

◀ التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x} \right)$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} \right)$

③ $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right)$

④ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right)$

◀ التمرين 02:

برهن أن المستقيم (D) مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرسالوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

① $D: y = x + 4 \quad , \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2}$

② $D: y = x + 2 \quad , \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2}$

◀ التمرين 03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

حيث a و b أعداد حقيقية، و (C_f) تمثيلها البياني.

① عين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .

② نفرض أن a = -1 ، b = 1 :

أ/ ادرس تغيرات الدالة f.

ب/ احسب f(5) ، f(0) ، f(-1) و f(-2).

ج/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A

التي فاصلتها 1 .

د/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ).هـ/ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f)

◀ التمرين 04:

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامدمتجانس (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).① عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيممقارب معادلته $y = x - 3$ ، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

② ادرس تغيرات الدالة f.

③ اثبت أن (C_f) يقبل مماسين (D₁) و (D₂) معامل توجييه كلمنهما (-3) ، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس M₁ و M₂ ومعادلتى المماسين (D₁) و (D₂).④ مثل بدقة المماسين (D₁) و (D₂) ، ثم المنحني (C_f) .

⑤ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول

المعادلة: $f(x) + 3x - m = 0$.⑥ g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ:

$$g(x) = f(|x|)$$

أ/ بين أن الدالة g زوجية.

ب/ بين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من(C_f) ، ثم مثل بيانيا (C_g) في المعلم السابق.

◀ التمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).① عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحني (C_f) يقبل عندالنقطة $A(0; \frac{7}{2})$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم بين أن

f(x) تكتب على الشكل:

$$f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$

② ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات.

③ بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب تعيين معادلته.④ عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.⑤ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).⑥ نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ) ، برهن أن النقطةω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

⑦ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

⑧ مثل بيانيا كل من (T) ، (Δ) و (C_f) .

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

◀ حل التمرين 01:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-2)(x-1)}{1-x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-(x-2)) = -(1-2) \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{3 + \sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) \\ &= \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

◀ حل التمرين 02:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x-2} - (x+4) \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3 - (x+4)(x-2)}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{11}{x-2} \right) = 0 \end{aligned}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 4$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا: $f(x) - y = 0$

$$\Rightarrow \frac{11}{x-2} = 0 \Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
الوضعية	(D) تحت (C_f)		(D) فوق (C_f)

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} - (x+2) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 1 - x^2(x+2)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 2$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x \neq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-		-
الوضعية	(D) تحت (C_f)		(D) تحت (C_f)

◀ حل التمرين 03:

① تعيين العددين a و b :

الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 معناها:

$$f'(3) = 0 \text{ و } f(3) = -8$$

لدينا: $f'(x) = x^2 + 2ax - 3$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow 3^2 + 2a(3) - 3 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$\Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

ولدينا:

$$f(3) = -8 \Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + a(3)^2 - 3(3) + b = -8$$

$$\Rightarrow 9 - 9 + 9 + b = -8 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

② نفرض أن $a = -1$ ، $b = 1$:

أ/ دراسة تغيرات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 \right) = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- تعيين $f'(x)$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$\Delta = 16 \quad \text{نحل المعادلة } x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ باستعمال } \Delta$$

$$\text{ومنه: } x_1 = 3 \text{ و } x_2 = -1$$

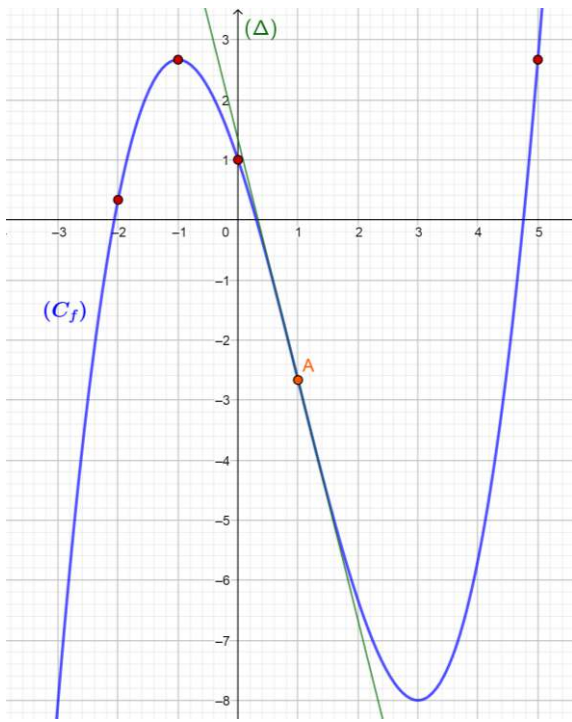
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)$	-8	$+\infty$

ب/ حساب $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(5)$:

$$\bullet f(5) = \frac{1}{3}(5)^3 - (5)^2 - 3(5) + 1 = \frac{8}{3}$$

$$\bullet f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 3(0) + 1 = 1$$



◀ حل التمرين 04

① تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x - 2} - (x - 3) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a - 1)x^2 + (b + 5)x + c - 6}{x - 2} \right) = 0$$

هذه النهاية لا تتحقق إلا إذا كان: $(a - 1 = 0)$

$$\boxed{a = 1}$$

وعليه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 5)x + c - 6}{x - 2} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(b + 5)x}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + 5) = 0 \Rightarrow b + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -5}$$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x - 2) - ax^2 - bx - c}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2}$$

ومنه:

$$f'(3) = 0 \Rightarrow \frac{a(3)^2 - 4a(3) - 2b - c}{((3) - 2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -3a - 2b - c = 0$$

$$\Rightarrow -3(1) - 2(-5) - c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 7}{x - 2}$$

② دراسة تغيرات الدالة f :

$$\bullet f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = \frac{8}{3}$$

$$\bullet f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) + 1 = \frac{1}{3}$$

ج/ كتابة معادلة المماس (Δ) :

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$= (1^2 - 2(1) - 3)(x - 1) - \frac{8}{3}$$

$$= \boxed{-4x + \frac{4}{3}}$$

د/ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمماس (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 + 4x - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = (x - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

$$= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma$$

$$= \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta - \alpha = -1 \\ \gamma - \beta = 1 \\ -\gamma = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد:}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ إذن:}$$

ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = (x - 1)\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(x - 1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{3}(x - 1)(x - 1)^2$$

$$= \frac{1}{3}(x - 1)^3$$

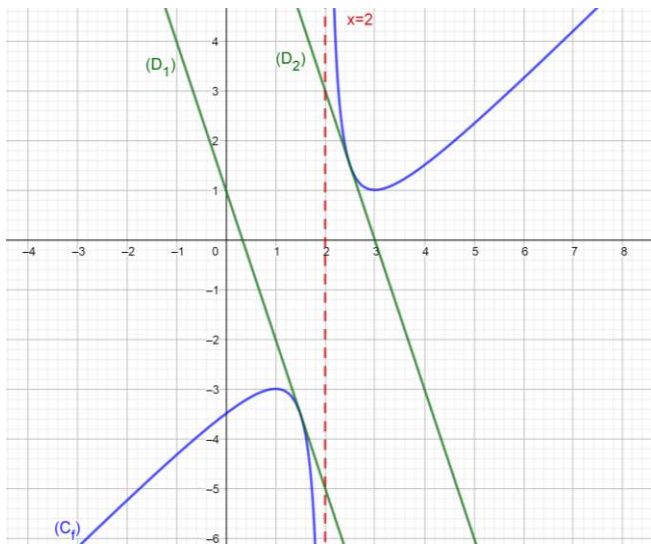
لدينا: $f(x) - y_{(\Delta)} = 0$

$$\frac{1}{3}(x - 1)^3 = 0 \text{ ومنه:}$$

إذن: $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	-	0	+

ه/ التمثيل البياني:



⑤ المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -3x + m$ ، وهي:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر موجب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

لما $1 < m < 9$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = 9$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

لما $m > 9$ المعادلة تقبل حلان موجبان

⑥

أ/ تبين أن الدالة g زوجية:

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|)$$

$$= f(|x|)$$

$$= g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية.

ب/ تبين أنه يمكن إنشاء $g(C_g)$ انطلاقا من (C_f) :

$$g(x) = f(|x|)$$

$$= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه:

لما $x \geq 0$ (C_f) ينطبق على (C_g)

ولما: $x \leq 0$ (C_g) متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.

◀ حل التمرين 05:

① تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$$\text{لدينا: } f(0) = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \boxed{b = 7}$$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+2x+2) - (2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{(2-a)(0)^2 - 10(0) + 2a - 14}{((0)^2 + 2(0) + 2)^2} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{6}{0^-} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{6}{0^+} \right) = +\infty$$

- تعيين $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(1)x^2 - 4(1)x - 2(-5) - (7)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

ومنه: $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

③ اثبات أن (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) :

(C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)

معناه أن المعادلة $f'(x) = -3$ تقبل حلان:

$$f'(x) = -3 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = -3$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -3(x-2)^2 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$\text{ومنه: } x_2 = \frac{5}{2} ; x_1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{إذن } M_2 \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right) ; M_1 \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2} \right)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} (D_1): y &= f' \left(\frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) + f \left(\frac{3}{2} \right) \\ &= \boxed{-3x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_2): y &= f' \left(\frac{5}{2} \right) \left(x - \left(\frac{5}{2} \right) \right) + f \left(\frac{5}{2} \right) \\ &= \boxed{-3x + 9} \end{aligned}$$

④ التمثيل البياني:

$$= \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

لدينا: $0 < (x^2 + 2x + 2)$ ومنه الإشارة من البسط:

ومنه:

$$5x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1$$

إذن:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

⑥ برهان أن ω مركز تناظر (C_f) :

لدينا: $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-2 - x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

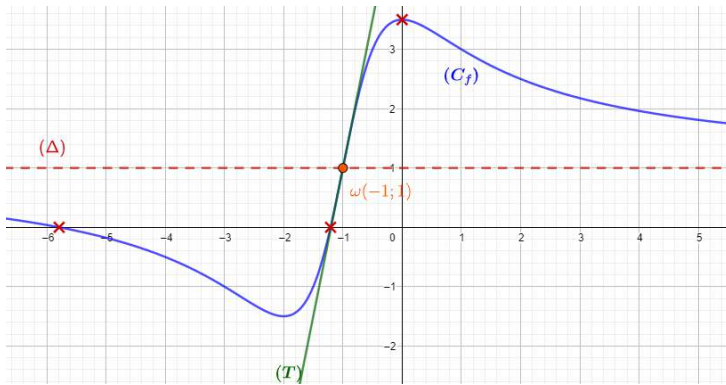
$$\begin{aligned} f(2\alpha - x) + f(x) &= f(-2 - x) + f(x) \\ &= 1 + \frac{5(-2 - x) + 5}{(2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 1} + 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ &= 2 - \frac{(5x + 5)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2} \\ &= 2 \\ &= 2(1) \end{aligned}$$

ومنه النقطة $\omega(-1; 1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

⑦ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= \boxed{5x + 6} \end{aligned}$$

⑧ التمثيل البياني:



• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

$$\Rightarrow 2a - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 7}$$

- التبيين:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+2x+2+5x+5}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

② دراسة تغيرات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+a)(x^2+2x+2) - (2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2} \\ f'(x) &= \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2+2x+2)^2} \end{aligned}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -5x^2 - 10x = 0$$

$$\Rightarrow -5x(x+2) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ أو } -5x = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 0$$

تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$f(-2)$	$f(0)$	1

③ تبين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

④ تعيين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- تقاطع (C_f) مع (xx') :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2} = 0 \\ &\Rightarrow x^2+7x+7 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 21$$

$$x = -5.79 \text{ أو } x \approx -1.21$$

- تقاطع (C_f) مع (yy') :

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{2} \right) \right\} \quad \text{لدينا } f(0) = \frac{7}{2} \text{ ومنه:}$$

⑤ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} - 1$$