



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

سلسلة الخليل في

- ملخص شامل
- تمارينات مقترحة
- تمارين البكالوريات السابقة جميع الشعب من 2008 إلى 2020.

الأعداد المركبة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 04 / 02

◀ موسوعة الخليل في الأعداد المركبة ▶



ملخص شامل حول
الأعداد المركبة:

تعريف وخواص هامة في الأعداد المركبة

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$
- الشكل الجبري: نسمي العبارة $z = x + iy$ بالشكل الجبري للعدد المركب z حيث: x و y عدنان حقيقيان و i عنصر غير حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{C}$ يحقق: $i^2 = -1$.
- يسمى x بالجزء الحقيقي لـ z ويرمز له بالرمز $Re(z)$.
- يسمى y بالجزء التخيلي لـ z ويرمز له بالرمز $Im(z)$.
- يسمى $\bar{z}$ مرافق العدد المركب z ، حيث: $\bar{z} = z - i(y)$.
- بعض العمليات في $\mathbb{C}$:

ليكن $z_n = x_n + iy_n$ أعداد مركبة، وليكن α عدد حقيقي، لدينا ماييلي:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \circ$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \quad \circ$$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} \quad ; z \neq 0 \quad \circ$$

خواص عدد مركب:

$$z\bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 = x^2 + y^2 \quad \circ$$

$$z - \bar{z} = 2iIm(z) = 2iy \quad \circ$$

$$z + \bar{z} = 2Re(z) = 2x \quad \circ$$

$$\overline{\bar{z}} = z \quad \circ$$

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \text{مع} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \circ$$

$$z \neq 0 \quad \text{مع} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \circ$$

$$w \neq 0 \quad \text{مع} \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad \circ$$

ملاحظات:

- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف.
- يكون العدد المركب z معدوما إذا وفقط إذا كان $Re(z) = 0$ و $Im(z) = 0$

التفسير الهندسي للعدد المركب:

- المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- لكل نقطة $M(x; y)$ من المستوى نرفق العدد المركب $z = x + iy$.
- نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، والشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z .

- كل نقطة M هي صورة العدد المركب وحيد $z = x + iy$ ، ونقول أن z لاحقة النقطة M .
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ومحور الترتيب يسمى المحور التخيلي والمستوي يسمى المستوي المركب.

● **لاحقة شعاع:** A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_B - z_A$.

● **طويلة عدد مركب:** نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ: $|z|$ حيث:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

● **خواص طويلة عدد مركب:**

من أجل كل عددين مركبين z و w . A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب: $AB = |z_B - z_A|$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$|z| \geq 0$$

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

$$-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|-z| = |z|$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$$

$$|z|^n = |z^n|$$

$$w \neq 0 \quad \text{مع} \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

$$|z - w| \leq |z| - |w|$$

● **التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب:**

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \frac{AB}{AC}$$

● **عمدة عدد مركب:**

نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس زاوية بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

ونرمز لها بالرمز: $\theta = \arg(z)$ حيث: $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

● إذا كانت θ عمدة للعدد المركب غير المعدوم z مع $z = x + iy$ و $z \neq 0$ فإن:

$$|z| = r \quad ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

● كل عدد مركب غير معدوم له عدد غير منته من العمدة، أي إذا كانت θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi$ عمدة

له حيث $k \in \mathbb{Z}$.

● $\arg(0)$ و $\arg(\infty)$ غير معنيين.

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad \circ$$

● **خواص عمدة عدد مركب غير معدوم:**

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \quad \circ$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \quad \circ$$

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi \quad \circ$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \quad \circ$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad \circ$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \quad \circ$$

● **التفسير الهندسي لعمدة عدد مركب:**

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) &= \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) \\ &= -(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = -[(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC})] = -(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

إذن:

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})}$$

● **الشكل المثلثي لعدد مركب:** نسمي الكتابة: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z ,

$$\text{حيث: } \theta = \arg(z) \quad \text{و} \quad r = |z|$$

● **ترميز أولر:** نضع: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، هذا الترميز يسمى ترميز أولر، حيث $e^{i\theta}$ عدد مركب

طويلته 1 و θ عمدة له.

● **الشكل الأسّي لعدد مركب:** العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له، يكتب على الشكل:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

● **دستور موافر:**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad , \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

● **خواص (دستور موافر):**

z و w عدنان مركبان، θ و α عمدتهما على الترتيب، لدينا ما يلي:

$$z \cdot w = |z \cdot w| e^{i(\theta+\alpha)} \quad \circ$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\alpha)} \quad \text{مع } |w| \neq 0 \quad \circ$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|} e^{i(-\alpha)} \quad \text{مع } |w| \neq 0 \quad \circ$$

$$\bar{z} = |z| e^{i(-\theta)} \quad \circ$$

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad \text{حيث } n \in \mathbb{N} \quad \circ$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \quad \text{حيث } n \in \mathbb{N}^* \text{ و } k \in \mathbb{Z} \quad \circ$$

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} \quad \circ$$

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \circ \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \circ \\ e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} &= i \quad \circ \\ e^{-i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} &= -i \quad \circ \\ e^{i2k\pi} &= 1 \quad \circ \\ e^{i(2k+1)\pi} &= -1 = i^2 \quad \circ\end{aligned}$$

توطئة:

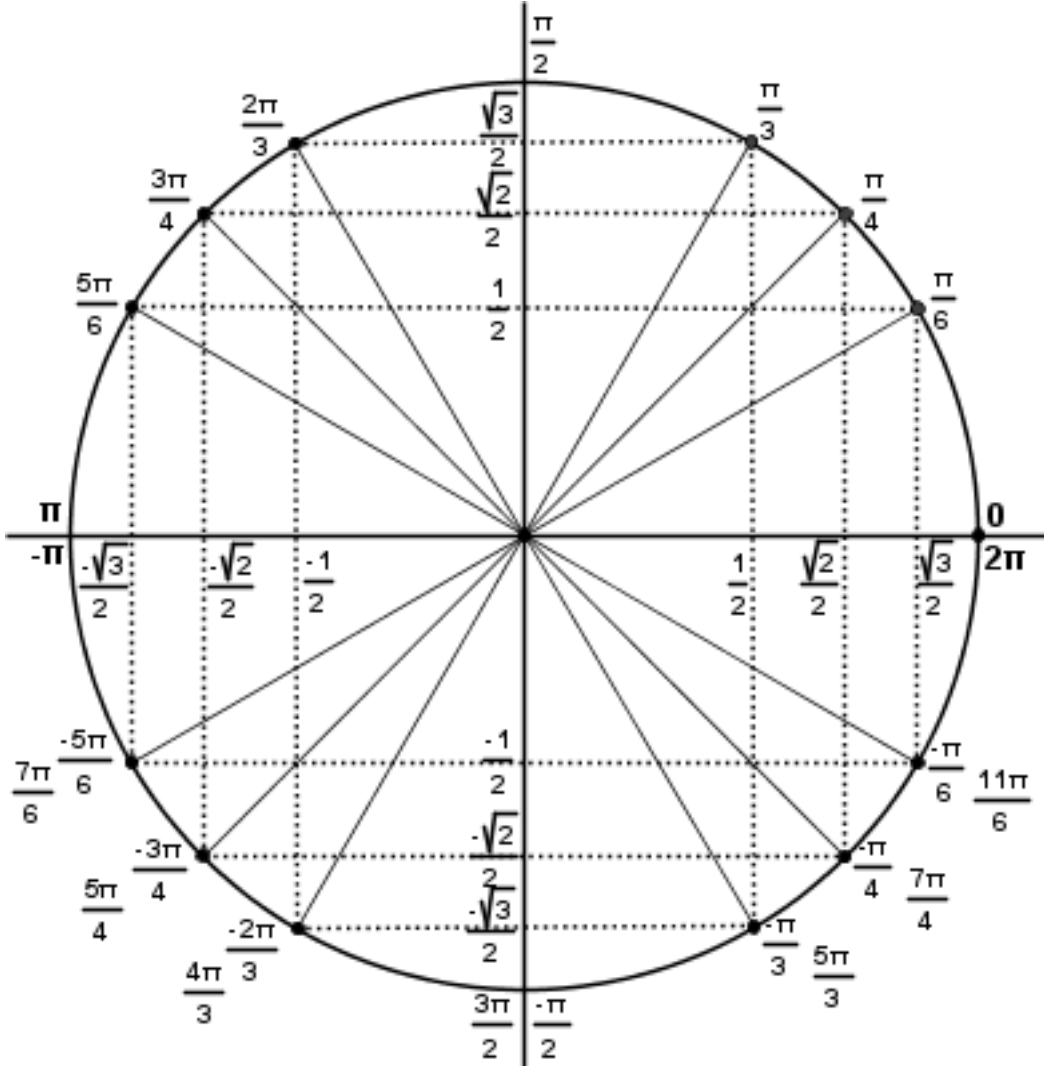
ليكن z عدد مركب، θ عمدة له، $r = |z|$ و $k \in \mathbb{Z}$ ، لدينا:

$$z = \underbrace{z + iy}_{\text{الشكل الجبري}} = r \underbrace{[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)]}_{\text{الشكل المثلثي}} = \underbrace{r e^{i(\theta + 2k\pi)}}_{\text{الشكل الأسّي}}$$

● كيفية تعيين قيم العدد الطبيعي n :

$\arg(z) = k\pi$	يكافئ	z عدد حقيقي غير معدوم	○
$n \cdot \arg(z) = k\pi$	يكافئ	z^n إذن عدد حقيقي غير معدوم	○
$\arg(z) = 2k\pi$	يكافئ	z عدد حقيقي موجب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = 2k\pi$	يكافئ	z^n إذن عدد حقيقي موجب تماما	○
$\arg(z) = \pi + 2k\pi$	يكافئ	z عدد حقيقي سالب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = \pi + 2k\pi$	يكافئ	z^n إذن عدد حقيقي سالب تماما	○
$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	يكافئ	z تخيلي صرف غير معدوم	○
$n \cdot \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	يكافئ	z^n إذن تخيلي صرف غير معدوم	○
$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z تخيلي صرف موجب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z^n إذن تخيلي صرف موجب تماما	○
$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z تخيلي صرف سالب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z^n إذن تخيلي صرف سالب تماما	○
$\sin \theta = 0$	يكافئ	z حقيقي	○
$\sin \theta = 0$ و $\cos \theta \geq 0$	يكافئ	z حقيقي موجب	○
$\sin \theta = 0$ و $\cos \theta \leq 0$	يكافئ	z حقيقي حقيقي سالب	○
$\cos \theta = 0$		z تخيلي	○
$\cos \theta = 0$ و $\sin \theta \geq 0$	يكافئ	z تخيلي صرف موجب	○
$\cos \theta = 0$ و $\sin \theta \leq 0$	يكافئ	z تخيلي صرف سالب	○

● الدائرة المثلثية:



● **نتائج (من الدائرة المثلثية):** من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad \circ$$

$$\sin(k\pi) = 0 \quad \circ$$

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & ; \text{ زوجي } k \\ -1 & ; \text{ فردي } k \end{cases} \quad \circ$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1 & ; \text{ زوجي } k \\ -1 & ; \text{ فردي } k \end{cases} \quad \circ$$

$$\cos \theta = \sin \theta \quad \text{يكافئ} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \circ$$

$$\cos \theta = -\sin \theta \quad \text{يكافئ} \quad \theta = \frac{\pi}{4} - k\pi \quad \circ$$

● **علاقات مثلثية هامة:**

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos(\theta) \cos(\alpha) - \sin(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ$$

$$\begin{aligned}
\sin(\theta + \alpha) &= \sin(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ \\
\sin(\theta - \alpha) &= \sin(\theta) \cos(\alpha) - \cos(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ \\
\cos^2(\theta) &= \frac{1}{2} [\cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha)] \quad \circ \\
\sin^2(\theta) &= \frac{1}{2} [\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)] \quad \circ \\
\sin(\theta) \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} [\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta - \alpha)] \quad \circ \\
\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1 \quad \circ \\
\cos(2\theta) &= 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \circ \\
\sin(2\theta) &= 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(-\theta) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(\pi - \theta) &= \sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(\pi + \theta) &= -\sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\pi + \theta) &= -\cos(\theta) \quad \circ \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \sin(\theta) \quad \circ \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin(\theta) \quad \circ \\
\sin(\theta + 2k\pi) &= \sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\theta + 2k\pi) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(\theta + k\pi) &= (-1)^k \sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\theta + k\pi) &= (-1)^k \cos(\theta) \quad \circ
\end{aligned}$$

المرجح في المستوي المركب

2

● المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B و C من المستوي. α ، β و γ أعداد حقيقية.

○ إذا كان: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ فإن G توجد نقطة وحيدة من المستوي تحقق العلاقة الشعاعية التالية:

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

تسمى هذه النقطة مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب، وتسمى أيضا

مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

○ إذا كان: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فإن G تكون مركز ثقل الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

● **خواص المرجح:**

○ إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ فإن النقطة G هي منتصف قطعة المستقيم (AB) .

- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \alpha)\}$ فإن النقط A, B و G على استقامة واحدة.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \alpha); (C; \alpha)\}$ مع $\alpha \neq 0$ وكانت النقط A, B و C ليست على استقامة فإن: G هي مركز ثقل المثلث ABC .
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإن G مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; k\alpha), (B; k\beta); (C; k\gamma)\}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ و H مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(H; \alpha + \beta), (C; \gamma)\}$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإنه من أجل نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإنه من أجل أي نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$$

● لاحقة المرجح:

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإن لاحقة النقطة G تُعطى بالعلاقة:

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

3 الدائرة وخصائصها

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A = a_1 + ia_2$ و $z_B = b_1 + ib_2$ على الترتيب، لدينا:

● المعادلة الديكارتية للدائرة (C) ذات المركز I ذو اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ وطول نصف القطر $r = \frac{\sqrt{|z_B - z_A|}}{2}$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$x^2 + y^2 - x(a_1 + b_1) - y(a_2 + b_2) + a_2 + b_2 = 0$$

● الدائرة المحيطة بالمثلث القائم يكون قطرها هو وتر هذا المثلث.

● الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع يكون مركزها هو ثقل هذا المثلث.

● إذا كان $|z_A - z_W| = |z_B - z_W| = |z_C - z_W| = r$ ، فإن النقط A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز W ونصف القطر r .

4 المستقيم وخصائصه

لتكن النقطت $A(x_A; y_A)$ ، $B(x_B; y_B)$ ، C و D من المستوي.
المعادلة المختصرة لمستقيم تعطى بـ $y = ax + b$ حيث a هو ميل المستقيم أو معامل توجيهه و b الترتيبة عند المبدأ.

- معامل توجيه مستقيم مار من النقطتين A و B غير المتطابقتين يعطى بالعلاقة: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور الفواصل تعطى بالعلاقة التالية: $y = y_A$
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور الترتيب تعطى بالعلاقة التالية: $x = x_A$
- يتوازي مستقيمان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه.
- يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 .
- يتوازي مستقيمان إذا وفقط إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً، ولأجل ذلك يكفي إثبات أحد العلاقات التالية:

$$\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB} \quad \circ$$

$$\text{حيث } \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = t \quad \text{حيث } t \in \mathbb{R}^* \quad \circ$$

- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدين، ولأجل ذلك يكفي إثبات أحد العلاقات التالية:

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \circ$$

$$(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \circ$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \circ$$

$$\text{حيث } \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = ki \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z} \quad \circ$$

- لاثبات أن النقط A ، B و C في استقامة، يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً

5 التعرف على طبيعة مثلث

● المثلث القائم:

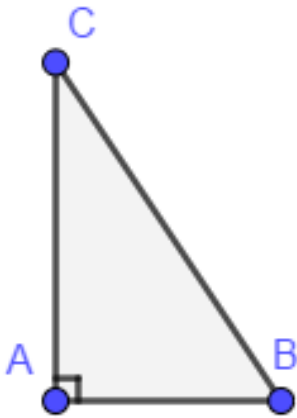
إذا كان: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = iy$ حيث: $y \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

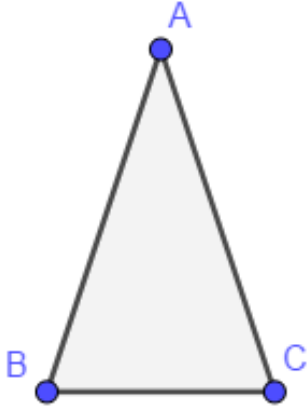
فإن: المثلث ABC قائم في A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(iy) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$



● المثلث متساوي الساقين:



إذا كان: $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

حيث: $\theta \neq \left\{\pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{\pi}{3}\right\}$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

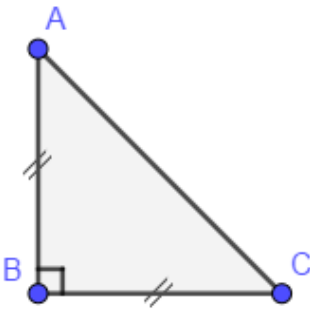
فإن: المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

● المثلث القائم ومتساوي الساقين:



مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

إذا كان: $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \pm i$

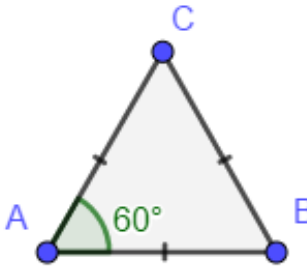
فإن: المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = |\pm i| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(\pm i) = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

● المثلث المتقايس الأضلاع:



إذا كان: $\left\{\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

فإن: المثلث ABC متقايس الأضلاع رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

● ملاحظات هامة:

- الارتفاع هو قطعة مستقيم تكون صادرة من رأس من رؤوس المثلث و تكون عمودية على الضلع المقابل و يمثل الارتفاع البعد بين الرأس و الضلع المقابل كما تتقاطع الارتفاعات في نقطة تسمى المركز القائم.

- المحور هو مستقيم يمر من أحد أضلاع المثلث في منتصفه و يكون عمودياً عليه و تتلاقى محاور مثلث في نقطة تسمى مركز الدائرة المحيطة بمثلث و يكون لهذه النقطة نفس البعد عن رؤوس المثلث الثلاث و يكون تقاطع محورين فقط كافياً لمعرفة مركز هذه الدائرة.

○ **المتوسط** هو قطعة مستقيم تنطلق من رأس من رؤوس المثلث و تمر من منتصف الضلع المقابل وتتقاطع المتوسطات الثلاث في نقطة تسمى مركز ثقل المثلث و يكون تقاطع متوسطين فقط كافيا لمعرفة مركز الثقل. كما يكون البعد بين رأس المثلث و مركز الثقل مساويا لـ $\frac{2}{3}$ المتوسط الصادر من ذلك الرأس.

○ **المنصف**: هو مستقيم يمرّ من رأس من رؤوس المثلث و يقسم الزاوية إلى نصفين و تتقاطع المنصفات الثلاثة في مركز الدائرة المحاطة بالمثلث وهي الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاث.

6 التعرف على طبيعة رباعي

● متوازي الأضلاع:

$ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو $z_B - z_A = z_C - z_D$

○ القطران متناصفان أي:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

● المربع:

$ABCD$ مربع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ إذا تحققت الشروط الثلاثة معا:

• أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو $z_B - z_A = z_C - z_D$

• أي: $AB = AD$ أو $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

• أي: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$

○ القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي إذا تحققت الشروط

الثلاثة التالية:

• $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

• $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$

• $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

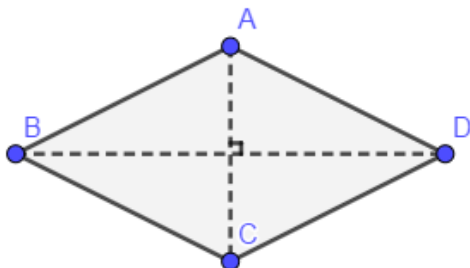
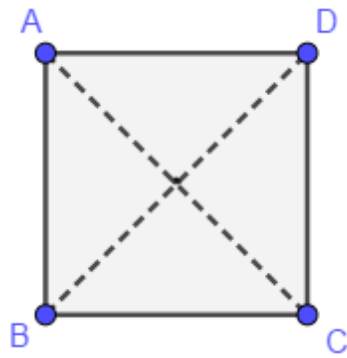
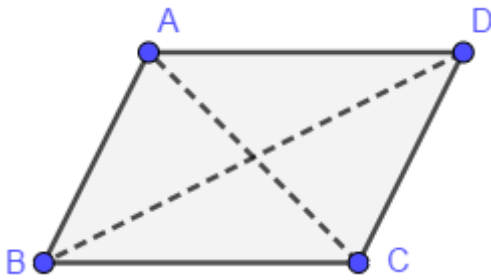
● المعين:

$ABCD$ معين إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

• أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو $z_B - z_A = z_C - z_D$

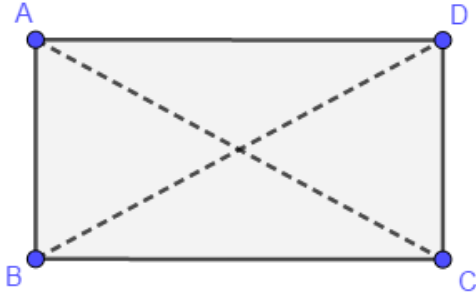
• أي: $AB = AD$ أو $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$



○ القطران متناصفان ومتعامدان أي إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \quad \bullet$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \bullet$$



● المستطيل:

ABCD مستطيل إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{أي} \quad z_B - z_A = z_C - z_D \quad \bullet$$

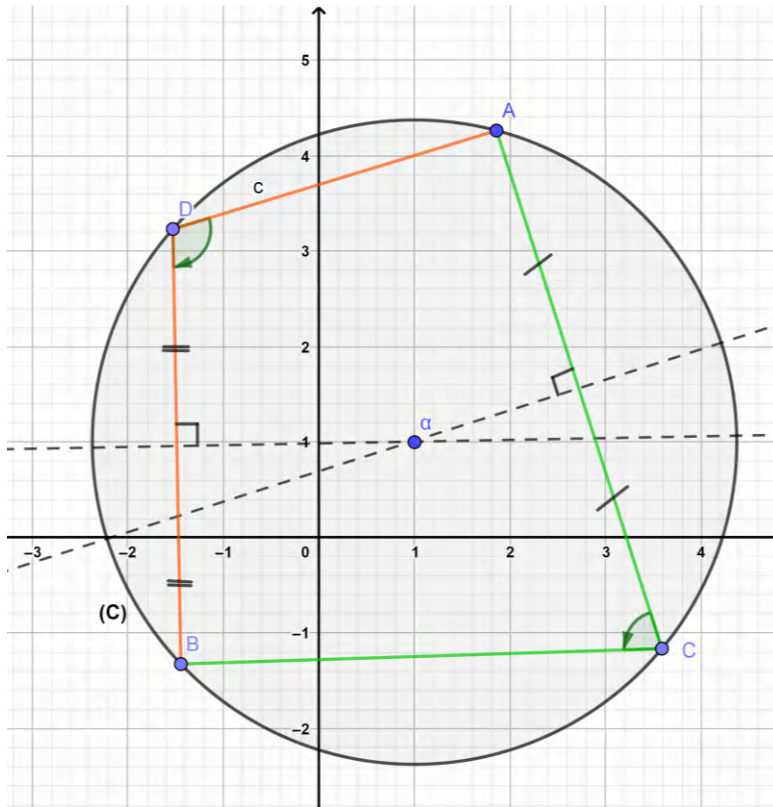
$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{أي} \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \bullet$$

○ القطران متناصفان ومتساويان أي إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \quad \bullet$$

$$|z_B - z_A| = |z_D - z_A| \quad \bullet$$

● نتيجة:



تكون النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

أي: $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ ○
 $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$
وهذا معناه أن الزاويتان $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB})$ متكاملتان.
أو: ○

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \cdot \left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right) = \alpha ; \alpha \in \mathbb{R}$$

المعادلات في $\mathbb{C}$

7

● المعادلة $z^2 = a$: حيث: $a \in \mathbb{R}^*$

○ إذا كان $a > 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = \sqrt{a}$ ، $z = -\sqrt{a}$
○ إذا كان $a < 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = i\sqrt{-a}$ ، $z = -i\sqrt{-a}$

● المعادلة $az^2 + bz + c = 0$: حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى المميز.

○ إذا كان $\Delta > 0$ فإن للمعادلة حلين مختلفين هما:

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta = 0$ فإن للمعادلة تقبل حل حقيقي مضاعف هو:

$$z = -\frac{b}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta < 0$ فإن للمعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين ومختلفين هما:

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

● نتائج:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \quad \circ$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \circ \quad \text{و} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

مجموعات النقط في المستوي المركب

8

لنعتبر في كل ما سيأتي أن A, B و M نقط من المستوي المركب لاحقاتها على الترتيب: z_A, z_B و z

مع $a; z_0 \in \mathbb{C}^*$: $|az - z_A| = |z_0|$ ●

○ إذا كان $a = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_0|$

$$(AM = r \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z_0|)$$

○ إذا كان $a \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $\frac{z_0}{a}$ ونصف قطرها

$$r = \left| \frac{z_0}{a} \right|$$

مع $z_A \neq z_B$ و $k \in \mathbb{C}$: $|z - z_A| = |kz_0 - z_B|$ ●

○ إذا كان $k = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_B|$

○ إذا كان $k = 1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB)

$$(AM = BM \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z - z_B|)$$

○ إذا كان $k = -1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB') ، حيث B' لاحقها

$$\text{هي: } z_{B'} = -z_B$$

$$(AM = B'M \text{ يكافئ } |z - z_A| = |-z - z_B| = |-(z - (-z_B))| = |z - z_{B'}|)$$

○ إذا كان $k \in \mathbb{C}^*$ و $|k| \neq 1$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة قطرها $[GH]$ ، حيث G

هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (E; -k)\}$ و H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (E; k)\}$ مع E

$$\text{نقطة لاحقها } z_E = \frac{z_B}{k}$$

مع $z_0 \in \mathbb{C}$: $(z - z_A)(\overline{z - z_A}) = |z_0|$ ●

○ إذا كان $z_0 \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = \sqrt{|z_0|}$

○ إذا كان $z_0 = 0$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة A .

$$(z - z_A)(\overline{z - z_A}) = 0 \text{ وعليه } (z - z_A) = 0 \text{ أو } \overline{(z - z_A)} = 0 \text{ هذا يعطينا } z = z_A \text{ أو } \overline{z} = \overline{z_A}$$

مع $z \neq z_A \neq z_B$ و $\theta \in \mathbb{R}$: $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \theta$ ●

○ إذا كان $\theta = 0 + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء

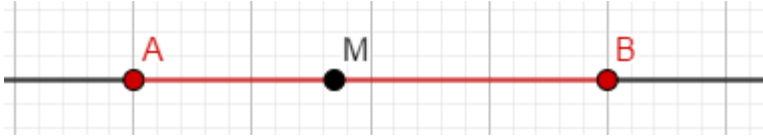
القطعة المستقيمة $]AB[$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

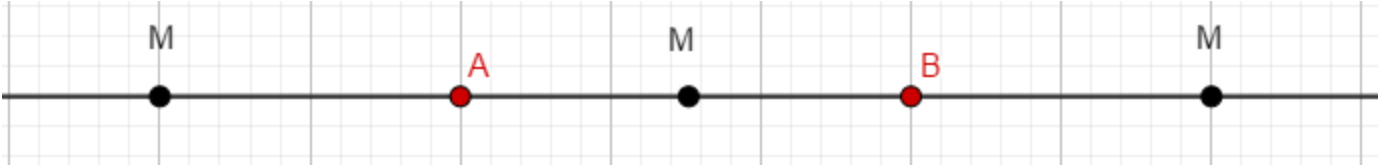
○ إذا كان $\theta = \pi + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي القطعة المستقيمة $]AB[$

باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

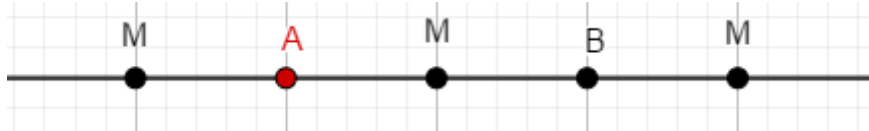
- إذا كان $\theta = 0 + k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

مع $z \neq z_A$: $L = \frac{z - z_B}{z - z_A}$ ●

- إذا كان L حقيقي فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A ونرمز لها بالرمز $(AB) - \{A\}$.



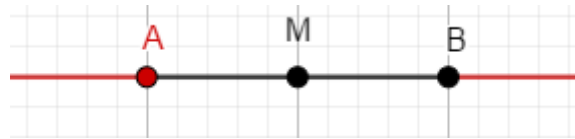
- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

- إذا كان L حقيقي موجب فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB[$ ، ونرمز لها بالرمز $(AB) - [AB[$.

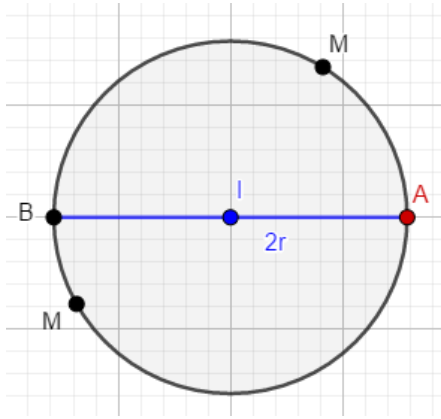


- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

- إذا كان L حقيقي سالب فإن مجموعة النقط M من المستوي هي قطعة المستقيم $[AB]$ باستثناء النقطة A ، ونرمز لها بالرمز $[AB] - \{A\}$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

- إذا كان L تخيلي صرف: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطه I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطه A

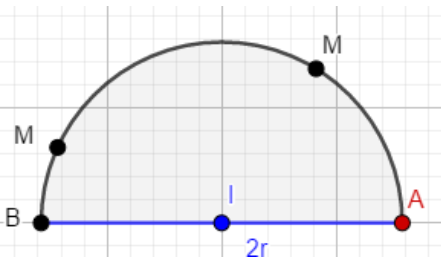
- إذا كان L تخيلي موجب: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع فوق المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطه I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطه A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

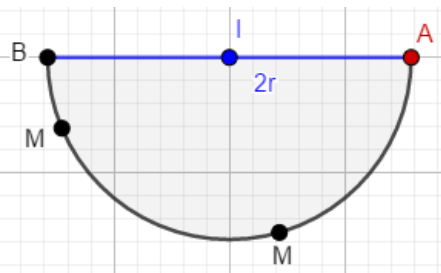
- إذا كان L تخيلي سالب: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع تحت المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطه I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطه A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

مع $z \neq z_A$: $\arg(z - z_A) = \overline{\arg(z - z_A)}$

- مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AM) الموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطه A .

● مع $\theta \in \mathbb{R}$ (متغير) و $q \in \mathbb{R}^*$ (معلوم): $z = z_A + qe^{i\theta}$

مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة A وطول نصف قطرها r حيث: $r = |q|$

● مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير): $z = z_A + qe^{i\theta}$

○ إذا كان: $q \in \mathbb{R}$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع

توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

○ إذا كان: $q \in \mathbb{R}_+$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A

وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

○ إذا كان: $q \in \mathbb{R}_-$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع

توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + (2k + 1)\pi ; k \in \mathbb{Z}$

● مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير): $\arg(z - z_A) = \arg(qz - z_B)$

○ إذا كان: $q = 1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B

○ إذا كان: $q = -1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB') باستثناء النقطتين A و B'

مع B' مع $z'_B = -z_B$

○ إذا كان: $q = i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع فوق المستقيم

(AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات

اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$

○ إذا كان: $q = -i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع تحت المستقيم

(AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات

اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$

● توجيه :

إذا صعب عليك تعيين مجموعة النقط فاستعمل الطريقة التحليلة وذلك بوضع $z = x + iy$ ، وركز جيدا في النشر والتبسيط والحساب.

التحويلات النقطية في المستوي المركب

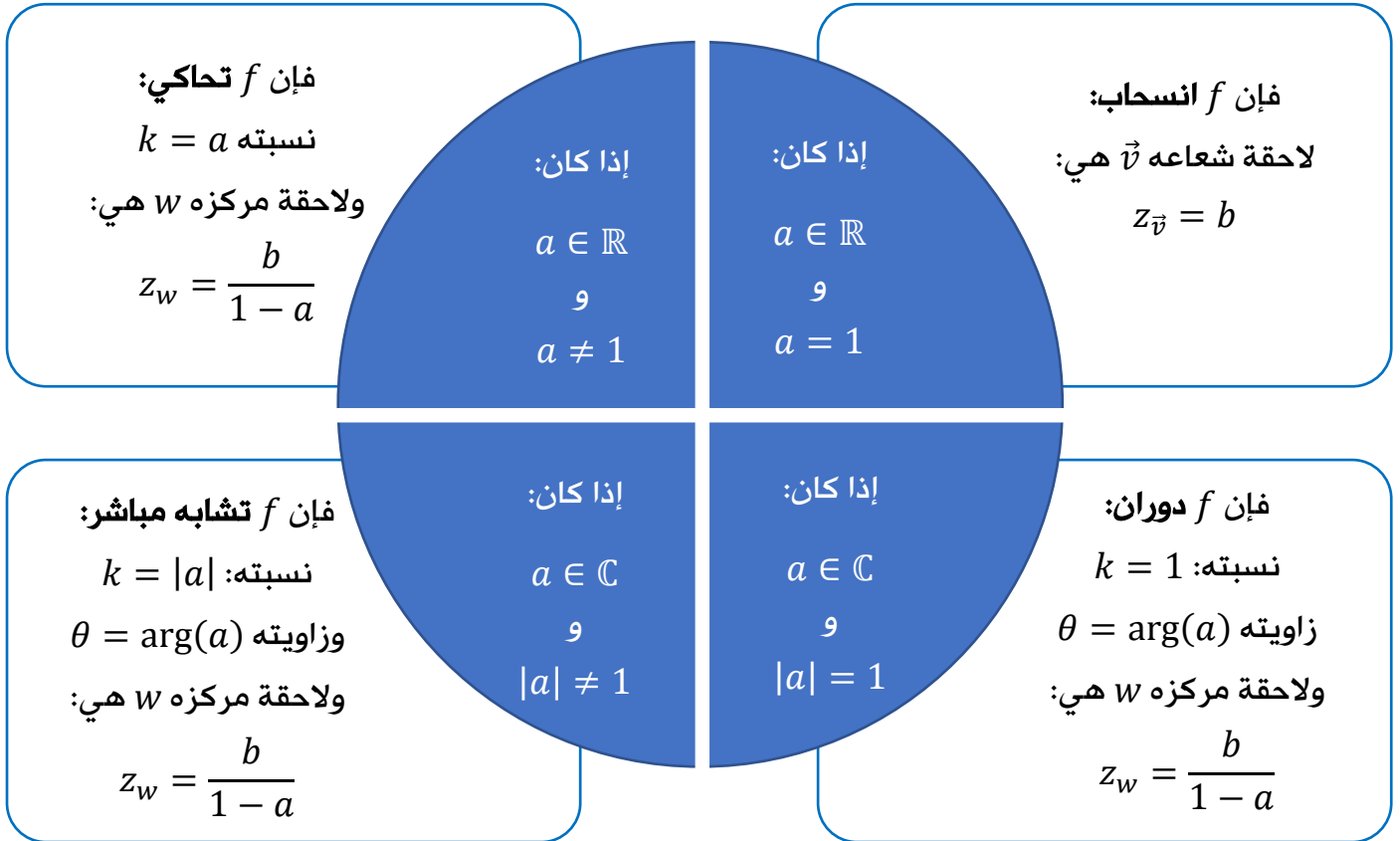
9

f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ والمعرف كما يلي:

$$f(z) = az + b$$

M' هي صورة النقطة M : $M' = f(M)$

● في حالة الشكل المركب: $z' = az + b$:



● في حالة الشكل المركب: $z' - z_w = a(z - z_w)$:

- f تحاكي: نسبته k ولاحقة مركزه z_w . عبارته المركبة: $z' - z_w = k(z - z_w)$
- f دوران: زاويته θ ولاحقة مركزه z_w . عبارته المركبة: $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$
- f تشابه مباشر: نسبته k وزاويته θ ولاحقة مركزه z_w . عبارته المركبة: $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$

● **تعيين تحويل نقطي يحول نقطتين :**

يطلب السؤال بالشكل التالي:

أوجد طبيعة التحويل R الذي يحول النقطة A إلى النقطة B ويحول النقطة C إلى النقطة D مع تعيين عناصره المميزة.

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \dots (1) \\ z_D = az_C + b \dots (2) \end{cases}$$

ب طرح (2) من (1) نجد: $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

من a نعين طبيعة التحويل R ، بعد ذلك نعوض قيمة a في (1) أو (2) ثم نجد العناصر المميزة للتحويل R .

● الاستنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل:

إذا كان $a = \frac{z_B - z_W}{z_A - z_W}$ فإن: $z_B - z_W = a(z_A - z_W)$ وهذا يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A بالتحويل الذي مركزه W ، ويتم تحديد طبيعة التحويل من خلال قيمة a كما ذكرنا سابقاً.

● تركيب التحويلات النقطية:

- تركيب عدة انسحابات هو انسحاب، شعاعه هو مجموع أشعتها.
- تركيب عدة تحاكيات لها نفس المركز هو تاحكي، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب.
- تركيب عدة دورانات لها نفس المركز هو دوران، له نفس المركز، وزاويته هي مجموع الزوايا.
- تركيب عدة تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب وزاويته هي مجموع الزوايا.
- إذا اختلفت مركز التحويلات النقطية أو كانت من طبائع مختلفة، نتعرف على طبيعة مركباتها باستعمال العبارة المركبة ونستعمل نفس الطريقة المستخدمة في تركيب الدوال العددية.

◀ موسوعة الخليل في الأعداد المركبة ▶



تطبيقات للتمرّن

◀ 22 تطبيق ▶

التطبيق

01

تعيين الشكل الجبري

1 اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

$$z_1 = (2 + i\sqrt{3})(5 - i) + \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^2 \quad ①$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{3} + 2i} \quad ②$$

$$z_3 = \frac{1+4i}{1-\sqrt{2}i} \quad ③$$

التطبيق

02

حساب قوى العدد

1 احسب: i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8

2

1 اثبت انه اذا كان العدد الطبيعي غير المعدوم n من مضاعفات 4 فإن $i^n = 1$.

2 عين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، i^n ، ثم استنتج i^{2021} .

التطبيق

03

تعيين مجموعة النقط

نعتبر العدد المركب $z = x^2 + y^2 - 4 + i(2x + y + 1)$ ، حيث x و y .

1 عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_1) للنقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون z عدد حقيقي.

2 عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_2) للنقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون z تخيلي صرف.

التحقيق

04

الاثبات دون حساب

ليكن العددين المركبان $z_1 = \frac{3-i}{5+7i}$ ، $z_1 = \frac{3+i}{5-7i}$

1 تحقق أن: $z_2 = \overline{z_1}$.

2 استنتج دون اجراء حساب أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي وأن $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف.

3 احسب $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ وتحقق من صحة هذه النتائج.

التحقيق

05

استعمال الخواص والعمليات على المرافق

$P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ هو كثير حدود معرف في $\mathbb{C}$ بـ:

1 اثبت أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

2 تحقق أن: $(1+i)$ جذر لكثير الحدود P . ثم استنتج جذرا آخر لـ P .

التحقيق

06

تعيين مجموعة نقطه بصريتين

• عين في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $Z = z^2 + \overline{z}$ حقيقي.

التحقيق

07

قراءة لصيغة وعمدة عدد مركب

• مثل في المستوي المركب النقط ذات اللواحق التالية: 3 ، $2i - 4$ ، $-1 + i$ ، $2 - 2i$

ثم بدون حساب، وباعتبارات هندسية، اعطِ الطويلة وعمدة لكل عدد.

التحقيق
08

الانتقال من الشكل الجبري
إلى الشكل المثلثي

- 1 عين الطويلة وعمدة العدد المركب $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$
- 2 استنتج الشكل المثلثي للعدد z

التحقيق
09

التعرف على الشكل المثلثي
لعدد مركب

في كل حالة من الحالات التالية، جد الطويلة وعمدة للعدد المركب z :

$$z = -2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) \quad 1$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad 2$$

$$z = \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \quad 3$$

التحقيق
10

حساب قوى عدد مركب

$$z = (1 - i\sqrt{3})^5 \quad 1 \text{ اعطِ الشكل الجبري للعدد المركب}$$

$$z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3} \quad 2 \text{ اعطِ الشكل الجبري للعدد المركب}$$

التحقيق
11

مقارنة كتابة عددين مركبين
واستنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

$$1 \text{ اكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية } z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 1 - i, z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

② اكتب Z على الشكل الجبري واستنتج القيم المضبوطة لـ $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

التطبيق

12

تعيين مجموعة أعداد صحيحة

① n عدد طبيعي، نضع $z = (\sqrt{3} + i)^n$.

② عين عمدة للعدد المركب z .

③ استنتج المجموعة (E) قيم n التي يكون من أجلها z عدد حقيقي موجب تماماً.

التطبيق

13

الانتقال من شكل إلى آخر

في كل حالة، اكتب العدد المركب z على الشكل الأسّي، ثم استنتج الشكل الجبري لكل من $\bar{z}$ و $\frac{1}{z}$.

① $z = \frac{1}{1+i}$

② $z = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}}$

③ $z = -7e^{i\frac{\pi}{6}}$

التطبيق

14

استعمال الأشكال المختلفة لعدد مركب

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، (وحدة الرسم : $4cm$).

نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللواحق على الترتيب: $a = 1$ ، $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

① اكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري.

②

① مثل النقط A, B, C و D في المعلم السابق.

② برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين.

التصديق
15

حل معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول z : $z^2 - 2(\sin \theta) + 1 = 0$ ، حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0; \pi[$.

① تحقق أن $\Delta = -4 \cos^2 \theta$.

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المقترحة وتحقق أن حلول هذه المعادلة، تكتب: $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$ و $z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

التصديق
16

حل معادلة من الدرجة الرابعة بمعاملات حقيقية

نعتبر كثير الحدود: $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$

① اثبت أنه يوجد كثير حدود $Q(x)$ من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية حيث أنه من أجل كل عدد مركب z

$$P(z) = (z^2 + 1)Q(x)$$

② استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z) = 0$.

التصديق
17

حل معادلة باستعمال الشكل الجبري

• حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - \bar{z} + \frac{1}{4} = 0$

التصديق
18

استعمال نسبة أعداد مركبة

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب: $a = -2$ ، $b = 2$ ، $c = -1 + i$ و $d = 1 - 3i$.
 • اثبت أن المثلثين BCD و ACD قائميين.

التحقيق

19

تعيين مجموعة نقط

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A = 1 + i$ و $z_B = 2i$.
 نرفق بكل عدد مركب z ، $z \neq z_A$ العدد المركب

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

- ① عين المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ ، حيث $|z'| = 1$.
- ② عين المجموعة (Ω) للنقط $M(z)$ ، حيث z حقيقي .
- ③ عين المجموعة (Δ) للنقط $M(z)$ ، حيث z تخيلي صرف

التحقيق

20

استعمال العبارة المركبة للتحاكي

- h هو التحاكي الذي نسبته 2 ومركزه النقطة I ذو اللاحقة $1 + i$. لتكن النقطة A ذات اللاحقة $(-1 - 2i)$.
- ① عين العبارة المركبة للتحاكي h .
 - ② عين لاحقة النقطة A' صورة A بالتحاكي h .

التحقيق

21

استعمال العبارات المركبة

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D و الشعاع $\vec{\omega}$ ذات اللواحق:

$$z_{\vec{\omega}} = -1 + \frac{5}{2}i , z_D = 3 + 2i , z_C = -3 - \frac{1}{4}i , z_B = \frac{3}{2} - 6i , z_A = \frac{3}{2} + 6i$$

h هو التحاكي الذي مركزه C ونسبته $-\frac{1}{3}$ ، t هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ و r هو الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

1 احسب لواحق النقط: $E = t(B)$ ، $F = h(D)$ و $G = r(D)$.

2 اثبت أن المثلث DEF قائم ومتساوي الساقين، واستنتج طبيعة الرباعي $DEFG$.

التحقيق

22

استعمال البرهان هندسيا

في المستوي المركب، ABC هو المثلث بحيث القيس الرئيسي للزاوية $(\overline{AB}; \overline{AC})$ ينتمي إلى $]0; \pi[$.
 • أنشئ خارج هذا المثلث، المربعين $ACRS$ و $BAMN$ ثم متوازي الأضلاع $MASD$ (وليكن I مركزه)

الهدف من التمرين هو اثبات أن المستقيم (AD) هو ارتفاع للمثلث ABC وأن $AD = BC$
 لهذا نستعمل طريقتين:

• ط1: استعمال الاعداد المركبة:

a, b و c هي لواحق على الترتيب للنقط A, B و C

1 احسب لواحق النقطتين S و M بدلالة a, b و c .

2 احسب لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

3 اثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان، وأن $AD = BC$.

• ط2: طريقة هندسية:

ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

1 ما هي صور النقط M و C بالدوران r ؟

2 S' هي صورة S بالدوران r ، اثبت أن النقطة A هي منتصف القطعة المستقيمة $[CS']$.

3 I' هي صورة I بالدوران r ، اثبت أن النقطة I' هي منتصف القطعة المستقيمة $[BS']$.

4 استنتج ان المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (BC) وأن $AD = BC$.

◀ موسوعة الخليل في الأعداد المركبة ▶



تمارين ومسائل
للتعمق:

◀ 17 تمرين ▶

التمرين

01

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C ذات اللاحقات

$$z_C = \overline{z_B} \quad \text{و} \quad z_B = 3 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_A = 4$$

- ① عين الطويلة وعمدة للعدد z_B واستنتج طويلة وعمدة لـ z_C .
- ② نعتبر العدد المركب $(z_B - z_A)$. اكتب هذا العدد على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.
- ③ عين طويلة وعمدة للعدد $\frac{z_B}{z_B - z_A}$ ، واستنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_C}{z_C - z_A}$.
- ④ استنتج أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديدها.

التمرين

02

نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطتين A و B ذات

$$a = 5 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad b = 4 + 2i\sqrt{3} \quad , \quad \text{ولتكن } C \text{ منتصف } [OB].$$

- ① عين d لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
- ② اثبت أن: $\frac{d-a}{d}$ تخيلي صرف، ما ذا تستنتج بالنسبة للمثلث ODA ؟
- ③ لتكن النقطة E ذات اللاحقة $e = \frac{2a}{3}$ ، احسب $\frac{d-b}{d-c}$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقط B ، E و D ؟

التمرين

03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،

- ① نعتبر التحويل النقطي h الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 3z + 4 - 6i$$

- ① حدد طبيعة التحويل h وعناصره المميزة.
- ② اكتب z بدلالة z' ؟
- ③ (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق $|z + 2 - 3i| = 1$. حدد المجموعة (Γ) ثم استنتج أن صورتها بالتحويل h هي دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

② A, B, C و D هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_D = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \quad \text{و} \quad z_C = -2 + 3i \quad , \quad z_B = 4 - 3i \quad , \quad z_A = i$$

① بين أن النقطة D هي نقطة من حامل محور الفواصل يطلب تعيين فاصلتها.

② ما طبيعة المثلث ABC مع التبرير؟

04

التمرين

$P(z) = (z + 1 + i)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64)$ كثير حدود حيث:

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$ ، ثم اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

② نضع $a = -1 - i$ و $b = 4\sqrt{3} - 4i$

① اكتب $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

② استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

③ بين أن العدد $\left(\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{a}{b}\right)^{144}$ حقيقي.

④ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A و B لواحقها

على الترتيب a و b .

• عين لاحقة النقطة C حتى تكون النقطة O مركز ثقل المثلث ABC .

05

التمرين

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$.

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D ذات

اللواحق بهذا الترتيب:

$$z_D = 3 \quad \text{و} \quad z_B = 2z_B \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = 1 + i$$

• علم هذه النقط في المعلم.

③ اثبت أن النقط الثلاثة A, B و C تنتمي إلى دائرة مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

④ احسب $\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .

⑤ نعتبر النقطة C' صورة C بالتحاكي الذي مركزه D ونسبته 2 والنقطة E صورة النقطة F بالدوران الذي

مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- اثبت أن المستقيمين (AC) و (EF) متعامدان.

06

التمرين

نعتبر من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

1

① عين العدد الحقيقي b بحيث يكون: $P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + 4)$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر الأعداد المركبة:

$$z_2 = \sqrt{2}(-1 - i), \quad z_1 = \sqrt{2}(-1 + i), \quad z_0 = 2$$

① عين الطويلة وعمدة لكل من z_1 و z_2 .

② علم النقط A, B و C ذات اللواحق z_0, z_1 و z_2 على الترتيب، ثم النقطة I منتصف $[AB]$.

③ اثبت أن المثلث OAB متساوي الساقين، ثم استنتج قياس للزاوية $(\vec{u}; \overline{OI})$.

④ احسب z_I لاحقة النقطة I ، ثم طويلة z_I .

⑤ استنتج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

07

التمرين

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

① من أجل كل عدد مركب z ، $Re(z^2) = (Re(z))^2$.

② z عدد مركب غير معدوم، في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة

A, B و C ذات اللواحق $z, \bar{z}$ و $\frac{z^2}{z}$ على الترتيب من نفس الدائرة ذات المركز O .

③ من أجل كل عدد مركب z :

$$Im(z) = 0 \quad \text{فإن} \quad |1 + iz| = |1 - iz|$$

④ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، z و z' عدنان مركبان غير معدومين.

M و M' نقطتان لاحقتيهما z و z' على الترتيب.

إذا كان $|z + z'| = |z - z'|$ فإن: المستقيمين (OM) و (OM') متعامدان.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 3z + 3 = 0$

② نسمي z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

• اكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^6$ على الشكل الأسّي ثم احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^6$

② M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' نقطة من المستوي لاحقتها z' حيث: $z' = z^2 - 4z$

A, B و I ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب هي:

$$z_A = 2, z_B = -4 \text{ و } z_I = -3$$

① احسب $(z' + 4)$ بدلالة $(z - 2)$ ، ثم استنتج $|z' + 4|$ بدلالة $|z - 2|$ و $\arg(z' + 4)$ بدلالة

$$\arg(z + 2)$$

② برهن أنه إذا كانت النقطة M من الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2 فإن النقطة M' هي من دائرة

يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ برهن أنه إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عمودياً على الشعاع $\vec{u}$ فإن الشعاع $\overrightarrow{BM'}$ مواز للشعاع $\vec{u}$.

④ عين قيم العدد المركب z حتى يكون الرباعي $OMIM'$ متوازي الاضلاع.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A, B و C التي

لاحقاتها على الترتيب

$$z_A = 3 - 2i, z_B = 3 + 2i \text{ و } z_C = 4i$$

1

① علم النقط A, B و C .

② ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل اجابتك.

③ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$

② عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$$

3

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 13 = 0$ (نسمي z_1, z_0 حلي هذه المعادلة).

② لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

10

التمرين

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر في هذا المستوي النقطة A ذات اللاحقة 1، النقطة B ذات اللاحقة b حيث b هو عدد مركب جزؤه التخيلي موجب تاماً. ننشئ خارج المثلث OAB ، المربعان المباشرين $OBEF$ و $ODCA$ كما هو موضح في الشكل المقابل:

① عيّن الاحقتان c و d للنقطتين C و D على الترتيب.

② ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين الكتابة المركبة للدوران r

② استنتج أن اللاحقة f للنقطة F تساوي ib .

③ عين اللاحقة e للنقطة E .

③ نسمي G النقطة التي من أجلها يكون الرباعي $OFGD$ متوازي أضلاع.

• اثبت أن اللاحقة g للنقطة G تساوي $i(b - 1)$.

④ اثبت أن: $i = \frac{e-g}{c-g}$ ، ثم استنتج أن المثلث EGC قائم ومتساوي الساقين.

11

التمرين

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z حيث $z \neq 2 - 3i$:

$$z = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i} \dots (E)$$

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

② في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين

$$b = \bar{a} \text{ و } a = 1\sqrt{5}i$$

• تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يُطلب تعيين نصف قطرها.

③ نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ($z \neq 2 - 3i$) النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$$z' = \frac{3i(z + 2i)}{z - 2 + 3i}$$

والنقط C, D و E لواحقها على الترتيب: $c = -2i$ ، $d = 2 - 3i$ و $e = 3i$

و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

① عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

② استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها

ونصف قطرها، تحقق أن E تنتمي (γ) .

التمرين 12

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B و C لاحقاتها على

$$\text{الترتيب: } z_A = 1 - i, z_B = -1 + i, \text{ و } z_C = \sqrt{3}(1 + i).$$

① اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة z_A, z_B و z_C .

②

① احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

② حدد طبيعة المثلث ABC .

③ عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACDB$ معيناً.

④ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (-1 + i)z + 1 - 3i$$

① عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

② عين العبارة المركبة للتحويل $T \circ T$ ، ثم استنتج طبيعته وعناصره المميزة.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$

② علم النقط A, C, D و I ذات اللاحقات: $z_I = 1$ و $z_D = -3 - i, z_C = -3 + i, z_A = 3 - 2i$

③ z عدد مركب يُحقق الجملة:

$$\begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases}$$

① بين أن الجملة تكافئ:

$$\frac{z - 3 + 2i}{z - 1} = i$$

ثم عين العدد المركب z

② B هي النقطة ذات اللاحقة $z_B = 3$ ، تحقق أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ، ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

③ لتكن E النقطة ذات اللاحقة $z_E = 1 - 2i$.

• اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب Z حيث:

$$Z = \frac{z_A - z_E}{z_B - z_E}$$

• تحقق أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI}$. ما طبيعة الرباعي $ABIE$.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

① L هو العدد المركب حيث: $L = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$.

① احسب L^2 ، ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب L^2 .

② استنتج الطويلة وعمدة للعدد L واكتبه على الشكل المثلثي.

③ عين القيم المضبوكة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

④ α هو العدد المركب حيث $\alpha = \frac{L}{2+2i}$ ، بين أن $\alpha = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

② T هو التحويل النقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث: $z' = -2\alpha z$.

① حدد طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

② A و B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ (هو مرافق z_A)

• عين لاحقتي النقطتين A' و B' صورتين النقطتين A و B بالتحويل T .

③ (γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z - \sqrt{3} + i| = 2$.

① بين أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (γ) .

② عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) صورة المجموعة (γ) بالتحويل T .

التمرين 15

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

② نعتبر النقط A ، B و M ذات اللاحقات: $2z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب.

① اكتب z_A على الشكل الأسّي.

② عين مجموعة النقط من المستوي حيث:

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

③

① التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = z_A z + z_B \sqrt{3}$

• ما طبيعة التحويل r . عين عناصره المميزة.

② التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = -2z + 3i$

• عين نسبة ومركز التحاكي h

③ نضع $S = h \circ r$. عين طبيعة التحويل s مبرزا عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$$

④ نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E حيث:

$$S(D) = E \text{ و } S(C) = D \text{ ، } S(O) = C$$

• بين أن النقط O ، Ω و E في استقامة.

⑤

① عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث:

$$z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

حيث θ عدد حقيقي.

التمرين 16

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$

وأعط الحل على شكلها الجبري والأسّي (مع التبرير)

② لتكن النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1 + i$ و $z_B = 2i$

نرفق لكل عدد مركب z يختلف عن z_A العدد المركب:

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

① لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عدد تخيلي صرف. عين وأنشئ المجموعة (E) .

② لتكن (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'| = 1$. عين وأنشئ المجموعة (F) .

③ ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

① أحسب لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران R ولاحقة النقطة I' صورة النقطة $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ بهذا الدوران.

② ما هي صور كل من المجموعتين (E) و (F) بالدوران R .

التمرين 17

اختر الإجابات الصحيحة في كل ما يأتي مع التعليل:

في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

① لتكن المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}^*$

① (E) هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة $1 - 2i$

② (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1 + 2i$ ونصف قطرها 1.

③ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1 - 2i$ ونصف قطرها 1.

④ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1 - 2i$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

② ليكن f التطبيق الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = -iz - 2i$.

① التطبيق f هو تحاكي.

② النقطة ذات اللاحقة $2i - 1$ هي سابقة للنقطة ذات اللاحقة i .

③ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $1 + i$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

④ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $-1 - i$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

③ لتكن المجموعة (F) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$$

وليكن A, B و C النقط ذات اللواحق $1 - i, -1 + 2i$ و $-1 - 2i$ على الترتيب.

① النقطة C هي نقطة من المجموعة (F) .

② (F) هي محور القطعة $[AB]$.

③ (F) هي محور القطعة $[AC]$.

④ (F) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

④ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z + |z|^2 = 7 + i$ ، هذه المعادلة تقبل:

① حلين متميزين حيث جزؤهما التخيلي يساوي 1.

② حلا حقيقيا.

③ حلين متميزين حيث الجزء التخيلي لأحدهما فقط يساوي 1.

④ حلا حيث جزؤه التخيلي يساوي 2.

◀ موسوعة الخليل في الأعداد المركبة ▶



تمارين بكالوريات سابقة:

شعبة علوم تجريبية

◀ 28 تمرين ▶

5

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث: $|z_1| < |z_2|$ ② بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.⑥ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن A ، B و C نقط من المستوي التي لاحقاتهاعلى الترتيب 1، z_1 و z_2 .وليكن Z العدد المركب حيث: $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ ① انطلاقا من التعريف $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ومن الخاصية: $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ برهن أن: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ حيث: θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.② اكتب Z على الشكل الأسّي.③ أكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يُطلب

تعيين زاويته ونسبته.

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

② نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطتين A و B التين لاحقاتهما z_A و z_B على الترتيب. حيث:

$$z_B = -2 - 2i \quad \text{و} \quad z_A = 2 + i$$

• عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

③ لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

• اكتب z_C على الشكل الجبري، ثم اثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4

① برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k ($k > 0$) وزاويته θ والذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$

② تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعروف بـ:

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z + \frac{1}{2}i \right)$$

5ن

بكالوريا 2009

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين

03

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ و z عدد مركب.

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

② نضع: $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ و $z_1 = 1 + i$

① أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

② اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

③ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3

① n عدد طبيعي، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

② احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

4ن

بكالوريا 2009

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

التمرين

04

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

① حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$.

② نسمي z_1 و z_2 حلي هاته المعادلة

① اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

② A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{3}) \quad , \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

($i^2 = -1$ الذي يحقق)

• احسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

③ جد طويلة وعمدة العدد المركب Z حيث:

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$$

④ احسب Z^3 و Z^6 ، ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

5

بكالوريا 2010

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين
05

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقيهما على

الترتيب: $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$.

① اكتب على الشكل الأسّي: z_A و z_B .

② ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

① عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

② عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

③ استنتج طبيعة المثلث ABC .

③ لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$

① عين z_D لاحقة النقطة D .

② عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

④ لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ، ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z

التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

① تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

② اعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ)

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسّي.
- ② في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_D = -z_B, z_C = -z_A, z_B = \overline{z_A}, z_A = 3 + 3i$.
- ① بين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائري ذات المركز O مبدأ المعلم.
- ② عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B .
- ③ بين أن النقط A, O و C في استقامية وكذلك النقط B, O و D .
- ④ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

- نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_C = -4 + i, z_B = 2 + 3i, z_A = -i$.
- ① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
- ② عين طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدته، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- ② نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق لكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$.
- ① عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.
- ② ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .
- ③ لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$.
- ① بين أن النقط A, C و D في استقامية.
- ② عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C إلى النقطة D .
- ③ عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D .

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و C التي لواحقتها على

$$\text{الترتيب: } z_A = 3 - 2i, \quad z_B = 3 + 2i, \quad z_C = 4i$$

1

① علم النقط A, B و C .

② ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك.

③ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

② عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|$.

3

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$

نسوي z_0, z_1 حلي هذه المعادلة.

② لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z .

• عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$.

① نعتبر مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث: $z \neq 2 - 3i$)

• حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

② ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب:

$$z_A = 1 + i\sqrt{5} \text{ و } z_B = 1 - i\sqrt{5}$$

• تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

③ نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C, D, E لواحقتها على الترتيب: $z_B = -2i, z_D = 2 - 3i, z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

① عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

② استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

4.5ن

بكالوريا 2012

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

التمرين

10

① $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$.

① تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

② جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

③ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي المركب

لواحقتها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.

① اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC .

③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① جد الكتابة المركبة للتشابه S .

② عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

③ بيّن أن النقط A ، B و A' في استقامية.

5ن

بكالوريا 2013

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين

11

① حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$$(1) \dots z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \text{ حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي.}$$

② من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2

$$\bullet \text{ بين أن } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$$

③ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و C التي لواحقها:

$$z_C = 4 + i\sqrt{3}, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_A = 1 + i\sqrt{3}$$

① أنشئ النقط A, B و C .

② اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي

مركزه A ويطلب نعين نسبته وزاويته.

③ عين لاحقة النقط G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$ ، ثم أنشئ G .

④ احسب z_D لاحقة النقط D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

4.5 ن

التمرين

12

بكالوريا 2013

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \dots (E)$$

① تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر.

② A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب، S التشابه المباشر

الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى نقطة $M'(z')$.

$$\textcircled{1} \text{ بين أن } z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

② احسب z_C لاحقة النقط C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

③ لتكن النقط D ، حيث: $2\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{0}$.

① بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

② احسب z_D لاحقة النقط D .

③ بين أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

5 ن

التمرين

13

بكالوريا 2014

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

① حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

② المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A, B, C و D التي

لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

① اكتب z_A, z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

② احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

③ بين أن النقط O, A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

④ احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overline{CA}; \overline{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

③ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① اكتب العبارة المركبة للدوران R .

② عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A, C, A' و C' في استقامية.

③ عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

4ن

بكالوريا 2014

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

التمرين

14

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

② في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، تعطى النقط A, B و C التي

لاحقاتها: $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ و $z_C = 1 - 2i$ على الترتيب.

① أنشئ النقط A, B و C .

② جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

③ احسب مساحة المثلث ABC .

③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين الكتابة المركبة للتشابه S .

② بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$.

④ M نقطة لاحقتها z ، عين مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz + 1 + 2i|$.

- (I) عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .
- (II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:
- $$z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ و } z_B = \bar{z}_A, z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1

① اكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

② تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

② D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$

① حدد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A .

② اكتب z_A/z_D على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

③ عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1 + i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ حيث k يسمح $\mathbb{R}^*$.

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\bar{z}_A$ و $z_C = -(z_A + z_B)$ ، $(\bar{z}_A)$ هو مرافق z_A .

1

① اكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسّي.

② استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ أنشئ الدائرة (γ) والنقط A ، B و C .

2

① تحقق أن $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

- ② استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع، وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.
- ③ عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

3

- ① عين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .
- ② اثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

4.5ن

بكالوريا 2016 - الدورة الأولى

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين

17

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث:

$$z' = \frac{z-2}{z-1}$$

- ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z: z' = z$.
- ② النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = \overline{z_1}$.
- ① اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.
- ② بين أن النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.
- ③ نضع $z' \neq z$ ، نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.
- عين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور الترتيب، ثم أنشئ (Γ) .
- ④ h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2 .
- ① عين طبيعة التحويل $S = h \circ R$ وعناصره المميزة.
- ② اكتب العبارة المركبة للتحويل S .
- ③ عين ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S .

4.5ن

بكالوريا 2016 - الدورة الأولى

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

التمرين

18

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة:

$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$$

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي لاحتقاتها

$$z_C = \overline{z_B} \text{ و } z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

① اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

② بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

③

① عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم حدد بدقة طبيعته.

② عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z .

③ عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$.

4ن

بكالوريا 2016 - الدورة الثانية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين

19

④ نضع من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$.

① تحقق أن: $p(2\sqrt{3}) = 0$.

② جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$.

③ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

⑤ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على

$$z_C = 2\sqrt{3} \text{ و } z_B = -\sqrt{3} - 3i, z_A = -\sqrt{3} + 3i$$

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

② بين أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC .

④ عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي

$ABCD$.

⑥ عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث:

$$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi \text{ حيث: } k \in \mathbb{Z}$$

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E) \dots 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$...
يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

1

① اثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1)(2\bar{z} + 5) = 0$.

② حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

② في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D من

المستوي لواحقها على الترتيب: $z_D = -\frac{5}{2}$ و $z_C = -1$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، $z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

① اكتب كلا من العددين z_B و z_A على الشكل الأسّي.

② أنشئ النقط A, B, C و D .

③ اثبت أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$.

④ استنتج طبيعة المثلث ABC .

③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S . أنشئ النقط F
ثم حدد طبيعة المثلث AFC .

④ عين طبيعة المجموعة (Γ) لنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 = kz_B$. لما يتغير k في
المجموعة $\mathbb{R}_+$.

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$.

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C التي لآحقاتها:

$z_C = -2$ و $z_B = \bar{z}_A$ ، $z_A = 2 - 2i$

① اكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي.

② عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

③ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث: $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

• تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

④ ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h .

• عين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

5ن

التمرين

22

بكالوريا 2017

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

③ مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي: $S = \left\{-\frac{1}{2}; i\right\}$

④ من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2) \times (\bar{z}+2) = |z+2|^2$.

⑤ من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$.

⑥ S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0; 1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز

$(-3; -2)$ ونصف القطر 9.

⑦ من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان: $Z = (\sin \alpha + i \cos \alpha) \times (\cos \alpha - i \sin \alpha)$

فإن: $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

5ن

التمرين

23

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، حيث: $\|\vec{u}\| = 2cm$ ، لتكن النقط

A, B و C التي لاحقاتها: $z_A = 2, z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$ هو مرافق z_B .

1

- ① اكتب العدد z_B على الشكل الأسّي، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد المركب z_C .
- ② عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C .
- ② ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.
- ① اكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' .
- ② احسب بالسنتيمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

5ن

التمرين

24

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$.
- ① عين النسبة وزاوية التشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحول النقطة B إلى النقطة C .
 - ② اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
 - ③ نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC وبـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.
 - عين كلا من z_I و z_G لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بين أن النقط B ، G و I في استقامية.
 - ④ نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة I ، حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.
 - ⑤ نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}$
 - ① تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) .
 - ② عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها.

5ن

التمرين

25

بكالوريا 2018

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

② المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B و C ثلاث نقاط من المستوى لاحقاتها على الترتيب: Z_A, Z_B و Z_C حيث:

$$Z_C = \overline{Z_B} \text{ و } Z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, Z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

• اكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسّي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

③

① تحقق أن: $\frac{Z_B}{Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .

② استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يُطلب تعيين عناصره المميزة.

④ نسمي (γ) مجموعة النقاط M من المستوى ذات اللاحقة Z التي تحقق $|Z| = \left|\overline{Z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

• عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r .

5

بكالوريا 2018

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

التمرين

26

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $(\overline{Z} - 4 + i)(Z^2 - 4Z + 5) = 0$,

(يرمز $\overline{Z}$ لمرافق العدد Z).

② في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقاط A, B و C التي

لاحقاتها على الترتيب $Z_A = 2 + i, Z_B = 4 + i, Z_C = \overline{Z_A}$.

① تحقق أن $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

② D نقطة من المستوى لاحقتها Z_D حيث: $\begin{cases} |Z_D - Z_A| = |Z_B - Z_A| \\ \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

• بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع واحسب Z_D .

③ احسب Z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ، ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A

ويحول G إلى D .

④ عين (Γ) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة Z (M تختلف عن C) بحيث:

$$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$.

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C والتي لاحقاتها i ، $2 - i$ و $2 + i$ على الترتيب.

① اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

② من أجل كل عد مركب z يختلف عن $2 + i$ نضع $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$

① عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)| = \frac{1}{2}$.

② بين أن العدد $(f(i))^{1440}$ حقيقي موجب.

③ نعتبر الدوران r الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r ، وبين أن النقط A ، D و C في استقامية.

② استنتج أن D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$$z_C = -2z_A \text{ و } z_B = \overline{z_A}, z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$$

①

① اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي.

② احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$

②

① T الانسحاب الذي يحول A إلى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T .

② استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

③ اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي.

- ④ جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها العدد المركب $\left(-\frac{6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.
- ⑤ لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .
- عين (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

◀ موسوعة الخليل في الأعداد المركبة ▶



تمارين بكالوريات
سابقة:

شعبة تقني رياضي

◀ 26 تمرين ▶

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي:

$$z^3 + (2 - 4i)z^2 - (6 + 9i)z + 9(-1 + i) = 0 \dots (*)$$

① بين أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*).

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*)، ثم اكتب حلولها z_0, z_1 و z_2 على الشكل الأسّي حيث: $|z_1| < |z_2|$.

③ لتكن A, B و C صور الحلول z_0, z_1 و z_2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

• عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$.

4

① عين المجموعة (E) للنقط M حيث: $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

② بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E) .

⑤ تحقق أن النقط O, B و G في استقامية، ثم عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ويحول B إلى G محدد عناصره المميزة.

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كفي.

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2} \right) z - r^2 = 0$$

• اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

② في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B صورتا الحلين.

• عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

1

- ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$ حيث z هو المجهول.
- ② استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $(\bar{z} + 3)^2 - 2(\bar{z} + 3) + 2 = 0$ حيث $\bar{z}$ مرافق z .
- ② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،
النقط A, B و M لواحقها $(1 - i)$ ، $(1 + i)$ و z على الترتيب.
- ① عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث $z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}_+$.
- ② عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$

- ③ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0 \dots (1)$
- ④ ليكن العدد المركب z_1 حيث: $z_1 = 3 - 3i$ i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له
- ① اكتب z_1 على الشكل الأسّي.
- ② احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث: $z_1 \times z_3 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$
- ③ استنتج قيمتي $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.
- ⑤ نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و C ذات اللاحقات $3 + 3i$ ،
 $3 - 3i + i\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ على الترتيب.
- ① عين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; \alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α .
- ② عين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}_+$.

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $(z - 3 + 2i)(z^2 + 6z + 10) = 0$
 i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمده له).
- ② علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, C, D و I ذات اللاحقات:
 $z_I = 1$ و $z_D = -3 - i$ ، $z_C = -3 + i$ ، $z_A = 3 - 2i$
- ③ z عد مركب يحقق الجملة: $\begin{cases} \arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - 1) + \frac{\pi}{2} \\ |z - 3 + 2i| = |z - 1| \end{cases}$
- ① بين أن الجملة تكافئ: $\frac{z-3+2i}{z-1}$ ثم عين قيمة z .
- ② B النقطة التي لاحقتها $z_B = 3$ ، تحقق أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟
- ④ لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث: $z_J = 1 - 2i$.
- ① اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب Z حيث: $Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}$
- ② تحقق أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$. ما طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

- ① اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب α حيث: $\alpha = -2 + 2i\sqrt{3}$
 i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمده له).
- ② حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$
- ② ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 النقط A, B و C التي لاحقاتها $z_A = -2$ ، $z_B = -1 - \sqrt{3}i$ و $z_C = 1 + \sqrt{3}i$ على الترتيب.
- ① احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمده له.
- ② استنتج طبيعة المثلث ABC .
- ③ لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$.

① تحقق أن B تنتمي إلى (E) .

② عين المجموعة (E) .

4ن

بكالوريا 2011

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين

07

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $zz^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

② المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقتها على

الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{3} - i$ ، نضع: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

① اكتب L على الشكل الأسّي.

② أثبت أن: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ ، ثم استنتج أن A هي صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد

عناصره المميزة.

③ استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته.

4ن

بكالوريا 2011

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

التمرين

08

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$L = -\frac{4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$ العدد المركب المعرف كما يلي:

①

① اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

② بين أن: $L^{12} + 1 = 0$ ، ثم احسب: $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$

③ n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي، اثبت أن: $L^{4n} + L^{4p} = 0$

②

① النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$ ، عين اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A'

صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

② عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

6ن

بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين

09

① عين العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث:

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$$

② نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و Ω التي

لاحقاتها على الترتيب: z_A, z_B, z_Ω حيث: $z_A = 3 + 2i, z_B = -3, z_\Omega = 1 - 2i$.

① اثبت أن $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$.

② عين طبيعة المثلث ΩAB .

③ h هو التحكاي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2.

① عين الكتابة المباشرة للتحكالي h .

② عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحكاي h .

③ عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$.

④ بين أن $ABCD$ مربع.

④ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$.

① تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

② أنشئ المجموعة (E) .

5ن

بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

التمرين

10

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :

$$(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = -1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = \sqrt{3} - i \quad , \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

- ① اكتب كلا من z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسّي.
- ② تحقق أن: $i = \frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

③ z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}$ عمدة له، حيث n عدد طبيعي

$$L_n = z_D \times z_n \quad \text{ب: العدد المركب المعروف:}$$

① اكتب كلا من L_0, L_1 على الشكل الجبري.

② (u_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = |L_n|$

• اثبت ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

• $M_0, M_1, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, \dots, L_n$ على الترتيب

- احسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \dots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$

• جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

5ن

بكالوريا 2013

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين

11

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 + 6z + 17 = 0$.
- ② في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقطة A ، B و C لاحقاتها على الترتيب:
- $$z_A = -4, \quad z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \quad \text{و} \quad z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$
- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3

- ① عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .
- ② عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\| = 10\sqrt{2}$
- ④ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z + 4) = \frac{\pi}{4}$.
- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عين المجموعة (Γ_2)

4.5ن

بكالوريا 2013

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

التمرين

12

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z + 5 - i\sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$
- ② المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 + \sqrt{3}i$ و $z_C = -5 + i\sqrt{3}$
- S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى B .
- جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم عين العناصر المميزة له.

③

- ① عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A; 2), (B; -1), (C; 1)\}$
- ② اكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .
- ③ عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

5.5ن

التمرين

13

بكالوريا 2014

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - i)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4) = 0$
- ② المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نسمي A, B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$
- ① اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.
- ② هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برر اجابتك.
- ③
- ① عين العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددًا نسبته وزاويته.
- ② استنتج طبيعة المثلث ABC .

④

- ① عين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:
- $$|z - z_1|^2 = |z - z_3|^2 = 5$$
- ② عين (E') مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث: $|z - z_1| = |z - z_3|$

1 نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة

$$z_0 = 1 + i$$

① عين ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}_+$.

② عين ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i\frac{3\pi}{4}}$ و k يمسح $\mathbb{R}_+$.

③ عين احداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

2 نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث: $z_1 = z_0 + 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

① عين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

② عين z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

③ عين العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A; \alpha), (C; \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$.

④ عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$((1 + \sqrt{2})\vec{MA} - \vec{MC})(\vec{MA} - \vec{MC}) = 0$$

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على

الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$.

1

① اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي.

② n عدد طبيعي، عيم قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

③ z عدد مركب حيث: $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، احسب طويلة العدد z وعمدة له، ثم اكتب z/z_A على الشكل الجبري.

④ استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2

① احسب اللاحقة z_C للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

② احسب z_D للاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 1), (C; 1)\}$ ، ثم بين أن $ABCD$ مربع.

5ن

بكالوريا 2015

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

التمرين

16

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 4(\sin \theta)z + 4 = 0 \dots (*)$ حيث θ وسيط حقيقي.

② من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرسم إلى حلي المعادلة $(*)$ بـ z_1 و z_2 ، اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

③ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحتقاتها

على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.

① اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي. واستنتج طبيعة المثلث ABC .

② استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويُطلب تعيين نسبته وزاويه له.

③ عين للاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{AC}$ ، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABCD$.

4

① عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

② عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$.

4ن

بكالوريا 2016

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين

17

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$.

② في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقطتين A و B لاحتقاتهما على

الترتيب: $z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$.

① اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

② بين أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

③ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا.

③ f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right) z$.

① عين طبيعة التحويل النقطي f وعناصره المميزة.

② احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

③ عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

4.5ن

التمرين

18

بكالوريا 2016

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

1

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

② اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

② المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C من المستوي التي

$$c = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ و } b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

① علم النقط A ، B و C في المعلم السابق.

② نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A ونسبته 3 وزاويته π

والنقطة E صورة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

• احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب.

③ نضع: $z = \frac{d-b}{e-b}$

① اكتب العدد المركب z على الشكل المثلثي.

② نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I

• ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:

$$z_C = -i \quad , \quad z_B = 2 + i \quad , \quad z_A = -1$$

① اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

② عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحول B إلى A .

③ نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C والنقطة E صورة D بالتشابه S .

① عين z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن: $z_E = 1 - 2i$ حيث: z_E لاحقة النقطة E .

② حدد طبيعة الرباعي $ADEB$.

④ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث:

$$\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

• تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها:

$$z_D = \overline{z_C} \quad \text{و} \quad z_C = \frac{1}{2}(1 - i) \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = 1 + i$$

①

① اكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي، ثم استنتج الشكل الأسّي للعددين z_B و z_D .

② عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$

②

① أوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B .

② احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

③ جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 2), (C; -1), (D; -1)\}$.

4 لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = \sqrt{5}$

• بين أن A من (Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

5ن

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين

21

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z - 4)(z^2 - 2z + 4) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها

$$z_C = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_A = 4$$

1 اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2

1 عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

2 عين طبيعة الرباعي $ABDC$.

3 من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $z_n = (z_B)^n + (z_C)^n$.

1 بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = z_{6n}$.

• عبر عن t_n بدلالة n ثم احسب P_n حيث: $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n$

5ن

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

التمرين

22

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها

$$z_C = \overline{z_B} \quad \text{و} \quad z_B = -1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_A = -1 + \sqrt{3}$$

1 بين أن $z_B - z_A = (z_C - z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

2

1 اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث: $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$

② بين أن: $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

③ نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرفة بـ:

$$z' = (z - z_B)L + z_B$$

• بين أن S تشابه مباشر يُطلب تعيين عناصره المميزة.

④ لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$.

• احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

5ن

بكالوريا 2018

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين

23

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما:

$$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{و} \quad z_B = \overline{z_A} \quad (\overline{z_A} \text{ يرمز إلى مرافق } z_A).$$

① اكتب على الشكل الأسّي كلا من العددين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بين أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.

② لتكن C صورة B بالتحكاي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3) .

• بين أن لاحقة النقطة C هي $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$.

③ احسب z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

4

① بين أن: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

② اوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا.

5ن

بكالوريا 2018

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

التمرين

24

(I)

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $4z^2 - 2z + 1 = 0$

② اكتب العددين $\frac{1}{z_2}$ و $\frac{1}{z_1}$ على الشكل الأسّي حيث: z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

|| المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1

① احسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC .

② استنتج أن B هي صورة النقطة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

② أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

③ حدد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق ما يلي:

$$|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$$

④ بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

5ن

بكالوريا 2019

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين

25

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$$z_A = 1 + i \quad , \quad z_B = 2 + i \quad \text{و} \quad z_C = \frac{3}{2} + i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1.

1

① تحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ).

② عين قياسا بالراديان للزاوية $(\vec{AB}; \vec{AC})$ ، ثم استنتج أن صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

② S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

① حدد العناصر المميزة للتشابه S .

② عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه S .

③ ما هي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث: $S = h \circ r$ ؟ استنتج أن النقط A ، C و D في استقامية.

④ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$

• تحقق أن النقطة C من المجموعة (E)، ثم حدد طبيعة (E).

(I)

1 تحقق أن: $(2 - 2\sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3}$

2 عين على الشكل الجبري الجذريين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب Z حيث: $Z = -16\sqrt{3} - 16i$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي

لاحقاتها $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ و $z_C = -\frac{1}{4}z_A$

1 اكتب z_A على الشكل الجبري، ثم بين أن: $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

2 استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3 S التشابه المباشر الذي يحول A إلى B ويحول B إلى C .

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S .

1 بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz$

2 حدد العناصر المميزة للتشابه S .

4 G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 4)\}$.

1 بين أن: $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2 (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$$

• حدد طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S .

◀ موسوعة الخليل في الأعداد المركبة ▶



تمارين بكالوريات

سابقة:

شعبة رياضيات

◀ 25 تمرين ▶

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما:
 $\sqrt{3} - i$ و $\sqrt{3} + 3i$ على الترتيب.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A إلى B ، ثم عين زاويته ونسبته.

② نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي: $A_0 = A$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$A_{n+1} = S(A_n) \quad . \quad \text{نرمز إلى لاحقة } A_n \text{ بالرمز } z_n.$$

① أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2 .

$$\textcircled{2} \text{ برهن أن: } z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}.$$

③ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1) .

③ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

① بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q .

② استنتج عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعروف كما يلي:

$$P(z) = 2z^2 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

① بين أنه إذا كان α جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذر له أيضا.

② تحقق أن $1 + i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

③ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

④ اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

٥) لتكن النقط A, B, C, D من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1 + i, -1 + i, -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ حيث m عدد حقيقي، عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

4ن

بكالوريا 2009

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

03

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث: $f(z) = \frac{z-i}{z-i}$

١) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$

٢) لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

١) عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عدا حقيقيا سالبا تماما.

٢) احسب العدد المركب z_0 بحيث: $|f(z_0)| = 1$ و $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$

٣) في المستوي المركب نعتبر النقط A, B و C صور الأعداد المركبة 1، i و z_0 على الترتيب.

١) ما نوع المثلث ABC ؟

٢) عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

4.5ن

بكالوريا 2010

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

04

١) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0 \dots (E)$

١) تحقق أن 3 حلز للمعادلة (E) ، ثم عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z فإن:

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = (z - 3)(az^2 + bz + c)$$

٢) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

٢) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و C صور الأعداد المركبة

$$z_A = 3, \quad z_B = i\sqrt{3}, \quad z_C = -i\sqrt{3}$$

- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

③ D النقطة التي لاحقتها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بدالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

- عين z_E لاحقة النقطة E .

④ F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

① احسب $\frac{z_F}{z_E}$ ، واستنتج ان المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

② عين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

5ن

بكالوريا 2010

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

05

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

① نسمي A ، B و I التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_I = 1 - 2i \quad \text{و} \quad z_B = -1 - 2i, \quad z_A = 1 - 4i$$

① علم النقط A ، B و C .

② اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.

③ ما هو نوع المثلث IAB ؟

④ صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. احسب اللاحقة z_C للنقطة C .

⑤ D مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$. احسب اللاحقة z_D للنقطة D .

⑥ بين أن $ABCD$ مربع.

② عين وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$.

③ عين وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 1$.

4.5ن

بكالوريا 2011

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

06

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ و $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$.

① اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و z_C .

2

① احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

② حدد طبيعة المثلث ABC .

③ عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيناً.

④ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (-1 + i)z + 1 - 3i$$

① عين طبيعة التحول T وعناصره المميزة.

② استنتج طبيعة التحول $T \circ T$ وعناصره المميزة.

4ن

بكالوريا 2011

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

07

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1

① الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

② $a^{2011} + \bar{a} = 0$ حيث: $\bar{a}$ مرافق a .

② في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

① التحويل T الذي كتابته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم.

② مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A

ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقتها $1 + i$.

③ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$.

① $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$.

② (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

③ (u_n) متباعدة.

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$
- ② المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A + z_B$
- ① اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A, z_B و z_A/z_B
- ② عين لاحقة كل من A', B' و C' صور النقط A, B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.
- ③ بين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.
- ③ نسمي (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$
- ① بين أن (Δ) هو محور الفواصل.
- ② بين أن حلي المعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2 = i$ عدنان حقيقيان. (لا يُطلب حساب الحلين).

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$
- ② نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2i$ و $z_D = \overline{z_C}$
- بين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلتعين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A, B, C و D .
- ③ نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقط E نظيرة النقط B بالنسبة إلى المبدأ O .
- ① بين أن: $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$
- ② بين أن النقط A هي صورة النقط E بدوران R مركزه C يطلتعين زاويته.
- ③ استنتج طبيعة المثلث AEC .

④ H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عين طبيعة التحويل $R \circ H$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R \circ H$.

6ن

بكالوريا 2013

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

10

① a و b عدنان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

النقط A, B, C و E التي لاحقاتها $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ ، $z_C = \bar{z}_A$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{4}}$ على الترتيب.

1

① اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_a}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

② حدد طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثم استنتج مساحته.

② التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه S ، ثم تحقق أن $S(A) = E$.

② بين أن مساحة الرباعي $OEF G$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة) حيث: $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

3

① احسب بدلالة a و b العبارة:

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos \left[\arg \left(\frac{z_E}{z_C} \right) \right]$$

② استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b .

② n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O ، لاحقتها z_n .

نضع $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ: $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

① اكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسّي بدلالة a و b .

② نفرض أن: $a < b$ و $\arg \left(\frac{z_{n+1}}{z_n} \right) \in]-\pi; \pi]$

- بين أن المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

③ احسب، بدلالة a و b و n المجموع T_n حيث: $T_n = a + a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots + \frac{b_n}{a^{n-1}}$ ، ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

4 عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط O ، A و M_n في استقامية.

5ن

بكالوريا 2013

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

11

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

2 نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A ، B و M ذات اللاحقات:

$$z_B = \overline{z_A}, z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}. \text{ (يرمز إلى } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A \text{).}$$

1 اكتب z_A على الشكل الأسّي.

2 عين مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$.

3

1 التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r ؟ عين عناصره المميزة.

2 التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$

- عين نسبة ومركز التحاكي h .

3 نضع: $S = h \circ r$. (يركز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عين طبيعة التحويل S ، مبررا عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$$

4 نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E ، حيث: $S(O) = C$ ، $S(D) = E$ و $S(C) = D$.

- بين أن النقط O ، Ω و E في استقامية.

5

1 عين (Γ_1) مجموعة النقط $M(z)$ المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

2 عين (Γ_2) صورة (Γ_1) بالتحويل S .

5ن

بكالوريا 2014

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

12

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$(z - 1 - 2i)(z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$$

② A, B, C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لاحقاتها على

$$z_D = 1 - 2i \quad \text{و} \quad z_C = 1 + \sqrt{3} - i, \quad z_B = 1 + \sqrt{3} + i, \quad z_A = 1 + 2i$$

① بين أن: $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC) .

② تحقق أن: $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$, ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

③

① بين أن: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. ثم استنتج أن صورة A بتشابه مباشره مركزه B يطلب تعيين مسبته وزاويته.

② بين أن المثلث ADB قائم وأن النقط A, B, C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

③ استنتج انشاء للرباعي $ABCD$.

5ن

بكالوريا 2014

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

13

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$, A و B النقطتان اللتان لاحقتهما على الترتيب:

$$a = -2 + 6i \quad \text{و} \quad b = -1 + 2i$$

① اكتب العدد المركب $1 + i$ على شكل أسي.

② S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} + 2$

① D النقطة ذات اللاحقة d حيث: $d = 2i$, جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S . ماذا تستنتج؟

② بين أن: $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S .

③ (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x + 5y = 11$

① تحقق أن النقطة $M_0(-3; 4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين النقط (Δ) التي احداثياتها أعدادا صحيحة.

② M'_0 صورة M_0 بالتحويل S . بين أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان.

③ x و y عدنان صحيحان من المجال $[-5; 5]$. عين مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث يكون

المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان، حيث M' هي صورة M بالتحويل S .

ينسب المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, H و I لاحقاتها على الترتيب: $z_A = i, z_B = -2 + i, z_C = -3, z_H = -3 + 4i$ و $z_I = -1 - i$.

1

- ① مثل النقط A, B, C, H و I في المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- ② عين النسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C .
- ② عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
- ③

- ① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$.
- ② استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.
- ③ بين أن النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .
- ④ بين أن النقط G, H و I في استقامية.
- ⑤ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.
- ① بين أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) .
- ② عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.
- ③ أنشئ المجموعة (Γ) .
- ④ تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0 \quad (\text{لاحظ أن: } (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3})$$

② المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A و B نقطتان من المستوى، لاحقتاهما على

الترتيب: $z_A = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ و $z_B = \overline{z_A}$

① بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

② استنتج عمدة للعدد المركب z_A .

③ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

③

① حل، في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهولين $(x; y)$ التالية: $7x - 2y = 1$.

② بين أنه إذا كان الثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

③ استنتج كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$.

④ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

4.5 ن

بكالوريا 2016

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

16

①

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$

② استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية:

$$(z + 1 + i(1 - \sqrt{3}))^2 - 4z + 1 - 4i(1 - \sqrt{3}) = 0$$

② θ عدد حقيقي حيث: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

① اكتب العدد المركب $(1 + \sqrt{3})$ على الشكل الأسّي.

② عين θ علما أن: $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{z_0} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد z_0).

③ n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها. اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

④ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

③ المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على

الترتيب: $z_A = 2 - i$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

① عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$

② استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

$$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} \right| = 2 \end{cases} \quad \text{حيث: } z_E \text{ النقطة من المستوي ذات اللاحقة } z_E$$

• بين أن: $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

• بين أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

④ M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

① عين z_I لاحقة النقطة I .

② α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقق: $z - z_I = e^{i\alpha}$

• تحقق أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

• عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة عندما يتغير α في $\mathbb{R}$.

4ن

بكالوريا 2016

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

17

(I)

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$

② جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:
$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D و H لاحقاتها على

الترتيب: $z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = -i\sqrt{2}$ ، $z_C = 1 + i$ ، $z_D = 1 - i$ و $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E النقطة التي

تحقق: $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DO}$

① اكتب z_H على الشكل الأسّي واستنتج نوع المثلث BEC .

② S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = z_A z + z_B$

① ما هي طبيعة التحويل S ؟ وماهي عناصره المميزة؟

② احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD .

③ عين (γ') صورة (γ) بالتحويل S واستنتج مساحتها.

③ عين (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M) تختلف عن B و C ذات اللاحقات z التي من أجلها يكون

العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما.

- ① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 2 + 2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8) = 0$.
- ② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها:
- $$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = 2(1 - i)$$
- ① اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
- ② عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا.
- ③ نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يسمح $\mathbb{R}_+$.
ثم تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين وأنشئ (Γ) .
- ③ الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2 .
• عين طبيعة التحويل $h \circ r$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h \circ r$.

- ① اكتب العدد $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعين للعدد المركب: $\frac{21}{4} + 5i$.
- ② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق: $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = -\frac{3}{2}i$ ، $z_C = -\overline{z_A}$ و $z_D = i$
- ① اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري.
- ② اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .
- ③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I .
- ① اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم عين نسبته وزاويته.
- ② نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

- عين قيم n حتى يكون T_n تحاكيا، عين عندئذ عناصره المميزة.

5ن

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

20

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 - 10z + \frac{29}{2} = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D التي

$$\text{لاحقاتها: } z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_B = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad z_C = -\overline{z_A}, \quad \text{و } z_D = i.$$

1

① اكتب العددين z_A و z_B على الشكل الجبري، ثم علم النقط A, B, C و D في المعلم السابق.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الاسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

③ جد لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة إلى D ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$.

④ اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى D ، ثم حدد نسبته وزاويته.

④ نعرف متتالية النقط $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ كما يلي: $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$ (هل لاحقة A_n).

① برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n - z_B = 5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$.

② عين قيم n الطبيعية حتى تنتمي النقط A_n إلى المستقيم (AB) .

4ن

بكالوريا 2017 - الدورة الاستثنائية

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

21

① نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2 - 2(1 - \sin \alpha)z + 2(1 - \sin \alpha) = 0 \dots (E)$

حيث α عدد حقيقي. (نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي المعادلة (E)).

① عين الحلين z_1 و z_2 بدلالة α .

② نضع $a = \frac{\pi}{6}$. بين أن $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$.

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاتها

$$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = 2z_A.$$

① عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

② ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z = (1 + z_A)z + 2z_B$$

• عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

③ (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقات z حيث: $\arg(\bar{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

• تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة (Γ) وأنشئها.

5ن

بكالوريا 2018

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

22

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $[-\pi; \pi]$.

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin \theta)z + 1) = 0$$

② A, B, C و D نقط من المستوي لاحقتها على الترتيب:

$$z_D = \bar{z}_C \quad \text{و} \quad z_C = \sin \theta + i \sin \theta \quad , \quad z_B = 1 - i \quad , \quad z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

(يرمز $\bar{z}_C$ إلى مرافق z_C)

① اكتب z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسّي.

② E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث: $z_E = \frac{z_A}{z_B}$.

• بين أن النقط C, D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2} - 2)$.

• عين قيمة θ حتى تكون النقطة B هي صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

④ نضع $\theta = -\frac{3\pi}{4}$. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

5ن

بكالوريا 2018

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

23

① m عدد حقيقي، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + (m + 1)z + (2m - 1) = 0 \dots (E)$$

• عين قيم العدد الطبيعي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

② نضع $m = 3$ ، حل المعادلة (E).

③ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C و E التي لاحقاتها:

$$z_A = -2 + i, \quad z_B = -2 - i, \quad z_C = \alpha, \quad \text{و} \quad z_E = \sqrt{3}$$

حيث α عدد حقيقي و $\alpha > -2$.

- بين أن قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع $(-2 + \sqrt{3})$.
- نضع في كل ما يأتي $z_C = -2 + \sqrt{3}$:

④ اكتب العدد المركب: $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج أن:

① المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

② النقط A, B, C و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

⑤ ليكن r الدوران الذي يحول النقطة B إلى C ويحول C إلى A ، عبارته المركبة هي:

$$z = az + \left(\frac{\sqrt{3} - 6}{2} \right) + i \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \right)$$

حيث α عدد مركب.

① احسب العدد المركب α ثم استنتج زاوية الدوران r .

② تحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r .

5ن

بكالوريا 2019

شعبة رياضيات

الموضوع الأول

التمرين

24

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D حيث:

$$z_A = 1 + i\sqrt{2}, \quad z_B = i, \quad z_C = \overline{z_A}, \quad \text{و} \quad z_D = 1$$

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 3) = 0$

②

① احسب كلا من $|z_A - 1|$ ، $|z_B - 1|$ و $|z_C - z_E|$ ثم تحقق أن النقط الأربعة A, B, C و D تنتمي إلى

نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

② بين أن: $z_B - z_E = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)(z_A - z_E)$ ، ثم استنتج أن B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب

تعيين عناصره المميزة.

• ما طبيعة المثلث ABE ؟

③ عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDE$.

④ $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقتهما على الترتيب z_1 و z_2 .

① برهن أن: $(\overrightarrow{w_1} \text{ و } \overrightarrow{w_2} \text{ متعامدان})$ يكافئ $(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 0)$.

② عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$(z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_D}) + (z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_C}) = 0$$

5ن

بكالوريا 2019

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين

25

① نضع من أجل كل عدد مركب z ، $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

① بين أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ ، ثم استنتج أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حل لها.

② حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

② نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, M و M'

التي لاحقاتها على الترتيب: $2i, 3 - 4i, z$ و z' حيث: $z = \frac{-iz+4+3i}{z-2i}$ مع $z \neq 2i$

ولتكن I مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$.

① عين اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب.

② لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'| = 2$.

• بين أن (النقطة M من (E)) يكافئ $(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{JM} = 0)$ ، ثم عين (E) وأنشئها.

③ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z') = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

• تحقق أن النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين وأنشئ (Γ) .

③ عين الشكل الجبري للاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ) .

الخليل

للرياضيات

