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

3 - أ) بين أن: $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، حيث α هو العدد المعروف في السؤال 2 من الجزء 1.

ب) استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ج) ارسم (C_f) .

4 - ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$.

5 - h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - x e^x$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[-1; +\infty[$.

ب- تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

(4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

(5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

(6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 - x e^x$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$.

(3) عين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

(3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5- ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).

6- ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n < \alpha$.

(2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: U_0 ، U_1 و U_2 ، ثم خمن اتجاه تغير (U_n).

(3) برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

التمرين الثالث: (07.5 نقطة)

أ) الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

• (C_f) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

3- بين أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف w يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها.

4- لنكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.

أ- ادرس تغيرات الدالة g .

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7 < \alpha < 2,8$.

5- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ والمنحنى (C_f) .

ب) (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1- باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) عيّن U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور القواصل.

2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n < \alpha$.

3- بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4- استنتج أن (U_n) متقاربة و بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

ج- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2. أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

ب- اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1,75; 1,76]$ حلا وحيدا α .

د- ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 2]$.

3. أ- احسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و حامل محور القواصل والمستقيمين

الذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = 0$.

ب- أثبت أن: $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2} e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) u\alpha$ (حيث $u\alpha$ هي وحدة المساحات).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

ليكن (C_f) منحنى f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.

3. بين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ - (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتهما على الترتيب: $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$.

بين أن (D) و (D') مقاربان للمنحنى (C_f) ، ثم حدّد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9 < x_0 < 0,91$

و $-1,65 < x_1 < -1,66$

ج - احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(x) + f(-x)$.

فسّر النتيجة هندسيا.

د - ارسم (D) و (D') و (C_f) .

هـ - m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرفة بالمعادلة $y = x + m$.

ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أ) احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$ حيث: f' ، f'' ، ...، $f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية: $y'' = (3x + 16)e^x$

2/ أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة O التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$.

ب) بين أن O هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

ج) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

4/ أ) عند حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^x te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية

للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين التي

معادلتهما: $y = 0$ ، $x = -\frac{4}{3}$ و $x = \lambda$ ، ثم جد $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (3-x)e^x - 3$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ، اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O .

(2) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$

ج) تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ثم عين حصرًا له.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

(3) احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$

بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسيًا.

(4) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ وفسر هندسيًا النتيجة.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x + 1 \text{ و } y = x$$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

(4) أثبت أن النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

(5) أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

ج) ارسم (Δ)، (Δ') ثم المنحنى (C_f).

د) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

2. ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

3. بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α بحيث $-1,6 < \alpha < -1,7$

5. ارسم (C_f) من أجل $x \in \mathbb{R}$

6. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

7. احسب $\mathcal{H}(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات:

$$x = \alpha \text{ و } x = 0 \text{ و } y = x + 2$$

بين أن $\mathcal{H}(\alpha) = 2 \ln(-\alpha)$ ثم استنتج حصرا للعدد $\mathcal{H}(\alpha)$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I - نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يأتي:

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$$

حيث a و b عدنان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر هذه النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = 0$)

(ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثيها.

(د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

(هـ) ارسم (C_g) .

(و) H الدالة العددية المعرفة على $[-2, +\infty[$ كما يأتي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x) - 1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III (لكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2, +\infty[$ كما يأتي:

$$k(x) = g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

تمرين 4: (7 نقاط)

I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - ادرس تغيرات الدالة f .

2 - بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω و اكتب معادلة مماس C_f عند النقطة ω .

- اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .

3- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$.

- استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

4- بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $[-2,77; -2,76]$.

- احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيمه المقاربين.

II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ و C_g منحنى الدالة g .

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g(x) = f(-x)$.

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2- أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g).

الوحدة: الدوال اللوغاريتمية

عادل نعيجي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فتر النتجتين بيانيا.

(2) أ) بَيِّنْ أَنْ: من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(4) بَيِّنْ أَنْ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها، ثم انشئ (C_g) .

(II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كما يلي: $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$

(1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

أ) بَيِّنْ أَنْ للمعادلة $g(x) = 0$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,2 < \alpha < 1,3$

ب) استنتج إشارة $g(x)$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1: $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$

- أثبت أن: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + 2 - \ln x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) لنكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.

(1) بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(2) أ) احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

(4) أ) أثبت أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم جد معادلة لكلٍ منهما.

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β

حيث $2 < \alpha < 2,1$ و $-0,5 < \beta < -0,4$.

(5) ارسم المماسين والمستقيم (Δ) ثم المنحنى (C_f).

(6) باستعمال المنحنى (C_f)، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e - 2m) = \ln(x^2)$ حلاً وحيداً.

(7) نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلتهما

$x = 1$ ، $x = \alpha$ و $x + 2y = e$.

تحقق أن: $A(\alpha) = \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \text{ cm}^2$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $D_f =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = -2x + 3 + 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بيّن أنه من أجل كل x من D_f ، $f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $f(3-x) + f(x) = 0$ و $(3-x) \in D_f$ ، D_f من D_f .

ب) استنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيين إحداثيه.

(4) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]0,45; 0,46[$ ثم استنتج أنها تقبل حلاً آخر β يطلب تعيين حصر له.

(5) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(6) ارسم (Δ) و (C_f) .

(7) بيّن أن الدالة: $h: x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2)$ أصلية للدالة $h: x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2; +\infty[$.

ثم احسب بدلالة β مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها:

$$y = -2x + 3 \text{ و } x = \beta \text{ و } x = 3.$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ، (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانياً.

(2) احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين موازيين لحامل محور الترتيب.

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل x من D ، $f''(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$ ، D من D .

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

(5) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(7) وسيط حقيقي، ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$(2-3|m|)x + 3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76; 1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x - \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين،

ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة بيانيا.

(2) بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$ ،

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $h(x) = x - \ln x$

(أ) بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $h(x) > 0$ ،

واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 1$.

(ب) ارسم (C_f). (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$)

(5) لتكن الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ،

- اعط تفسيراً هندسياً للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصراً له.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x - x \ln x$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$.

(3) استنتج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.

(1) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$.

(2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$.

(ب) بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; \alpha[$ و متناقصة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(د) احسب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، فسر النتيجة هندسياً.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$.

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,4 < \alpha < 0,5$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسياً ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب- بين أن: $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \frac{4}{\alpha+1}$ ثم أعط حصاراً لـ $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

3) ليكن a عدد حقيقي من المجال $]-1; +\infty[$ ، نسمي (T_a) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة a .

نضع من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.

أ- تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $h'(x) = f'(x) - f'(a)$.

ب- باستعمال اتجاه تغير الدالة g ، عيّن إشارة $h'(x)$ حسب قيم x واستنتج اتجاه تغير h على $]-1; +\infty[$.

ج- حدّد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (T_a) .

4) أ- بين أنه يوجد مماسان (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

ب- ارسم المماسين والمنحنى (C) .

5) نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $H(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$.

أ- بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة $(x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) والمستقيمتين التي معادلاتها: $x=1$ ، $y=0$ و $x=2$.

3) أ- بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

ب- استنتج حصاراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ج- ارسم (C_f) .

4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماماً x و m وسيط حقيقي:

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

أ- تحقق أن المعادلة (E) يوؤل حلها إلى حل المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$.

ب- عيّن بيانياً قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين.

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحنها البياني في المستوى.

أ- بين أن الدالة h زوجية.

ب- ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$.
(حيث العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث: $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1- أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$. (f' هي مشتقة الدالة f).

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) ارسم المنحنى (C_f). (نقبل أن: $f(\alpha) = 3.16$)

2- أ) بين أن الدالة: $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي: $x=0$ و $x=1$.

3- نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ: $k(x) = f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن الدالة k زوجية.

ب) بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه (دون دراسة تغيرات الدالة k).

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x) = m$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I (I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.
1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II (II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.
و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y = x - 1$ معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1; 0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$.

7) أ) جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) احسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C)، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي ($n > 1$).

ج) عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن: $I_n > 2$.

(4) نقبل أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$$2,11 < x_1 < 2,13 \text{ و } 0,22 < x_0 < 0,23$$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

(5) m وسيط حقيقي . ناقش بيانيا و حسب قيم m ، عدد حلول المعادلة : $3 + 2\ln x - mx = 0$.

(III) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x] dx$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

(2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0 .

(3) احسب u_n بدلالة n .

(4) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

(I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,52; 0,53[$ حلا وحيدا α .

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + \frac{3 + 2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

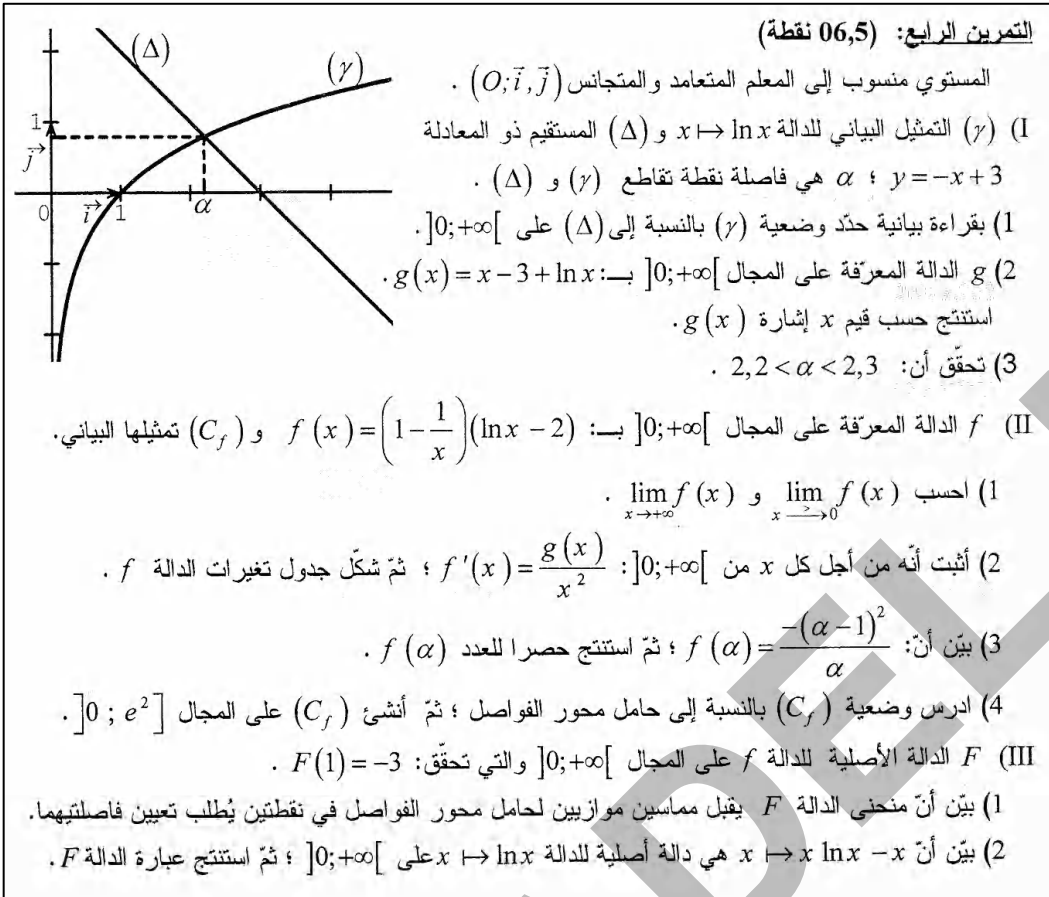
ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) تحقق أن : $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ) .

ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.



التمرين الرابع: (07,5 نقطة)

(I) الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بما يلي : $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$: $h(x) > 0$.

(II) الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2} \ln(x+2)$.

(1) المتحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm).
احسب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$.
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(4) أ) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيها.
ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) .
ج) احسب بالمستقيم المربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = -1$ و $x = 1$.

(III) الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $g(x) = |x+1| + \frac{2}{x+2} |\ln(x+2)|$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة إلى g ؟

(2) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(3) انطلاقا من المنحنى (C_f) ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

(5) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^2 \ln x$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ، والتي تتعدم من أجل القيمة 1 .

(6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; \alpha]$. نضع $F(t) = \int_t^\alpha f(x) dx$.

(أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0; \alpha]$ ، $F(t) = \frac{-3t f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$.

(ج) احسب $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$.

(7) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; \alpha]$.

$S(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m .

نفرض أنّ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_g) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين

معادلتيهما على الترتيب: $x = -\alpha$ و $x = \alpha$ ، هي: $\mathcal{A}$ حيث: $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha) ua$

(ua وحدة المساحات).

(أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $S(m) = 2\mathcal{A}$.

(ب) علماً أنّ $3,142 < \pi < 3,140$ أعط حصراً للعدد m .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f(x) = 1 - x^2 \ln x$.
(C_f) منحنى الدالة f الممثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

(3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$.

(ب) تحقّق أنّ $1,531 < \alpha < 1,532$.

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$.

(C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) ادرس شفعية الدالة g .

(ب) أنشئ المنحنى (C_g) على المجال $[-2; 2]$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ؛ فسّر النتيجة هندسيا.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

(ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(ج) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

(3) أنشئ (T) و (C_f) .

(4) لنكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

(ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

(ج) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

I الدالة المعرفة على المجال $]0; 3]$ بـ: $g(x) = x \ln x + x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; 3]$

ثم تحقق أن $1,45 < \alpha < 1,46$

(ب) استنتج إشارة $g(x) - 2$

II التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على

المجال $]0; 3]$ بـ: $f(x) = |x - 2| \ln x$

(1) باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 2

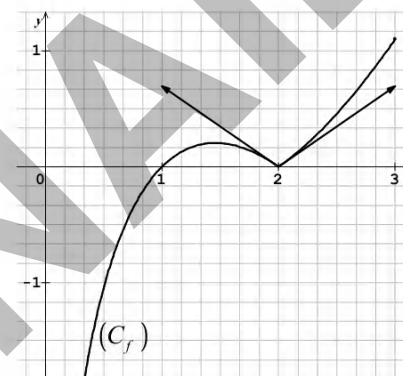
(2) أثبت صحة تخمينك.

(3) ادرس تغيرات الدالة f

III الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$

(1) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) ؛ حيث (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h)



التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

(أ) ادرس تغيرات g .

(2) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

II - الدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$; $x > 0$
 $f(0) = 1$

(أ - 1) بين أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2 - أ) تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$; f_n الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $[0; +\infty[$.

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4- بين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

5- (أ) بين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

(ب) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي

وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- (أ) بالاعتماد على الجزء II؛ بين أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

(ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

(ج) جد نهاية المتتالية (α_n) .

التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) ادرس تغيرات الدالة f .

(ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري).

(ج) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - \ln x$.

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(أ) ادرس تغيرات الدالة g .

(ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0; e^2]$.

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$.

(أ) احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0; +\infty[$.

(ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^e [f(x) - g(x)] dx$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أثبت أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(5) مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III - (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

(1) أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

(2) الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

(أ) بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

(ج) بين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II - الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm).

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) (أ) بين أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

(أ) احسب x_0 .

(ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

(ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I - 1. الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة u .

ب - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.

أ - بين أن: $v'(1) = 0$ (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v).

ب - أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

ج - استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

3. أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3. احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0; \frac{5}{2}\right]$.

(نأخذ: $f(2) \approx 2,3$ ، $f(1,64) \approx 1$ ، و $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 5,75$).

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما

$$x = 2 \text{ و } x = \frac{1}{2}.$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - 1. هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + a + b \ln(x)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

1- عيّن a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1; -1)$ مماسا معامل توجيهه 4.

2- نضع $a = -2$ و $b = 2$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II - 1. هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ج) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، ثم جد معادلة له.

ج) نأخذ $\alpha = 1,25$ ، بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث:

$$0,6 < x_1 < 0,7 \text{ و } 2,7 < x_2 < 2,8, \text{ ثم ارسم كلا من } (T) \text{ و } (C_f).$$

3- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x + 2 \ln(x) = 0$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

1. $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي :

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(3) عيّن، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

(4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

II. f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(x+1)}; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

(2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1; 0[\cup]0; 3]$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بيّن أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرًا لـ $f(\alpha)$.

ج- احسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

(4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

(5) ارسم (T) ، (T') و (C_f) .

(6) ناقش بيانًا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيًا.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3,4 < \alpha < -3,5$ و $-1,1 < \beta < -1$.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

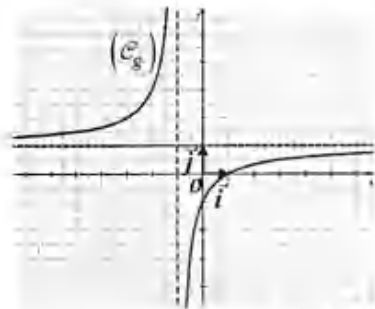
(6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

(7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) ، بقراءة بيانية:

أ - شكل جنول تغيرات الدالة g .

ب - حل بيانياً المتراجحة $g(x) > 0$.

ج - عيّن بيانياً قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة ههنا.

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جنول تغيرات الدالة f .

3. أ - باستعمال الجزء I السؤال ج - ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

ب - α عدد حقيقي.

بين أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $[\alpha; +\infty[$.

ج - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$. ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على

المجال $]1; +\infty[$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{a+b \ln 2x}{4x^2}$ حيث a و b عددين حقيقيين و (C_f)

المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ عيّن a و b بحيث يكون المماس في النقطة $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ للمنحنى (C_f) موازياً لحامل محور القواصل.

2/ g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1+2 \ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في

المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، فسّر النتيجة ههنا.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جنول تغيراتها.

(ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$.

(د) أنشئ (C_g) .

3/ (أ) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{1 + \ln 2x}{2x}$ احسب $h'(x)$.

(ب) تحقق أن: $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

2/ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (1 - \frac{1}{x^2}) \ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$ ، ماذا تستنتج ؟

- ارسم (δ) و (C_f) .

3/ أ/ x عدد حقيقي من المجال $[1; +\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$

- تحقق أن: $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $[1; +\infty[$.

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1; +\infty[$.

ب/ α عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين

الذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = \alpha$ ، ثم احسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - 1 - 2 \ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول هي 4cm.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

ج- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(\frac{1}{x})$.

3 f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

د- شكل جدول تغيرات الدالة f ، بين أن: $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$.

4- ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0; 3]$.

التمرين الثالث: (10 نقاط)

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

(4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = \ln(x + a) + b \quad \text{حيث: } a, b \text{ عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.}$$

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية $\ln$

ثم ارسم (C) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) احسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α .

تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; \alpha]$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[1; \alpha]$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

(1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$

(2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1. g دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x + \ln x$

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ فإن $g(x) \neq 0$.

2. لتكن f دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x}$

أ) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{x}{2 + \frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x \in [1; +\infty[$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f

د) شكل جدول تغيرات f ، ما هي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متميزين؟

هـ) جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث (C_f) يرمز إلى التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $[1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = f(e^x)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة h .

ب) جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

ج) ارسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بياناً.

ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

د) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم (C_f) .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها:

$$y = x - 1 \quad ; \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1.$$

تم بحمد الله...

نجاحكم هدفنا